آنالیز ریاضی

جلد دوم

گریگوری میخائیلوویچ فیختن گولتس

ترجمهٔ

باقر امامی / پرویز شهریاری

MATH75.IR

گریگوری میخائیلوویچ فیختن‌گولتس

آنالیز ریاضی

(محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی)

ترجمهٔ : باقر امامی
پرویز شهریاری

تهران ـ ۱۳۶۸

MATH75.IR

انتشارات فردوس ـ خیابان مجاهدین اسلام، شمارهٔ ۲۶۲ ـ تلفن **۳۰۲۵۳۳**

آنالیز ریاضی (محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی)

گریگوری میخائیلوویچ فیختن‌گولتس

ترجمهٔ : باقر امامی، پرویز شهریاری

امور فنی : حسن نیک‌بخت

چاپ اول : ۱۳۶۸، تهران

تیراژ : ۳۰۰۰ نسخه

حروفچینی : رهنما ـ مهدی

فیلم و زینگ : لادن

چاپ : چاپخانه تابش

همهٔ حقوق محفوظ است.

MATH75.IR

فهرست

فصل هشتم

تابع اولیه (انتگرال نامعین)

§۱. انتگرال نامعین ومثال‌های سادهٔ محاسبهٔ آن ۷۷۵
۲۶۳. مفهوم تابع اولیه (وانتگرال نامعین) ۷۷۵
۲۶۴. انتگرال ومسألهٔ تعیین مساحت ۷۷۹
۲۶۵. جدول انتگرال‌های اساسی ۷۸۲
۲۶۶. قاعده‌های سادهٔ انتگرال گیری ۷۸۴
۲۶۷. مثال‌ها ۷۸۵
۲۶۸. انتگرال گیری با روش تغییرمتغیر ۷۹۰
۲۶۹. مثال‌ها ۷۹۵
۲۷۰. انتگرال گیری جزء به‌جزء ۸۰۱
۲۷۱. مثال‌ها ۸۰۳
§۲. انتگرال گیری عبارت‌های گویا ۸۰۸
۲۷۲. طرح مسألهٔ انتگرال گیری به‌صورت متناهی ۸۰۸
۲۷۳. کسرهای ساده وانتگرال گیری آن‌ها ۸۰۹
۲۷۴. تجزیهٔ کسرهای سره، به‌کسرهای ساده ۸۱۱
۲۷۵. تعیین ضریب‌ها، انتگرال گیری ازکسرهای سره ۸۱۵
۲۷۶. جداکردن بخش گویای انتگرال ۸۱۷
۲۷۷. مثال‌ها ۸۲۱
§۳. انتگرال گیری بعضی عبارت‌های شامل رادیکال ۸۲۶
۲۷۸. انتگرال عبارت‌های به‌صورت $\left(\sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ و x*. مثال‌ها ۸۲۶

MATH75.IR

۲۷۹. انتگرال دیفرانسیل‌های دوجمله‌ای. مثال‌ها ۸۲۸
۲۸۰. رابطه‌های کاهشی ۸۳۱
۲۸۱. انتگرال عبارت‌های به‌صورت $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. تبدیل‌های اولر ۸۳۴
۲۸۲. تغییر هندسی تبدیل‌های اولر ۸۳۷
۲۸۳. مثال‌ها ۸۳۹
۲۸۴. روش‌های دیگر محاسبه ۸۴۷
۲۸۵. مثال‌ها ۸۵۵
§۴. انتگرال گیری از عبارت‌های شامل تابع‌های مثلثاتی و تابع‌های نمائی ۸۵۸
۲۸۶. انتگرال گیری از دیفرانسیل‌های $R(\sin x, \cos x)\,dx$. ۸۵۸
۲۸۷. انتگرال گیری از عبارت‌هائی که شامل $\sin^n x$ و $\cos^n x$ هستند. ۸۶۱
۲۸۸. مثال‌ها ۸۶۴
۲۸۹. مختصری در بارهٔ حالت‌های دیگر ۸۷۰
§۵. انتگرال‌های بیضوی (الیپتیك) ۸۷۲
۲۹۰. ملاحظه‌های کلی و تعریف‌ها ۸۷۲
۲۹۱. تبدیل‌های کمکی ۸۷۴
۲۹۲. تبدیل به‌شکل متعارف ۸۷۷
۲۹۳. انتگرال‌های بیضوی نوع اول، دوم وسوم ۸۷۹

فصل نهم

انتگرال نامعین

§۱. تعریف وشرط‌های وجود انتگرال معین ۸۸۵
۲۹۴. دیدگاه دیگری دربارهٔ مساحت ۸۸۵
۲۹۵. تعریف ۸۸۷
۲۹۶. مجموع‌های داربو ۸۸۹
۲۹۷. شرط وجود انتگرال ۸۹۲
۲۹۸. طبقه‌های تابع‌های انتگرال‌پذیر ۸۹۴
۲۹۹. ویژگی تابع‌های انتگرال‌پذیر ۸۹۶
۳۰۰. مثال‌ها واضافه‌ها ۸۹۸
۳۰۱. انتگرال‌های پائینی وبالائی به‌عنوان حدها ۹۰۰
§۲. ویژگی‌های انتگرال‌های معین ۹۰۲
۳۰۲. انتگرال روی بازهٔ جهت‌دار ۹۰۲
۳۰۳. ویژگی‌هائی که با تساوی بیان می‌شوند ۹۰۴
۳۰۴. ویژگی‌هائی که با نابرابری بیان می‌شوند ۹۰۵
۳۰۵. انتگرال معین، به‌عنوان تابعی ازحد بالائی ۹۱۰

۳۰۶. قضیهٔ دوم مربوط به‌مقدار میانگین ۹۱۲
§۳. محاسبه وتبدیل انتگرال‌های معین ۹۱۵
۳۰۷. محاسبه به‌کمك مجموع‌های انتگرالی ۹۱۵
۳۰۸. رابطهٔ اصلی محاسبهٔ انتگرالی ۹۲۰
۳۰۹. مثال‌ها ۹۲۲
۳۱۰. نتیجه‌های دیگری ازرابطهٔ اصلی ۹۲۶
۳۱۱. رابطه‌های تبدیل ۹۲۷
۳۱۲. مثال‌ها ۹۲۸
۳۱۳. رابطهٔ تغییرمتغیر درانتگرال‌های معین ۹۳۳
۳۱۴. مثال‌ها ۹۳۴
۳۱۵. رابطهٔ گوس. تبدیل‌لاندن ۹۴۲
۳۱۶. نتیجهٔ دیگری ازرابطهٔ تغییرمتغیر ۹۴۶
§۴. بعضی‌کاربردهای انتگرال معین ۹۴۸
۳۱۷. رابطهٔ والیس ۹۴۸
۳۱۸. رابطهٔ تیلور با جملهٔ متمم ۹۴۹
۳۱۹. متعالی (غیرجبری) بودن عدد e ۹۵۰
۳۲۰. چندجمله‌ای‌های لژاندر ۹۵۳
۳۲۱. نابرابری انتگرالی ۹۵۷
§۵. محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌ها ۹۶۰
۳۲۲. طرح مسأله. رابطه‌های مستطیل‌ها و ذوزنقه‌ها ۹۶۰
۳۲۳. واسطه‌یابی پارابولیك (سهمی‌وار) ۹۶۳
۳۲۴. خردکردن بازهٔ انتگرال‌گیری ۹۶۶
۳۲۵. جملهٔ متمم رابطهٔ مستطیل‌ها ۹۶۸
۳۲۶. جملهٔ متمم رابطهٔ ذوزنقه‌ها ۹۷۰
۳۲۷. جملهٔ متمم رابطهٔ سیمپسون ۹۷۱
۳۲۸. مثال‌ها ۹۷۴

فصل دهم
کاربرد محاسبهٔ انتگرالی در هندسه، مکانیك و فیزیك

§۱. طول منحنی ۹۸۲
۳۲۹. محاسبهٔ طول منحنی ۹۸۲
۳۳۰. تعریف دیگری برای طول منحنی وروش دیگری برای محاسبهٔ‌آن ۹۸۴
۳۳۱. مثال‌ها ۹۸۸
۳۳۲. معادلهٔ طبیعی منحنی مسطح ۹۹۶
۳۳۳. مثال‌ها ۱۰۰۰

§۲. مساحت‌ها وحجم‌ها ۱۰۰۴
۳۳۵. تعریف مفهوم مساحت. خاصیت جمعی ۱۰۰۴
۳۳۶. مساحت، به‌عنوان حد ۱۰۰۷
۳۳۷. طبقه حوزه‌های تربیع‌پذیر ۱۰۰۹
۳۳۸. بیان مساحت‌ها، به‌کمك انتگرال ۱۰۱۲
۳۳۹. مثال‌ها ۱۰۱۴
۳۴۰. تعریف مفهوم حجم، ویژگی‌های آن ۱۰۲۴
۳۴۱. طبقهٔ جسم‌های دارای حجم ۱۰۲۵
۳۴۲. بیان حجم‌ها، با انتگرال‌ها ۱۰۲۷
۳۴۳. مثال‌ها ۱۰۳۱
۳۴۴. مساحت سطح دوار ۱۰۳۹
۳۴۵. مثال‌ها ۱۰۴۲
۳۴۶. مساحت سطح استوانه‌ای ۱۰۴۵
۳۴۷. مثال‌ها ۱۰۴۷
§۳. محاسبه کمیت‌های مکانیکی وفیزیکی ۱۰۵۱
۳۴۸. طرح کاربرد انتگرال معین ۱۰۵۱
۳۴۹. پیدا کردن گشتاور ایستائی (ممان استاتیك) ومرکز ثقل (گرانیگاه) منحنی ۱۰۵۴
۳۵۰. مثال‌ها ۱۰۵۷
۳۵۱. پیدا کردن گشتاور ایستائی و گرانیگاه شکل مستوی ۱۰۵۸
۳۵۲. مثال‌ها ۱۰۶۱
۳۵۳. کار مکانیکی ۱۰۶۳
۳۵۴. مثال‌ها ۱۰۶۴
۳۵۵. کار نیروی اصطکاك در پاشنهٔ مسطح ۱۰۶۷
۳۵۶. مسأله‌های مربوط به‌جمع کردن جزءهای بی‌نهایت کوچك ۱۰۷۰
§۴. معادله‌های دیفرانسیلی ساده ۱۰۷۷
۳۵۷. مفهوم‌های اساسی. معادله‌های مرتبهٔ اول ۱۰۷۷
۳۵۸. معادلهٔ درجهٔ اول نسبت به‌مشتق. جدا کردن متغیرها ۱۰۷۹
۳۵۹. مسأله‌ها ۱۰۸۳
۳۶۰. یادداشتی دربارهٔ تشکیل معادله‌های دیفرانسیلی ۱۰۹۱
۳۶۱. مسأله‌ها ۱۰۹۲

فصل یازدهم
رشته‌های نامتناهی با جمله‌های ثابت

§۱. مقدمه ۱۰۹۸

۳۶۲. مفهوم‌های اساسی ۱۰۹۸
۳۶۳. مثال‌ها ۱۰۹۹
۳۶۴. قضیه‌های اساسی ۱۱۰۲
§۲. تقارب رشته‌های مثبت ۱۱۰۴
۳۶۵. شرط تقارب رشته‌های مثبت ۱۱۰۴
۳۶۶. قضیه‌های مربوط به‌مقایسهٔ رشته‌ها ۱۱۰۷
۳۶۷. مثال‌ها ۱۱۰۹
۳۶۸. معیارهای کوشی ودالامبر ۱۱۱۴
۳۶۹. معیار راآب ۱۱۱۷
۳۷۰. مثال‌ها ۱۱۱۹
۳۷۱. معیار کومر ۱۱۲۳
۳۷۲. معیار گوس ۱۱۲۶
۳۷۳. معیار انتگرالی ماکلورن ـ کوشی ۱۱۲۸
۳۷۴. معیار یرماکوف ۱۱۳۳
۳۷۵. ضمیمه وتکمیل ۱۱۳۷
§۳. تقارب رشته‌های غیرمشخص ۱۱۴۴
۳۷۶. شرط عمومی تقارب رشته ۱۱۴۴
۳۷۷. تقارب مطلق ۱۱۴۵
۳۷۸. مثال‌ها ۱۱۴۸
۳۷۹. رشتهٔ توانی. بازهٔ تقارب آن ۱۱۴۹
۳۸۰. بیان شعاع تقارب، برحسب ضریب‌ها ۱۱۵۲
۳۸۱. رشته‌های متناوب ۱۱۵۴
۳۸۲. مثال‌ها ۱۱۵۶
۳۸۳. تبدیل آبل ۱۱۵۹
۳۸۴. معیارهای آبل ودیریکله ۱۱۶۱
۳۸۵. مثال‌ها ۱۱۶۲
§۴. ویژگی‌های رشته‌های متقارب ۱۱۶۹
۳۸۶. ویژگی شرکت‌پذیری ۱۱۶۹
۳۸۷. ویژگی جابه‌جائی رشته‌های متقارب مطلق ۱۱۷۱
۳۸۸. حالت تقارب غیرمطلق رشته‌ها ۱۱۷۳
۳۸۹. ضرب رشته‌ها ۱۱۷۷
۳۹۰. مثال‌ها ۱۱۸۰
۳۹۱. قضیهٔ کلی درنظریهٔ حد ۱۱۸۳
۳۹۲. قضیه‌های بعدی مربوط به‌ضرب رشته‌ها ۱۱۸۷
§۵. رشته‌های دوگانه وتکراری ۱۱۹۰

۳۹۳. رشته‌های تکراری ۱۱۹۰
۳۹۴. رشتهٔ دوگانه ۱۱۹۳
۳۹۵. مثال‌ها ۱۱۹۹
۳۹۶. رشتهٔ توانی با دومتغیر؛ حوزهٔ تقارب ۱۲۱۰
۳۹۷. مثال‌ها ۱۲۱۳
۳۹۸. رشته‌های چندگانه ۱۲۱۴
§۶. حاصل‌ضرب‌های نامتناهی ۱۲۱۵
۳۹۹. مفهوم‌های اساسی ۱۲۱۵
۴۰۰. مثال‌ها ۱۲۱۶
۴۰۱. قضیه‌های اصلی. بستگی با رشته‌ها ۱۲۱۸
۴۰۲. مثال‌ها ۱۲۲۲
§۷. بسط تابع‌های مقدماتی ۱۲۳۲
۴۰۳. بسط تابع‌ها به‌رشته‌های توانی. رشتهٔ تیلور ۱۲۳۲
۴۰۴. بسط تابع‌های اصلی مثلثاتی وسایرتابع‌ها، به‌رشتهٔ توانی ۱۲۳۵
۴۰۵. رشته‌های لگاریتمی ۱۲۳۷
۴۰۶. دستور ستیرلینگ ۱۲۳۹
۴۰۷. رشتهٔ دوجمله‌ای ۱۲۴۲
۴۰۸. بسط سینوس و کسینوس به‌حاصل‌ضرب‌های نامتناهی ۱۲۴۵
§۸. محاسبه‌های تقریبی به‌کمك رشته‌ها ــ تبدیل رشته‌ها ۱۲۵۱
۴۰۹. یادداشت‌های کلی ۱۲۵۱
۴۱۰. محاسبهٔ عدد ۱۲۵۳
۴۱۱. محاسبهٔ لگاریتم‌ها ۱۲۵۵
۴۱۲. محاسبهٔ ریشه‌ها ۱۲۵۸
۴۱۳. تبدیل رشته‌ها با شیوهٔ اولر ۱۲۶۱
۴۱۴. مثال‌ها ۱۲۶۳
۴۱۵. تبدیل کومر ۱۲۶۷
۴۱۶. تبدیل مارکوف ۱۲۷۱
§۹. جمع کردن رشته‌های متباعد ۱۲۷۴
۴۱۷. مقدمه ۱۲۷۴
۴۱۸. روش رشته‌های توانی ۱۲۷۶
۴۱۹. قضیهٔ تاوبر ۱۲۷۹
۴۲۰. روش واسطه‌های حسابی ۱۲۸۲
۴۲۱. ارتباط متقابل بین روش‌های پواسون ــ آبل و چه‌زارو ۱۲۸۵
۴۲۲. قضیهٔ هاردی ــ لاندو ۱۲۸۷
۴۲۳. به‌کاربردن تعمیم جمع درضرب رشته‌ها ۱۲۹۰

۴۲۴. روش‌های دیگر جمع تعمیم‌یافتهٔ رشته‌ها ۱۲۹۲
۴۲۵. مثال‌ها ۱۲۹۹
۴۲۶. طبقه‌کلی روش خطی منتظم جمع‌کردن ۱۳۰۴

فصل دوازدهم
دنباله‌ها و رشته‌های تابعی

§۱. تقارب یکنواخت ۱۳۰۸
۴۲۷. ملاحظه‌های مقدماتی ۱۳۰۸
۴۲۸. تقارب یکنواخت و تقارب غیریکنواخت ۱۳۱۰
۴۲۹. شرط‌های تقارب یکنواخت ۱۳۱۶
۴۳۰. معیارهای تقارب یکنواخت رشته‌ها ۱۳۱۸
§۲. ویژگی‌های تابعی مجموع رشته‌ها ۱۳۲۱
۴۳۱. پیوستگی مجموع رشته ۱۳۲۱
۴۳۲. ملاحظه‌هایی دربارهٔ تقارب شبه‌یکنواخت ۱۳۲۵
۴۳۳. عبور جمله‌به‌جمله به‌سمت حد ۱۳۲۷
۴۳۴. انتگرال‌گیری جمله‌به‌جملهٔ رشته‌ها ۱۳۲۹
۴۳۵. مشتق‌گیری جمله‌به‌جملهٔ رشته‌ها ۱۳۳۲
۴۳۶. دیدگاه دنباله‌ها ۱۳۳۶
۴۳۷. پیوستگی مجموع رشتهٔ توانی ۱۳۳۸
۴۳۸. انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری رشته‌های توانی ۱۳۴۲
§۳. کاربردها ۱۳۴۶
۴۳۹. مثال‌هائی دربارهٔ پیوستگی مجموع رشته‌ها و دربارهٔ گذر جمله‌به‌جمله به‌حد ۱۳۴۶
۴۴۰. مثال‌های انتگرال‌گیری جمله‌به‌جملهٔ رشته‌ها ۱۳۵۵
۴۴۱. مثال‌هائی از مشتق‌گیری جمله‌به‌جملهٔ رشته‌ها ۱۳۶۹
۴۴۲. روش تقریب‌های متوالی در نظریهٔ تابع‌های ضمنی ۱۳۷۷
۴۴۳. تعریف تحلیلی تابع‌های مثلثاتی ۱۳۸۱
۴۴۴. مثال تابع پیوستهٔ بدون مشتق ۱۳۸۵
§۴. آگاهی‌های تکمیلی دربارهٔ رشته‌های توانی ۱۳۸۸
۴۴۵. عمل روی رشته‌های توانی ۱۳۸۸
۴۴۶. جایگذاری رشته در رشته ۱۳۹۲
۴۴۷. مثال‌ها ۱۳۹۵
۴۴۸. تقسیم رشته‌های توانی ۱۴۰۱
۴۴۹. عددهای برنولی و بسط‌هائی که در آن‌ها، با این عددها برخورد می‌کنیم ۱۴۰۵
۴۵۰. حل معادله به‌کمک رشته ۱۴۱۱

۴۵۱. عکس رشتهٔ توانی ۱۴۱۵
۴۵۲. رشتهٔ لاگرانژ ۱۴۱۸
§۵. تابع‌های مقدماتی با متغیر مختلط ۱۴۲۴
۴۵۳. عددهای مختلط ۱۴۲۴
۴۵۴. واریانت مختلط و حد آن ۱۴۲۷
۴۵۵. تابع‌های با متغیر مختلط ۱۴۳۰
۴۵۶. رشته‌های توانی ۱۴۳۳
۴۵۷. تابع‌های نمایی ۱۴۳۷
۴۵۸. تابع لگاریتمی ۱۴۴۰
۴۵۹. تابع‌های مثلثاتی و تابع‌های معکوس آن‌ها ۱۴۴۴
۴۶۰. تابع‌های توانی ۱۴۴۹
۴۶۱. مثال‌ها ۱۴۵۰
§۶. رشته‌های دورزن و رشته‌های مجانبی ـ دستور اولر ـ ماکلورن ۱۴۵۷
۴۶۲. مثال‌ها ۱۴۵۷
۴۶۳. تعریف‌ها ۱۴۶۰
۴۶۴. ویژگی‌های بنیادی بسط‌های مجانبی ۱۴۶۴
۴۶۵. نتیجه‌گیری رابطهٔ اولر ـ ماکلورن ۱۴۶۹
۴۶۶. بررسی جملهٔ متمم ۱۴۷۲
۴۶۷. مثال‌های محاسبه، به‌کمك دستور اولر ـ ماکلورن ۱۴۷۵
۴۶۸. صورت دیگری از دستور اولر ـ ماکلورن ۱۴۸۰
۴۶۹. دستور و رشتهٔ ستیرلینگ ۱۴۸۳

فصل سیزدهم
انتگرال‌های ناویژه

§۱. انتگرال‌های ناویژه، با حدهای بی‌نهایت ۱۴۸۷
۴۷۰. تعریف انتگرال با حد بی‌نهایت ۱۴۸۷
۴۷۱. استفاده از دستور اصلی محاسبهٔ انتگرالی ۱۴۸۹
۴۷۲. مثال‌ها ۱۴۹۰
۴۷۳. شباهت با رشته‌ها. قضیه‌های ساده ۱۴۹۴
۴۷۴. تقارب انتگرال در حالت تابع مثبت ۱۴۹۶
۴۷۵. تقارب انتگرال در حالت کلی ۱۴۹۸
۴۷۶. معیارهای آبل و دیریکله ۱۵۰۱
۴۷۷. تبدیل انتگرال ناویژه به‌رشتهٔ نامتناهی ۱۵۰۴
۴۷۸. مثال‌ها ۱۵۰۷
§۲. انتگرال ناویژه از تابع بی‌کران ۱۵۱۸

۴۷۹. تعریف انتگرال تابع بی‌کران ۱۵۱۸
۴۸۰. یادداشتی دربارهٔ نقطه‌های خاص ۱۵۲۲
۴۸۱. به‌کاربردن دستور اصلی محاسبهٔ انتگرالی. مثال‌ها ۱۵۲۳
۴۸۲. شرط‌ها و معیارهای وجود انتگرال ۱۵۲۵
۴۸۳. مثال‌ها ۱۵۲۹
۴۸۴. مقدار اصلی انتگرال‌های ناویژه ۱۵۳۴
۴۸۵. یادداشتی دربارهٔ مقدار تعمیم‌یافتهٔ انتگرال‌های متباعد ۱۵۴۰
§۳. ویژگی‌های انتگرال‌های ناویژه و تبدیل آن‌ها ۱۵۴۲
۴۸۶. ویژگی‌های ساده ۱۵۴۲
۴۸۷. قضیه‌های مربوط به‌مقدارهای میانگین ۱۵۴۵
۴۸۸. انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء در حالت انتگرال‌های ناویژه ۱۵۴۷
۴۸۹. مثال‌ها ۱۵۴۸
۴۹۰. تغییر متغیر در انتگرال‌های ناویژه ۱۵۵۱
۴۹۱. مثال‌ها ۱۵۵۲
§۴. روش‌های خاص محاسبهٔ انتگرال‌های ناویژه ۱۵۵۹
۴۹۲. بعضی از انتگرال‌های مهم ۱۵۵۹
۴۹۳. محاسبهٔ انتگرال‌های ناویژه، به‌کمک مجموع‌های انتگرالی. حالت انتگرال‌های با مرزهای متناهی ۱۵۶۳
۴۹۴. حالت انتگرال‌های با مرزهای بی‌نهایت ۱۵۶۶
۴۹۵. انتگرال‌های فرولانی ۱۵۷۰
۴۹۶. انتگرال‌های تابع‌های گویا بین مرزهای بی‌نهایت ۱۵۷۳
۴۹۷. مثال‌ها و تمرین‌های مختلف ۱۵۷۹
§۵. محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های ناویژه ۱۵۹۶
۴۹۸. انتگرال‌های با حدهای متناهی؛ جداکردن خصوصیت‌ها ۱۵۹۶
۴۹۹. مثال‌ها ۱۵۹۷
۵۰۰. ملاحظه‌هایی دربارهٔ محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های ویژه ۱۶۰۳
۵۰۱. محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های ناویژه با مرزهای بی‌نهایت ۱۶۰۴
۵۰۲. استفاده از بسط مجانبی ۱۶۰۸

فصل چهاردهم
انتگرال‌های وابسته به‌پارامتر

§۱. نظریه‌های مقدماتی ۱۶۱۴
۵۰۳. طرح مسأله ۱۶۱۴
۵۰۴. میل یکنواخت به‌سمت تابع حدی ۱۶۱۵
۵۰۵. جابه‌جائی دو عبور حدی ۱۶۱۸

۵۰۶. عبور حدی زیر علامت انتگرال ۱۶۲۰
۵۰۷. مشتق‌گیری زیر علامت انتگرال ۱۶۲۲
۵۰۸. انتگرال‌گیری زیر علامت انتگرال ۱۶۲۵
۵۰۹. حالتی که مرزهای انتگرال، وابسته به پارامتر هستند ۱۶۲۷
۵۱۰. ورود ضریبی که تنها به x بستگی دارد ۱۶۳۰
۵۱۱. مثال‌ها ۱۶۳۲
۵۱۲. اثبات گوس از قضیهٔ بنیادی جبر ۱۶۴۵
§۲. تقارب یکنواخت انتگرال‌ها ۱۶۴۸
۵۱۳. تعریف تقارب یکنواخت انتگرال‌ها ۱۶۴۸
۵۱۴. شرط تقارب یکنواخت، بستگی با رشته‌ها ۱۶۵۰
۵۱۵. معیارهای کافی برای تقارب یکنواخت ۱۶۵۰
۵۱۶. حالت دیگر تقارب یکنواخت ۱۶۵۳
۵۱۷. مثال‌ها ۱۶۵۶
§۳. استفاده از تقارب یکنواخت انتگرال‌ها ۱۶۶۳
۵۱۸. انتقال حد به‌زیر علامت انتگرال ۱۶۶۳
۵۱۹. مثال‌ها ۱۶۶۵
۵۲۰. پیوستگی و مشتق‌پذیری انتگرال‌ها نسبت به پارامتر ۱۶۸۲
۵۲۱. انتگرال‌گیری انتگرال‌ها نسبت به پارامتر ۱۶۸۶
۵۲۲. کاربرد در محاسبهٔ بعضی انتگرال‌ها ۱۶۸۹
۵۲۳. مثال‌هایی برای مشتق‌گیری زیر علامت انتگرال ۱۶۹۶
۵۲۴. مثال‌هایی برای انتگرال‌گیری زیر علامت انتگرال ۱۷۰۹
§۴. متمم ۱۷۲۲
۵۲۵. پیش‌قضیهٔ آرتسه‌لا ۱۷۲۲
۵۲۶. گذر حدی زیر علامت انتگرال ۱۷۲۵
۵۲۷. مشتق‌گیری زیر علامت انتگرال ۱۷۲۹
۵۲۸. انتگرال‌گیری زیر علامت انتگرال ۱۷۳۰
§۵. انتگرال‌های اولر ۱۷۳۲
۵۲۹. انتگرال اولر نوع اول ۱۷۳۲
۵۳۰. انتگرال اولر نوع دوم ۱۷۳۴
۵۳۱. ویژگی‌های سادهٔ تابع Γ ۱۷۳۶
۵۳۲. تعریف یک‌ارزشی تابع Γ به‌کمک ویژگی‌های آن ۱۷۴۳
۵۳۳. خصلت‌های تابعی دیگر تابع Γ ۱۷۴۶
۵۳۴. مثال‌ها ۱۷۴۹
۵۳۵. مشتق لگاریتمی تابع Γ ۱۷۵۷

۵۳۶. قضیهٔ ضرب برای تابع Γ ۱۷۵۹
۵۳۷. بعضی رشته‌ها و ضرب‌ها ۱۷۶۱
۵۳۸. مثال‌ها و یادداشت‌های اضافی ۱۷۶۳
۵۳۹. محاسبهٔ بعضی انتگرال‌های معین ۱۷۷۲
۵۴۰. دستور ستیرلینگ ۱۷۸۲
۵۴۱. محاسبهٔ ثابت اولر ۱۷۸۷
۵۴۲. تشکیل جدول لگاریتم‌های دهدهی تابع Γ ۱۷۸۸

MATH75.IR

فصل هشتم

تابع اولیه (انتگرال نامعین)

§۱. انتگرال نامعین و مثال‌های سادهٔ محاسبهٔ آن

۲۶۳. مفهوم تابع اولیه (و انتگرال نامعین). در بسیاری موردها، برای حل مسأله‌هایی از دانش و صنعت، به جای این که محاسبهٔ مشتق از روی تابع مفروض، لازم باشد، باید برعکس، خود تابع را، به کمك مشتق معلوم آن، پیدا کرد. در ۹۱، با معلوم فرض کردن معادلهٔ حرکت $s=s(t)$، یعنی قانون تغییر مسافت در طول زمان، توانستیم، از راه مشتق گیری، ابتدا سرعت $v=\frac{ds}{dt}$ و، سپس، شتاب $a=\frac{dv}{dt}$ را پیدا کنیم. در عمل، اغلب به مسألهٔ عکس هم برخورد می‌کنیم: شتاب a، مانند تابعی از زمان t داده شده است. $a=a(t)$، و لازم است که سرعت v و مسافت پیموده شدهٔ s را، به عنوان تابعی از t به دست آوریم. به این ترتیب، نیاز داریم که با مفروض بودن تابع $a=a(t)$، تابع $u=v(t)$ را پیدا کنیم، که a مشتق آن باشد. وسپس، با در دست داشتن تابع v، تابع $s=s(t)$ را، به نحوی پیدا کنیم، که a مشتق آن باشد.

تعریف زیر را می‌آوریم.

تابع $F(x)$ را، در بازهٔ مفروض، تابع اولیهٔ تابع $f(x)$، یا انتگرال $f(x)$ می‌نامند، اگر در این بازه، $f(x)$ مشتق تابع $F(x)$ باشد و یا، هم ارز آن، $f(x)dx$ دیفرانسیل $F(x)$ باشد.

$$F'(x)=f(x) \quad \text{یا} \quad dF(x)=f(x)dx^*$$

تعیین همهٔ تابع‌های اولیهٔ یك تابع را، انتگرال گیری آن می‌نامند و یکی از مسأله‌های محاسبهٔ انتگرالی را تشکیل می‌دهد. همان‌طور که می‌بینیم، این مسأله، عکس مسألهٔ اساسی

---

*) در این حالت، همچنین می‌توان گفت که، تابع $F(x)$، تابع اولیه (یا انتگرال) عبارت دیفرانسیلی $f(x)dx$ است.

محاسبهٔ دیفرانسیلی است.

قضیه. اگر در یك بازهٔ $\mathfrak{D}$ (متناهی یا نامتناهی، بسته یا باز)، $F(x)$، تابع اولیهٔ تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه، تابع‌های $F(x)+C$ ــ که در آن، C عدد ثابت دلخواهی است ــ نیز تابع‌های اولیهٔ همان تابع خواهند بود. برعکس، هر تابع اولیه برای $f(x)$، در بازهٔ $\mathfrak{D}$، می‌تواند به‌این‌صورت درآید.

اثبات. این کیفیت که، به‌موازات $F(x)$، $F(x)+C$ هم، تابع اولیه‌ای از $f(x)$ باشد، کاملاً روشن است، زیرا $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$.

حال فرض کنیم $\Phi(x)$، تابع اولیهٔ دلخواهی از تابع $f(x)$ باشد، به نحوی که، در بازهٔ $\mathfrak{D}$، داشته باشیم:

$$\Phi'(x)=f(x)$$

چون تابع‌های $F(x)$ و $\Phi(x)$، در بازهٔ مفروض، دارای یك مشتق هستند، روشن است که، درآن‌صورت، تفاضل آن‌ها مقداری است ثابت [**۱۳۱**، نتیجه]:

$$\Phi(x)=F(x)+C$$

از این قضیه، نتیجه می‌شود که، برای تابع $f(x)$، کافی است تنها یك تابع اولیهٔ $F(x)$ را پیدا کنیم، تا همهٔ تابع‌های اولیه را در اختیار داشته باشیم، چرا که اختلاف آن‌ها، با یکدیگر، تنها در مقداری ثابت است.

به‌این ترتیب: عبارت $F(x)+C$، که در آن، C ثابت دلخواهی است، صورت‌کلی تابع‌هایی می‌شودکه دارای مشتق $f(x)$ یادیفرانسیل $f(x)dx$ می‌باشند. این‌عبارت را، انتگرال نامعین $f(x)$ گویند و این‌طور، نشان می‌دهند:

$$\int f(x)dx$$

که به‌طور ضمنی، شامل مقدار ثابت دلخواه می‌باشد. حاصل‌ضرب $f(x)dx$، به‌عبارت زیر انتگرال‌گیری، و تابع $f(x)$، به‌تابع زیر انتگرال‌گیری، موسوم است.

مثال. فرض کنید $f(x)=x^2$. بدون هیچ زحمتی، انتگرال نامعین این تابع‌محاسبه می‌شود:

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$$

و درستی آن‌را، می‌توان با عمل دیفرانسیل‌گیری، به‌سادگی، تحقیق کرد.

توجه خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم که، زیر علامت «انتگرال» $\int$، دیفرانسیل تابع اولیهٔ مطلوب را می‌نویسند و نه مشتق آن‌را (در مثال ما، x^2dx را و نه x^2 را). این شیوهٔ نوشتن، که بعداً [۲۹۴] روشن‌تر خواهد شد، سرگذشتی تاریخی دارد، که متضمن برتری‌هایی است و حفظ آن، کاملا مفید است.

از تعریف انتگرال نامعین، این ویژگی‌ها، مستقیماً، نتیجه می‌شود:

۱. $$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

یعنی، علامت‌های d و $\int$، وقتی اولی جلو دومی قرار گیرد، یکدیگر را حذف می‌کنند.

۲. چون $F(x)$، تابع اولیه‌ای از $F'(x)$ است، داریم:

$$\int F'(x)dx = F(x)+C$$

که می‌تواند این‌طور نوشته شود:

$$\int dF(x) = F(x)+C$$

ازاین‌جا می‌بینیم که‌علامت‌های d و $\int$، که جلو $F(x)$ قرار بگیرند، وقتی ساده می‌شوند، که d بعد از $\int$ واقع شده باشد. ولی تنها باید به $F(x)$، ثابت دلخواه را افزود.

اگر به‌همان مسألهٔ مکانیك، که در ابتدا طرح کردیم، برگردیم، می‌توانستیم بنویسیم:

$$v = \int a(t)dt$$

و

$$s = \int v(t)dt$$

برای مشخص‌بودن وضع، فرض می‌کنیم که با حرکت متشابه، سروکار داشته باشیم، مثلاً تحت اثر نیروی ثقل، در این‌صورت $a = g$ (به‌شرطی که جهت مثبت روی قائم را به‌طرف پایین در نظر بگیریم) و به‌سادگی دیده می‌شود:

$$v = \int gdt = gt+C$$

می‌بینیم که در عبارت سرعت v، علاوه بر زمان t، مقدار نامشخص C هم به‌دست می‌آید. در یك لحظهٔ معین، مقدارهای مختلفی (به‌ازای مقدارهای مختلف C)، برای v به‌دست می‌آید؛ یعنی، با آن‌چه در اختیار داریم، نمی‌توانیم مسأله را، به‌طور کامل، حل کنیم. برای این‌که بتوانیم، جواب مسأله را، به‌طور مشخص و کامل به‌دست آوریم، کافی است، مقدار سرعت را، در یك لحظهٔ زمانی بدانیم. مثلاً، فرض کنیم، برای ما معلوم باشد که، در لحظهٔ $t=t_0$، مقدار سرعت $v=v_0$ باشد. این مقدار را، در عبارت حاصل برای مشتق می‌گذاریم:

$$v_0=gt_0+C$$

و از آن‌جا

$$C=v_0-gt_0$$

و در نتیجه، جواب، به‌صورت کاملاً مشخصی درمی‌آید:

$$v=g(t-t_0)+v_0$$

حالا، به‌محاسبهٔ مسافت s می‌پردازیم:

$$s=\int[g(t-t_0)+v_0]dt=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+C'$$

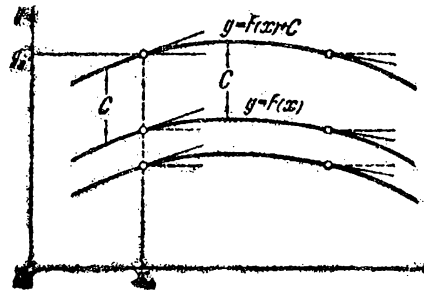
(با دیفرانسیل‌گیری، به‌سادگی تحقیق می‌شود، که تابع اولیه، می‌تواند به‌چنین صورتی درآید). مقدار ثابت جدید C' را ــ که نامعلوم است ــ می‌توان، مثلاً، با این فرض، تعیین کرد که به‌ازای $t=t_0$ داشته باشیم: $s=s_0$ با این فرض به‌دست می‌آید: $C'=s_0$ و جواب نهائی، به‌این صورت، در می‌آید:

$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0$$

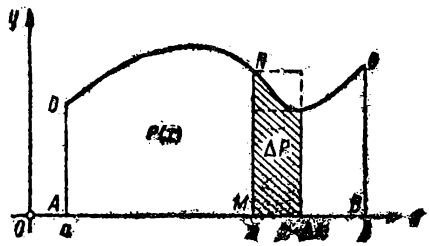
مقدارهای t_0، v_0 و s_0 را، مقدارهای اولیهٔ t، v و s می‌نامند.

می‌دانیم که مشتق تابع $y=F(x)$، عبارت است از ضریب زاویهٔ مماس، برمنحنی نظیر. بنابراین، مسأله تعیین تابع اولیهٔ $F(x)$، به‌ازای تابع مفروض $f(x)$، را می‌توان این‌طور تعبیر کرد: می‌خواهیم منحنی $y=F(x)$ را طوری پیدا کنیم که، قانون تغییر ضریب زاویهٔ مماس برآن، چنین باشد:

$$tg\alpha=f(x)$$



شکل ۱



شکل ۲

اگر $y=F(x)$، یکی از این منحنی‌ها باشد، می‌توان همهٔ منحنی‌های دیگر را، با انتقال آن (به اندازهٔ پاره‌خط نامشخص C)، موازی محور y، به‌دست آورد (شکل ۱). برای آن‌که، منحنی خاصی را، از این مجموعهٔ منحنی‌ها، جدا کنیم، کافی است، مثلاً، نقطهٔ (x_0, y_0) را، که منحنی از آن می‌گذرد، در اختیار داشته باشیم. که، در نتیجه، $y_0=F(x_0)+C$ و $C=y_0-F(x_0)$.

۲۶۴. انتگرال و مسألهٔ تعیین مساحت. تعبیر تابع اولیه، به عنوان مساحت شکل منحنی‌الخط، اهمیت زیادی دارد، زیرا، مفهوم تاریخی تابع اولیه، بامسألهٔ تعیین‌مساحت، ارتباطی تنگاتنگ دارد. به همین مناسبت، در همین‌جا به‌این مسأله می‌پردازیم (البته، در این‌جا، از تصور شهودی مساحت شکل‌های مستوی استفاده می‌کنیم و طرح دقیق مطلب‌را، به‌فصل دهم، موکول می‌کنیم).

تابع $y=f(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$، پیوسته می‌گیریم و فرض می‌کنیم که، تنها مقدارهای مثبت (غیرمنفی) را اختیار کند. شکل $ABCD$ (شکل ۲)، محدود به‌منحنی $y=f(x)$ و عرض‌های $x=a$ و $x=b$ و پاره‌ای از محور x را، در نظر می‌گیریم. شکل‌هایی از این نوع را، ذوزنقهٔ منحنی‌الخط خواهیم نامید. اگر بخواهیم مقدار P، مساحت این شکل را پیدا کنیم، رفتارشکل‌متغیر $AMND$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم، که محصوراست بین‌عرض اولیهٔ $x=a$ وعرض نظیر طول غیرمشخص x از بازه $[a, b]$، با تغییر x، مساحت اخیرهم تغییر می‌کند و، ضمناً، هرمقدار معین x، متناظر است بامقدار کاملاً مشخصی از این مساحت؛ به‌نحوی که مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط $AMND$، تابعی از x می‌شود: آن‌را با $P(x)$، نشان می‌دهیم.

ابتدا، مشتق این تابع را پیدا می‌کنیم. برای این‌منظور، به x، نمو (مثلاً مثبت) Δx رامی‌دهیم؛ برای $P(x)$ هم، نمو ΔP پیدا می‌شود.

کوچکترین و بزرگترین مقدار تابع $f(x)$ را، در بازهٔ $[x, x+\Delta x]$، به‌ترتیب، m و M می‌گیریم [۸۵] ومساحت ΔP را، بامساحت مستطیل‌های به‌قاعدهٔ Δx وارتفاع‌های m و M مقایسه می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$m\cdot\Delta x<\Delta P<M\cdot\Delta x$$

از آن‌جا

$$m<\frac{\Delta P}{\Delta x}<M$$

اگر $\Delta x\to 0$، بنا بر پیوستگی، مقدارهای m و M به‌سمت $f(x)$ میل می‌کنند. دراین‌صورت، خواهیم داشت:

$$P'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x}=f(x)$$

به‌این ترتیب، به‌قضیهٔ معروفی می‌رسیم، که‌آن‌را، معمولاً*، قضیهٔ نیوتون ولایب‌نیتس می‌نامند: مشتق مساحت متغیر $P(x)$، نسبت به‌طول انتهایی x، برابر است باعرض انتهایی $y=f(x)$.

به‌زبان دیگر، مساحت متغیر $P(x)$، عبارت است از تابع اولیه‌ای از تابع مفروض $y=f(x)$. این‌تابع اولیه را، از بین سایر تابع‌های اولیه، با این‌نشانی می‌توان جداکرد که باید، به‌ازای $x=a$، برابر صفر شود. بنابراین، اگر یکی ازتابع‌های اولیهٔ $F(x)$، از تابع $f(x)$، معلوم باشد، بنابر قضیهٔ شمارهٔ پیش داریم:

$$P(x)=F(x)+C$$

و با شرطی که در اختیار داریم، می‌توانیم مقدار ثابت C را، با فرض $x=a$، به‌سادگی پیدا کنیم:

$$0=F(a)+C\Rightarrow C=-F(a)$$

و سرانجام

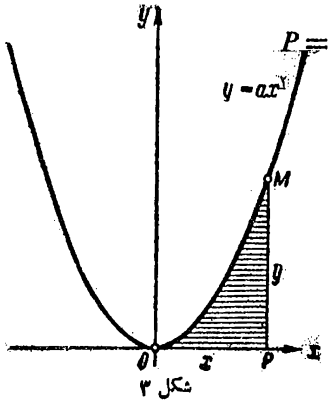
$$P(x)=F(x)-F(a)$$

---

*) در واقع، این‌گزاره را ــ اگرچه به‌شکلی دیگر ــ باروی (Is. Barrow)، معلم نیوتون، آورده است.

به‌ویژه، برای به‌دست آوردن مساحت P تمامی ذوزنقهٔ منحنی‌الخط $ABCD$، باید $x=b$ در نظر گرفت:

$$P=F(b)-F(a)$$



شکل ۳

به عنوان مثال، مساحت $P(x)$، شکل محصور به سهمی $y=ax^2$، عرض نظیر طول‌مفروض x و پاره‌خط محور x را پیدا می‌کنیم (شکل ۳). چون سهمی‌ازمبداء مختصات‌می‌گذرد، بنابراین، نخستین مقدار x، در این‌جا، برابراست‌با ۰. برای‌تابع $f(x)=ax^2$، به‌سادگی، تابع اولیهٔ $F(x)=\frac{ax^3}{3}$ به‌دست می‌آید. این تابع به‌ازای $x=0$، برابرصفر می‌شود و بنابراین

$$P(x)=F(x)=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}$$

[با ۳۲، ۴) مقایسه کنید].

باتوجه به‌رابطه‌ای‌که بین محاسبهٔ انتگرالی و پیداکردن مساحت شکل‌های مستوی، یعنی تربیع آن‌ها، وجود دارد، در بعضی مواردها، بنابر عادت، محاسبهٔ انتگرالی را تربیع می‌نامند.

برای این که، همهٔ این مطلب‌ها را، به‌حالتی که تابع می‌تواند مقدارهای منفی را اختیارکند، تعمیم‌دهیم، کافی است قراربگذاریم‌که، مساحت قسمتی ازشکل، که زیرمحور x قرارگرفته است، باید منفی به‌حساب آید.

به‌این ترتیب، تابع پیوسته $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، به‌هر صورتی داده شده باشد، همیشه می‌توان تابع اولیهٔ آن‌را، به‌صورت‌مساحت متغیرشکل‌محدود به‌منحنی تابع‌مفروض، تصورکرد. ولی روشن است‌که این تعبیر هندسی را، نمی‌توان به‌عنوان اثبات وجود تابع اولیه به‌حساب آورد، چرا که خود مفهوم مساحت را، هنوز پایه‌ریزی نکرده‌ایم.

در فصل بعد [۳۰۵]، این امکان را پیدا می‌کنیم تا اثبات دقیق و، ضمناً، تحلیلی خالص، از این واقعیت مهم را بدهیم‌که: هر تابع پیوستهٔ $f(x)$ در بازهٔ مفروض، در این بازه دارای تابع اولیه است. فعلاً، این حکم را می‌پذیریم.

در این فصل، تنها درباهٔ تابع‌های پیوسته، صحبت خواهیم کرد. اگر تابع به‌صورت مشخص داده شود و نقطه ناپیوستگی داشته باشد، آن را، در بازه‌های پیوستگی در نظر خواهیم گرفت. به‌این ترتیب، با قبول حکم بالا، ازضرورت قید وجود انتگرال، در هربار، آزاد می‌شویم: انتگرال‌هایی که مورد بررسی قرار می‌دهیم، همگی وجود دارند.

۲۶۵. جدول انتگرال‌های اساسی. هر رابطه‌ای از محاسبهٔ دیفرانسیلی، که مشتق تابع $F(x)$ را، به‌صورت $f(x)$، معرفی می‌کند، می‌توان، مستقیماً، رابطه‌ای برای محاسبهٔ انتگرالی به‌حساب آید:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

اگر رابطه‌های شمارهٔ ۹۵، که به‌کمک آن‌ها مشتق‌های تابع‌های مقدماتی را محاسبه کردیم و، همچنین، بعضی رابطه‌های بعدی (برای تابع‌های هذلولی) را، از نظر بگذرانیم، می‌توانیم جدول انتگرال‌های زیر را تشکیل دهیم:

۱۰. $\int 0\cdot dx = C$

۲۰. $\int 1\cdot dx = \int dx = x+C$

۳۰. $\int x^{\mu}\cdot dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq -1)$

۴۰. $\int \frac{1}{x}\cdot dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$

۵۰. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}tgx+C$

۶۰. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}sinx+C$

۷۰. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C; \quad \int e^x dx = e^x+C$

۸۰. $\int sinx\,dx = -cosx+C$

۹۰. $$\int \cos x dx = \sin x + C$$

۱۰۰. $$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g x + C$$

۱۱۰. $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

۱۲۰. $$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

۱۳۰. $$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

۱۴۰. $$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$$

۱۵۰. $$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$$

دربارهٔ رابطهٔ ۴، کمی توضیح می‌دهیم. این رابطه، در هر بازه‌ای که شامل صفر نباشد، به‌کار می‌رود. در واقع، اگر بازه در سمت راست صفر واقع باشد، چون داریم: $x > 0$، از رابطهٔ معلوم مشتق گیری $[\ln x]' = \frac{1}{x}$، مستقیماً نتیجه می‌شود:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

واگر بازه درسمت چپ صفر قرار گیرد: $x < 0$، در آن صورت، به سادگی به این جا منجر می‌شود که $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ و از آن جا

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$$

و این دو رابطه، در رابطهٔ ۴، با هم آمده‌اند.

وقتی که با قاعده‌های انتگرال‌گیری آشنا شویم، می‌توانیم، این جدول را، بازهم گسترش دهیم.

۲۶۶. قاعده‌های سادهٔ انتگرال‌گیری. I. اگر a مقداری ثابت باشد $(a\neq 0)$، آن‌گاه

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx$$

در واقع، با دیفرانسیل‌گیری از عبارت سمت راست، داریم [۱۰۵، I]:

$$d\left[a\cdot\int f(x)dx\right] = a\cdot d\left[\int f(x)dx\right] = a\cdot f(x)dx$$

به‌این ترتیب، ضریب ثابت را می‌توان از زیر علامت انتگرال بیرون آورد.

II. $$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

از عبارت سمت راست، دیفرانسیل می‌گیریم [۱۰۵، II].

$$d\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right] =$$

$$= d\int f(x)dx \pm d\int g(x)dx = [f(x)\pm g(x)]dx$$

بنابراین، انتگرال نامعین مجموع (تفاضل) دیفرانسیل‌ها، برابراست با مجموع (تفاضل) انتگرال‌های هرکدام از دیفرانسیل‌ها، به‌طور جداگانه.

یادداشت. دربارهٔ این‌دو رابطه، به‌نکتهٔ زیر توجه کنیم. در آن‌ها، انتگرال‌های نامعینی وارد می‌شوند که، هرکدام شامل جملهٔ ثابت غیرمشخصی است. آن‌چه ما به‌صورت برابری نوشته‌ایم، به‌معنای آن است که تفاضل بین قسمت‌های سمت راست و چپ، مقدار ثابتی است. البته، این برابری‌ها را جمله به جمله هم می‌توان در نظر گرفت، ولی در آن‌صورت، یکی از انتگرال‌ها، دیگر تابع اولیهٔ غیرمشخص نخواهد بود. و مقدار ثابت آن، بعد از انتخاب مقدارهای ثابت انتگرال‌های دیگر، معین می‌شود. این ملاحظهٔ مهم، بعدها به‌کار ما می‌آید.

III. اگر

$$\int f(t)dt = F(t)+C$$

آن‌گاه

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+C'$$

در واقع، رابطهٔ مفروض، هم ارز است با

$$\frac{d}{dt}F(t)=F'(t)=f(t)$$

ولی در آن‌صورت

$$\frac{d}{dx}F(ax+b)=F'(ax+b)\cdot a=a\cdot f(ax+b)$$

به‌نحوی که

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b)$$

یعنی $\frac{1}{a}F(ax+b)$، حقیقتاً، تابع اولیهٔ تابع $f(ax+b)$ است.

به‌ویژه، اغلب با حالتی برخورد می‌کنیم که، در آن، $a=1$ یا $b=0$ است:

$$\int f(x+b)dx=F(x+b)+C_1$$

$$\int f(ax)=\frac{1}{a}\cdot F(x)+C_1$$

[در عمل، قاعدهٔ III، حالت خاصی ازقاعدهٔ تغییر متغیر درانتگرال نامعین است، که‌دربارهٔ آن، بعداً، در **۲۶۸**، صحبت خواهیم کرد.]

۲۶۷. مثال‌ها. ۱) $\int(6x^2-3x+5)dx$

با استفاده از قاعده‌های II و I (و دستورهای ۳ و ۲) داریم:

$$\int(6x^2-3x+5)dx=\int 6x^2dx-\int 3xdx+\int 5dx=$$

$$=۶\int x^۲dx-۳\int xdx+۵\int dx=۲x^۳-\frac{۳}{۲}x^۲+۵x+C$$

۲) از چندجمله‌ای به‌صورت کلی هم، به‌سادگی، می‌توان انتگرال گرفت:

$$\int(a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}x+a_n)dx=$$

$$=a_۰\int x^ndx+a_۱\int x^{n-۱}dx+\cdots+a_{n-۱}\int xdx+a_n\int dx=$$

$$=\frac{a_۰}{n+۱}x^{n+۱}+\frac{a_۱}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-۱}}{۲}x^۲+a_nx+C \quad (II, I; ۳, ۲)$$

(۳ $$\int(۲x^۲+۱)^۳dx=\int(۸x^۶+۱۲x^۴+۶x^۲+۱)dx=$$

(مثال ۲) $$=\frac{۸}{۷}x^۷+\frac{۱۲}{۵}x^۵+۲x^۳+x+C$$

(۴ $$\int(۱+\sqrt{x})^۴dx=\int(۱+۴\sqrt{x}+۶x+۴x\sqrt{x}+x^۲)dx=$$

$$=\int dx+۴\int x^{\frac{۱}{۲}}dx+۶\int xdx+۴\int x^{\frac{۳}{۲}}dx+\int x^۲dx=$$

$$=x+\frac{۸}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+۳x^۲+\frac{۸}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}+\frac{۱}{۳}x^۳+C \quad (II, I; ۳, ۲)$$

(۵ $$\int\frac{(x+۱)(x^۲-۳)}{۳x^۲}dx=\int\frac{x^۳+x^۲-۳x-۳}{۳x^۲}dx=$$

$$=\int\left(\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲}\right)dx=\frac{۱}{۳}\int xdx+\frac{۱}{۳}\int dx-$$

$$-\int\frac{dx}{x}-\int x^{-۲}dx=\frac{۱}{۶}x^۲+\frac{۱}{۳}x-\ln x+\frac{۱}{x}+C \quad (II, I; ۳, ۲, ۴)$$

(۶ $$\int\frac{(x-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}{\sqrt[۳]{x}}dx=\int\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[۳]{x}}dx=$$

$$=\int x^{\frac{۷}{۶}}dx-\int x^{\frac{۱}{۶}}dx=\frac{۶}{۱۳}x^{\frac{۱۳}{۶}}-\frac{۶}{۷}x^{\frac{۷}{۶}}+C \quad (II;\ ۳)$$

چند مثال هم، از کاربرد قاعدهٔ III می‌آوریم:

(a) $$\int\frac{dx}{x-a}=\ln(x-a)+C \quad (III;\ ۴)$$ (۷

(b) $$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\int\underset{(k>۱)}{(x-a)^{-k}dx}=$$

$$=\frac{۱}{-k+۱}(x-a)^{-k+۱}+C=\frac{-۱}{(k-۱)(x-a)^{k-۱}}+C \quad (I;\ ۳)$$

(a) $$\int\underset{(m\neq۰)}{sinmxdx}=-\frac{۱}{m}cosmx+C \quad (I,\ II;\ ۸)$$ (۸

(b) $$\int cosmxdx=\frac{۱}{m}sinmx+C \quad (III;\ ۹)$$

(c) $$\int e^{-۳x}dx=-\frac{۱}{۳}e^{-۳x}+C \quad (III;\ ۷)$$

(a) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^۲-x^۲}}=\frac{۱}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{۱-\left(\frac{x}{a}\right)^۲}}=\underset{(a>۰)}{\arcsin\frac{x}{a}}+C \quad (III;\ ۶)$$ (۹

(b) $$\int\frac{dx}{a^۲+x^۲}=\frac{۱}{a^۲}\int\frac{dx}{۱+\left(\frac{x}{a}\right)^۲}=\frac{۱}{a}\arctg\frac{x}{a}+C \quad (III;\ ۵)$$

مثال‌هائی برای همهٔ قاعده‌ها:

$$\int\frac{(e^x-۱)(e^{۲x}+۱)}{e^x}dx=\int(e^{۲x}-e^x+۱-e^{-x})dx=$$ (۱۰

$$=\frac{۱}{۲}e^{۲x}-e^x+x+e^{-x}+C \quad (II,\ III;\ ۷,\ ۲)$$

$$\int\frac{ax+b}{cx+d}dx$$ (۱۱

با تقسیم صورت بر مخرج، کسر زیر انتگرال را، به‌این‌صورت، درمی‌آوریم:

$$\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}$$

که از آن‌جا، انتگرال مطلوب، به‌دست می‌آید:

$$\frac{a}{c}x+\frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d|+C \quad (II, I, III; 2, 4)$$

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x+1}dx=\int\left(2x-5+\frac{6}{x+1}\right)dx= \quad (12$$

$$=x^2-5x+6\ln|x+1|+C$$

برای انتگرال‌گیری از کسرهایی که مخرج مرکب دارند، غالباً، بهتر است با تجزیهٔ این کسرها، به‌مجموع کسرهایی که مخرج ساده‌تری دارند، عمل کنیم. مثلاً

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

در نتیجه [مثال ۷)، (a) را ببینید]:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (13$$

برای کسر به‌صورت کلی‌تر

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

هم، می‌توان از همین راه استفاده کرد. معلوم است که $(x+a)-(x+b)=a-b$، و بنابراین، اتحاد زیر را داریم:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right)$$

و به‌این ترتیب

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C \quad (14$$

(a) $$\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C \quad (15$$

(b) $$\int \frac{dx}{۴x^۲-۴x-۳}=\frac{۱}{۴}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{۱}{۲}\right)\left(x+\frac{۳}{۲}\right)}=\frac{۱}{۸}\ln\left|\frac{۲x-۱}{۲x+۳}\right|+C$$

(۱۶ $$\int \frac{dx}{Ax^۲+۲Bx+C} \qquad (B^۲-AC>۰).$$

مخرج، قابل تجزیه به‌عامل‌های حقیقی است: $A(x-\alpha)(x-\beta)$، که در آن

$$\alpha=\frac{-B+\sqrt{B^۲-AC}}{A}, \qquad \beta=\frac{-B-\sqrt{B^۲-AC}}{A}$$

در این‌صورت، شبیه مثال ۱۴) و با فرض $a=-\beta$ و $b=-\alpha$، نتیجه می‌گیریم:

$$\int \frac{dx}{Ax^۲+۲Bx+C}=\frac{۱}{۲\sqrt{B^۲-AC}}\ln\left|\frac{Ax+B-\sqrt{B^۲-AC}}{Ax+B+\sqrt{B^۲-AC}}\right|+C'$$

انتگرال بعضی از عبارت‌های مثلثاتی هم، بعد از تبدیل‌های مقدماتی، با روش‌های ساده‌ای، به‌دست می‌آید. مثلاً

$$\sin^۲ mx=\frac{۱-\cos ۲mx}{۲}, \qquad \cos^۲ mx=\frac{۱+\cos ۲mx}{۲}$$

و از آن‌جا

(a) $$\int \cos^۲ mx\,dx=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲m}\sin ۲mx+C \qquad (۱۷$$

$$(m\neq ۰)$$

(b) $$\int \sin^۲ mx\,dx=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲m}\sin ۲mx+C$$

به‌همین ترتیب، داریم:

$$\sin mx\cos nx=\frac{۱}{۲}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{۱}{۲}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{۱}{۲}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]$$

که با فرض $m\pm n\neq ۰$، انتگرال‌های زیر را به‌دست می‌آوریم:

(۱۸

$$(a)\qquad \int \sin mx\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x + C$$

$$(b)\qquad \int \cos mx\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x + C$$

$$(c)\qquad \int \sin mx\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)}\sin(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x + C$$

در پایان، به‌مثال‌های بغرنج‌تری می‌پردازیم:

(۱۹

$$(a)\qquad \int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

چون داریم:

$$\sin 2nx = \sum_{k=1}^{n}[\sin 2kx - \sin(2k-2)x] = 2\sin x \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$$

بنابراین، عبارت زیر انتگرال، به‌صورت $2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$ درمی‌آید و حاصل انتگرال مطلوب، چنین می‌شود:

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + C$$

و به‌همین ترتیب

$$(b)\qquad \int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = x + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2kx}{2k} + C$$

۲۶۸. انتگرال‌گیری با روش تغییر متغیر. یکی از نیرومندترین روش‌های انتگرال‌گیری تابع‌ها، روش تغییر متغیر یا تبدیل است. نکتهٔ سادهٔ زیر، پایهٔ این روش را

تشکیل می‌دهد.

اگر بدانیم

$$\int g(t)dt=G(t)+C$$

آن‌وقت

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx=G(\omega(x))+C$$

[همهٔ تابع‌های $g(t)$، $\omega(x)$ و $\omega'(x)$، پیوسته فرض می‌شوند.]

این مطلب، مستقیماً، از قاعدهٔ مشتق‌گیری تابع‌های مرکب، نتیجه می‌شود [۹۸]:

$$\frac{d}{dx}G(\omega(x))=G'(\omega(x))\omega'(x)=g(\omega(x))\omega'(x)$$

با توجه به‌این‌که $G'(t)=g(t)$، این مطلب را، به‌نحو دیگری هم می‌توان بیان کرد؛ به‌این ترتیب‌که رابطهٔ

$$dG(t)=g(t)dt$$

ضمن تغییر متغیر مستقل t به‌تابع $\omega(x)$، به‌قوت خود باقی می‌ماند. [۱۰۶].

فرض کنید، بخواهیم انتگرال زیر را پیدا کنیم:

$$\int f(x)dx$$

دربسیاری‌حالت‌ها، می‌توان، تابعی از x را، به‌عنوان‌متغیر جدید، انتخاب کرد: $t=\omega(x)$؛ به‌نحوی‌که عبارت زیر انتگرال، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$f(x)dx=g(\omega(x))\omega'(x)dx \qquad (1)$$

و درآن، تابع $g(t)$، برای انتگرال‌گیری، مناسب‌تر از $f(x)$ باشد. آن‌وقت، با توجه به‌آن‌چه گفته شد، کافی است، انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$\int g(t)dt=G(t)+C$$

و سپس، با تبدیل $t=\omega(x)$، انتگرال مطلوب را به دست آوریم. معمولاً، به طور ساده، می‌نویسند:

$$\int f(x)dx=\int g(t)dt \qquad (۲)$$

و به‌حساب می‌آورند که در تابع نسبت به t ــ که با انتگرال سمت راست نشان داده شده است ــ دوباره تعویض متغیر انجام گیرد.

به عنوان مثال، انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int sin^{۳}x\cos x dx$$

چون داریم: $dsinx=cosxdx$، پس با فرض $t=sinx$، عبارت زیر انتگرال را، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$sin^{۳}xcosxdx=sin^{۳}x\cdot dsinx=t^{۳}dt$$

و انتگرال عبارت اخیر، به‌سادگی محاسبه می‌شود:

$$\int t^{۳}dt=\frac{t^{۴}}{۴}+C$$

باید دوباره، با گذاشتن $sinx$ به‌جای t، به‌متغیر x برگردیم:

$$\int sin^{۳}xcosxdx=\frac{sin^{۴}x}{۴}+C$$

توجه خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم که، وقتی تبدیل $t=\omega(x)$ را انجام می‌دهیم، باید در ترکیب عبارت زیر انتگرال، ضریب $\omega'(x)dx$ وجود داشته باشد، تا دیفرانسیل متغیر جدید، یعنی dt، را پدید آورد [(۱) را ببینید]. در مثال قبل، تبدیل $t=sinx$، به‌این دلیل مفید بود که ضریب $cosxdx=dt$ وجود داشت.

مثال زیر، از این جهت، آموزنده است:

$$\int sin^{۳}xdx$$

در این‌جا، تبدیل $t=sinx$، به‌دلیل فقدان ضریب نامبرده، مناسب نیست. اگر سعی کنیم ضریب $sinxdx$ (یا بهتر: $-sinxdx$) را، به‌عنوان دیفرانسیل متغیر جدید، ازعبارت‌زیر علامت انتگرال، جدا کنیم، آن‌وقت، می‌توانیم از تبدیل $t=cosx$ استفاده کنیم، زیرا، بعداز جدا کردن ضریب مورد نیاز، عبارت

$$-sin^{۲}x=cos^{۲}x-۱$$

باقی می‌ماند و، در نتیجه، کار تبدیل به‌ثمر می‌رسد. داریم:

$$\int \sin^3 x dx = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

وقتی که مهارت لازم، در تغییر متغیر، پیدا شود، در موردهای ساده، می‌توان بدون واردکردن متغیر t، نتیجه را به‌دست آورد. مثلاً، در انتگرال

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \cos^3 x d\sin x$$

می‌توان، در ذهن خود، $\sin x$ را، به‌عنوان متغیر جدید، در نظر گرفت و فوراً نتیجه را به‌دست آورد. به‌همین ترتیب:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

که، در واقع، تبدیل $t=\frac{x}{a}$ را در نظر داشته‌ایم.

حالا، خواننده متوجه‌می‌شود که‌قاعدهٔ III، **۲۶۶**، اساساً به‌تبدیل خطی $t=ax+b$ منجر می‌شود:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(t)dt$$

گاهی، تبدیل را، به‌صورت‌دیگری انجام‌می‌دهند. درعبارت زیرانتگرال، $f(x)dx$، مستقیماً به‌جای x، تابع $x=\varphi(t)$ از متغیر جدید t را می‌گذارند و، در نتیجه، عبارت

$$f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = g(t)dt$$

را به‌دست‌می‌آورند. روشن‌است‌اگر، دراین‌رابطه، تبدیل $t=\omega(x)$ را واردکنیم، که اگر در آن، $\omega(x)$، تابع معکوس $\varphi(t)$ است، به‌همان عبارت نخستین زیر انتگرال، $f(x)dx$، می‌رسیم. به‌این‌جهت، مثل قبل، برابری (۲) را خواهیم‌داشت، که در آن‌جا درسمت‌راست، پس از محاسبهٔ انتگرال، باید $t=\omega(x)$ را قرار داد.

به‌عنوان نمونه، انتگرال زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$$

اگر فرض کنیم $x=t^6$ (تا عبارت مخرج، به طور کامل، گویا شود)، داریم: $\sqrt{x}=t^3$، $\sqrt[3]{x}=t^2$ و $dx=6t^5dt$ و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}=6\int \frac{t^2dt}{1+t^2}=6\left[\int dt-\int \frac{dt}{1+t^2}\right]=6(t-\operatorname{arctg}t)+C$$

حالا، با توجه به‌رابطهٔ $t=\sqrt[6]{x}$، به‌متغیر x می‌رسیم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}=6(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x})+C$$

مثال زیر، جالب‌تر است:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$$

تفاضل مربع‌های زیر رادیکال (که در آن‌ها، اولی مقدار ثابتی است)، ما را به‌فکر تبدیل مثلثاتی $x=a\sin t$ می‌اندازد*. در این‌صورت داریم:

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, \qquad dx=a\cos t dt,$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int \cos^2 t dt$$

ولی می‌دانیم:

$$a^2\int \cos^2 t dt=a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C$$

[۲۶۷، ۱۷)، (a)]. برای عبور به x، از $t=\operatorname{arcsin}\frac{x}{a}$ استفاده می‌کنیم. تبدیل جملهٔ دوم

---

*) یادآوری می‌کنیم که x، متغیری بین $-a$ و $+a$ است. و t را، بین $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ به حساب می‌آوریم. از این‌رو $t=\operatorname{arcsin}\frac{x}{a}$.

را هم، با توجه به‌رابطهٔ زیر انجام می‌دهیم:

$$\frac{a^2}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}a\sin t\cdot a\cos t=\frac{1}{2}t\sqrt{a^2-x^2}$$

بالاخره

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

مهارت در پیدا کردن تغییر متغیرهای مناسب، با تمرین به‌دست می‌آید، هرچند، در این خصوص، بعضی راهنمایی‌های کلی هم وجود دارد. خواننده، این ملاحظه‌های جزئی جداگانه را ــ که موجب ساده‌تر شدن این جست و جو می‌شود ــ در شمارهٔ بعد خواهد دید. در حالت‌های رسمی، تغییر متغیر را، به‌طور ساده، ضمن درس نشان خواهیم داد.

۲۶۹. مثال‌ها. ۱) (a) $\int e^{x^2}xdx$، (b) $\int\frac{xdx}{1+x^4}$، (c) $\int\frac{x^2}{\cos^2 x^3}dx$.

(a) با فرض $t=x^2$ داریم $dt=2xd$، به‌نحوی که

$$\int e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

(b) راهنمائی. همان تبدیل. پاسخ: $\frac{1}{2}\arctg x^2+C$. درهردوحالت (a) و (b)، انتگرال‌ها، به‌صورت

$$\int g(x^2)xdx=\frac{1}{2}\int g(x^2)d(x^2)$$

بودند، که درآن‌جا، g، برای انتگرال گیری، مناسب‌تر است. برای چنین انتگرال‌هایی، تبدیل $t=x^2$، طبیعی است. به‌طرز مشابهی، در انتگرال به‌صورت

$$\int g(x^3)x^2dx=\frac{1}{3}\int g(x^3)d(x^3)$$

باید از تبدیل $t=x^3$ استفاده‌کرد وغیره. انتگرال سوم، از نوع اخیر است.

(c) پاسخ: $\frac{1}{3}tgx^3+C$.

۲) $\int(\alpha x^2+\beta)^\mu xdx$ $(\mu\neq-1)$.

حل: در این‌جا هم، می‌توان $t=x^{۲}$ گرفت، ولی ساده‌تر این است که یک بار $u=\alpha x^{۲}+\beta$ فرض کنیم، زیرا عامل xdx، تنها در ضریب عددی، با $du=۲\alpha xdx$ فرق دارد. به‌این ترتیب، داریم:

$$\int(\alpha x^{۲}+\beta)^{\mu}xdx=\frac{۱}{۲\alpha}\int u^{\mu}du=\frac{۱}{۲\alpha(\mu+۱)}\alpha^{\mu+۱}+C=$$

$$=\frac{۱}{۲\alpha(\mu+۱)}(\alpha x^{۲}+\beta)^{\mu+۱}+C$$

۳) $\int\frac{\ln x}{x}dx$ (a)، $\int\frac{dx}{x\ln x}$ (b)، $\int\frac{dx}{x\ln^{۲}x}$ (c).

راهنمائی. همهٔ این انتگرال‌ها، به‌صورت

$$\int g(\ln x)\frac{dx}{x}=\int g(\ln x)d(\ln x)$$

می‌باشند و، بنابراین، تبدیل $t=\ln x$، مفید است.

پاسخ: $\frac{۱}{۲}\ln^{۲}x+C$ (a)، $\ln\ln x+C$ (b)، $-\frac{۱}{\ln x}+C$ (c).

۴) انتگرال‌های به‌صورت

$$\int g(\sin x)\cos x\,dx,\quad \int g(\cos x)\sin x\,dx,\quad \int g(tgx)\frac{dx}{\cos^{۲}x}$$

را باید، به‌ترتیب، به‌این‌صورت، تغییر متغیر داد:

$$t=\sin x,\qquad u=\cos x,\qquad v=tgx$$

مثلاً

$$\int\frac{\cos x dx}{۱+\sin^{۲}x}=\int\frac{dt}{۱+t^{۲}}=\operatorname{arctg}t+C=\operatorname{arctg}(\sin x)+C \quad (a)$$

$$\int tgx\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C \quad (b)$$

$$\int\frac{dx}{A^{۲}\sin^{۲}x+B^{۲}\cos^{۲}x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^{۲}x}}{A^{۲}tg^{۲}x+B^{۲}}=\int\frac{dv}{A^{۲}v^{۲}+B^{۲}}= \quad (c)$$

$$=\frac{۱}{AB}\text{arctg}\frac{Av}{B}+C=\frac{۱}{AB}\text{arctg}\left(\frac{A}{B}tgx\right)+C$$

(۵ (a) $\int\frac{۲xdx}{x^۲+۱}$ ، (b) $\int cotgxdx$ ، (c) $\int\frac{e^{۲x}}{e^{۲x}+۱}dx$

. (d) $\int\frac{dx}{sinxcosx}$

حل. (a) اگر $t=x^۲+۱$ بگیریم، خواهیم داشت $dt=۲xdx$ و

$$\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln(x^۲+۱)+C$$

توجه کنیم، هروقت، انتگرال به‌صورت

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{df(x)}{f(x)}$$

باشد، یعنی، درعبارت زیر انتگرال، صورت کسر، همان دیفرانسیل مخرج باشد، تبدیل $t=f(x)$، فوراً، ما را، به‌نتیجه می‌رساند:

$$\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C$$

با توجه به‌این نمونه، داریم:

(b) $\int cotgxdx=\int\frac{dsinx}{sinx}=\ln|sinx|+C$ [با ۴)، (b) مقایسه کنید]

(c) $\int\frac{e^{۲x}}{e^{۲x}+۱}dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{d(e^{۲x}+۱)}{e^{۲x}+۱}=\frac{۱}{۲}\ln(e^{۲x}+۱)+C$

(d) $\int\frac{dx}{sinxcosx}=\int\frac{\frac{dx}{cos^۲x}}{tgx}=\ln|tgx|+C$

۶) از انتگرال اخیر، به‌سادگی، دوانتگرال سودمند زیر به‌دست می‌آید:

(a) $\int\frac{dx}{sinx}=\int\frac{d\left(\frac{x}{۲}\right)}{sin\frac{x}{۲}cos\frac{x}{۲}}=\ln\left|tg\frac{x}{۲}\right|+C$

(b) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)\right| + C$$

(a) $$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arc}tgx}}{۱+x^۲}dx = \int \sqrt{\operatorname{arc}tgx}\cdot d(\operatorname{arc}tgx) = \frac{۲}{۳}(\operatorname{arc}tgx)^{\frac{۳}{۲}} + C$$ (۷

(b) $$\int \frac{e^x dx}{e^{۲x}+۱} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^۲+۱} = \operatorname{arc}tg(e^x) + C$$

(c) $$\int tg\frac{۱}{x}\cdot\frac{dx}{x^۲} = -\int tg\frac{۱}{x}\cdot d\left(\frac{۱}{x}\right) = \ln\left|\cos\frac{۱}{x}\right| + C$$

[۴)، (b) را ببینید].

حالا، چندمثال انتگرال‌گیری از عبارت‌های شامل دوجمله‌ای‌های $x^۲-a^۲$، $x^۲+a^۲$ و $a^۲-x^۲$ می‌دهیم. دراین موردها، معمولاً بهتر است x را، با تابع‌های مثلثاتی یا هذلولی ازمتغیرجدید t، عوض کنیم. ضمناً، باید رابطه‌های زیر را هم، درنظرداشته باشیم:

$$\sin^۲t+\cos^۲t=۱,\quad ۱+tg^۲t=\sec^۲t=\frac{۱}{\cos^۲t}$$

$$\operatorname{ch}^۲t-\operatorname{sh}^۲t=۱,\quad ۱-\operatorname{th}^۲t=\frac{۱}{\operatorname{ch}^۲t}$$

۸) $$\int \frac{dx}{(x^۲+a^۲)^۲}.$$

تغییر متغیر: $x=a\cdot tgt$*، ازآن‌جا $dx=\frac{adt}{\cos^۲t}$ و $x^۲+a^۲=\frac{a^۲}{\cos^۲t}$. بنابراین

$$\int \frac{dx}{(x^۲+a^۲)^۲} = \frac{۱}{a^۳}\int \cos^۲t\,dt = \frac{۱}{۲a^۳}(t+\sin t\cos t)+C$$ [۲۶۷]، ۱۷)(a)را ببینید]

برای رسیدن به‌متغیر x، طبق فرض داریم $t=\operatorname{arc}tg\frac{x}{a}$؛ $\sin t$ و $\cos t$ را، بـــرحســـب

---

*) متغیر t را، بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ فرض می‌کنیم.

$tgt=\frac{x}{a}$ بیان می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc}tg\frac{x}{a}+C$$

۹) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

دراین‌جا، برای تبدیل، مناسب‌تراست از تـابع هذلولی استفاده‌کنیم. $x=a\cdot\operatorname{ch}t$ می‌گیریم (به‌ازای $t>0$، $x>a$). داریم: $dx=a\operatorname{sh}tdt$ و $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{sh}t$. انتگرال به طورساده، به‌صورت $\int dt=t+C$ در می‌آید. بـرای رسیدن به‌متغیر x، تابـع معکوس کسینوس هذلولی را، به‌یاد بیاورید [۴۹، ۳)]

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C'$$

ضمناً، جملهٔ $-\ln a$ را هم، وارد مقدار ثابت C' کرده‌ایم.

۱۰) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$ (a)، $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$ (b)، $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (c).

دراین حالت، می‌توان هم از تبدیل مثلثاتی و هـم از تبدیل هذلولی، استفاده‌کرد بـه‌عنوان نمونـه، درانتـگرال دوم، فـرض مـی‌کنیم: $x=a\cdot\sec t$، آن‌وقت داریم: $dx=\frac{a\cdot sintdt}{cos^2t}=\frac{atgtdt}{cost}$ و درنتیجه $x^2-a^2=a^2tg^2t$،

$$\int-\frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{costdt}{sin^2t}=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{sint}+C=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+C$$

۱۱) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

تغییر متغیر: $x=asint$، $dx=acostdt$ و، درنتیجه، داریم [۶)، (a) را ببینید]:

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{sint}=\frac{1}{a}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+C$$

ولی

$$tg\frac{t}{۲}=\frac{۱-cost}{sint}=\frac{a-\sqrt{a^۲-x^۲}}{x}$$

به‌طوری که سرانجام

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^۲-x^۲}}=\frac{۱}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^۲-x^۲}}{x}\right|+C$$

در پایان، دو نمونهٔ انتگرال‌گیری را، از راه تغییرمتغیر، انجام می‌دهیم، که در آن، نوع تبدیل، مثل حالت‌های پیش، طبیعی به‌نظر نمی‌رسد، ولی در عوض، سریع‌تر به‌نتیجه می‌رسد.

۱۲) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲+\alpha}}$ (α می‌تواند مثبت یا منفی باشد).

فرض می‌کنیم $\sqrt{x^۲+\alpha}=t-x$، و t را به عنوان متغیرجدید می‌گیریم. اگر دو طرف تساوی را مجذور کنیم، جملهٔ $x^۲$ حذف می‌شود و به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{t^۲-\alpha}{۲t}$$

به‌نحوی که

$$\sqrt{x^۲+\alpha}=t-\frac{t^۲-\alpha}{۲t}=\frac{t^۲+\alpha}{۲t},\quad dx=\frac{t^۲+\alpha}{۲t^۲}dt$$

و بالاخره

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲+\alpha}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^۲+\alpha}|+C$$

[با ۹) مقایسه کنید].

۱۳) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$ $(\alpha<x<\beta)$.

فرض می‌کنیم $x=\alpha cos^۲\varphi+\beta sin^۲\varphi$ $\left(۰<\varphi<\frac{\pi}{۲}\right)$، که در آن، φ متغیرجدید

است. آن‌وقت

$$x-\alpha=(\beta-\alpha)\sin^2\varphi, \qquad \beta-x=(\beta-\alpha)\cos^2\varphi$$

$$dx=2(\beta-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$$

به‌این ترتیب

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}=2\int d\varphi=2\varphi+C=2\arctg\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

۲۷۰. انتگرال‌گیری جزء به‌جزء. فرض کنیم $u=f(x)$ و $v=g(x)$، دوتابع از x، دارای مشتق‌های پیوستهٔ $u'=f'(x)$ و $v'=g'(x)$ باشند. آن وقت، از روی قاعدهٔ دیفرانسیل‌گیری حاصل‌ضرب $d(uv)=udv+vdu$ یا $udv=d(uv)-vdu$، و با توجه به‌این‌که تابع اولیهٔ $d(uv)$ برابراست با uv، به‌رابطهٔ زیرمی‌رسیم:

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (۳)$$

این رابطه، معرف قاعدهٔ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء است. این رابطه، انتگرال عبارت $udv=uv'dx$ را به‌انتگرال عبارت $vdu=vu'dx$ منجرمی‌کند.

مثلاً* فرض کنیدکه بخواهیم انتگرال $\int x\cos x dx$ را پیداکنیم. فرض می‌کنیم

$$u=x,\ dv=\cos x dx;\Rightarrow du=dx,\ v=\sin x$$

و با توجه به‌رابطهٔ (۳)

$$\int x\cos x dx=\int x\cdot d\sin x=x\cdot\sin x-\int\sin x dx=$$

$$=x\sin x+\cos x+C \qquad (۴)$$

به‌این ترتیب، قاعدهٔ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، تابع زیرانتگرال $x\cos x$ را ــ که تابع مرکبی بود ــ منجر به‌تابع سادهٔ $\sin x$ کرد. ضمناً، برای به‌دست آوردن v، لازم شد تا از عبارت $\cos x\cdot dx$، انتگرال بگیریم؛ ودلیل نام گذاری انتگرال جزء به‌جزء، ازهمین‌جاست.

---

*) ازآن جا که، برای هدف ما، کافی است $\cos x dx$ را، با هرروشی، به‌صورت dv بنویسیم، نیازی به‌نوشتن عبارت‌کلی v نیست و ازمقدار ثابت صرف نظرمی‌کنیم. این‌نکته را، باید بعد از این هم، درنظرداشت.

برای استفاده از رابطهٔ (۳)، باید عبارت زیر علامت انتگرال را به دو عامل u و $dv=vdx$ تقسیم کنیم، که برای رسیدن به انتگرال سمت راست، از اولی دیفرانسیل واز دومی انتگرال گرفته می‌شود. باید توجه کرد که انتگرال‌گیری از دیفرانسیل dv دشوار نباشد، و با تعویض u به du و dv به v، روی هم، منجر به ساده شدن عبارت زیر علامت انتگرال بشود. درمثال بالا، اگر xdx را برای dv و $cosx$ را برای u انتخاب می‌کردیم، به نتیجه نمی‌رسیدیم.

اگر کمی مهارت پیدا کنیم، دیگر لزومی نمی‌بینیم که علامت‌های u و v را وارد کنیم و، می‌توانیم، بلافاصله رابطه را به‌کار بریم [درمورد (۴) آزمایش کنید].

دامنهٔ کاربرد قاعدهٔ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، محدودتر از تغییر متغیر است. باوجود این، گروهی از انتگرال‌ها، ازنوع

$$\int x^k \ln^m x dx, \int x^k \sin bx dx, \int x^k \cos bx dx, \int x^k e^{ax} dx, \ldots$$

وجود دارند، که به‌کمک همین قاعدهٔ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، محاسبه می‌شوند.

استفادهٔ تکراری از قاعدهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء، به‌اصطلاح به‌تعمیم رابطهٔ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، منجر می‌شود.

فرض کنیم که تابع‌های u و v، در بازهٔ مورد نظر، دارای مشتق‌های پیوستهٔ همهٔ مرتبه‌ها، تا خودمرتبهٔ $(n+1)$ام باشند: u'، v'؛ u''، v''؛ ... ؛ $u^{(n)}$، $v^{(n)}$؛ $u^{(n+1)}$، $v^{(n+1)}$.

اگر در رابطهٔ (۳)، v را به $v^{(n)}$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$\int uv^{(n+1)}dx = \int udv^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)}du = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}dx$$

و به‌همین ترتیب

$$\int u'v^{(n)}d\alpha = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}dx,$$

$$\int u''v^{(n-1)}dx = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n+2)}dx,$$

. . . . . .

$$\int u^{(n)}v'dx = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}vdx$$

اگر این رابطه‌ها را، بـه‌نوبت، در ۱+ و ۱− ضرب و، سپس، آن‌ها را با هم جمع کنیم، بعد از حذف انتگرال‌هـای یکسان در دو طرف تساوی، به رابطهٔ مورد نظر می‌رسیم:

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots +$$

$$+(-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx \qquad (۵)$$

استفادهٔ ازاین‌رابطه، به‌خصوص، وقتی سودمند است که، یکی ازعامل‌های تابع زیر انتگرال‌گیری، جندجمله‌ای‌صحیح باشد، اگر u، چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، درآن‌صورت، $u^{(n+1)}$ متحد باصفرمی‌شود و درطرف راست، نتیجهٔ نهائی انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید. بهتراست به‌مثال‌ها بپردازیم.

۲۷۱. مثال‌ها. ۱) $\int x^3 \ln x dx$

اگر از $\ln x$ دیفرانسیل بگیریم، ساده می‌شود به‌همین مناسبت، فرض می‌کنیم:

$$u = \ln x,\ dv = x^3dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x},\ v = \frac{1}{4}x^4$$

و

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

۲) (a) $\int \ln x dx$، (b) $\int \operatorname{arc}tg x dx$، (c) $\int \operatorname{arc}\sin x dx$.

درهمهٔ حالت‌ها، $dx = dv$ می‌گیریم. داریم:

(a) $$\int \ln x dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot d\ln y = x\cdot\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$$

(b) $$\int \operatorname{arc}tg x dx = x\cdot\operatorname{arc}tg x - \int x\cdot d\operatorname{arc}tg x = x\cdot\operatorname{arc}tg x -$$

$$-\int \frac{x}{x^2+1}dx = x\cdot\operatorname{arc}tg x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$ [را ببینید (a)، (۵، ۲۶۹]

(c) $$\int \operatorname{arc}\sin x\,dx = x\operatorname{arc}\sin x - \int x\cdot d\operatorname{arc}\sin x = x\cdot\operatorname{arc}\sin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\cdot\operatorname{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

[۲۶۹، ۲) را ببینید]

۳) $\int x^2 \sin x\,dx$.

داریم:

$$\int x^2\sin x\,dx = \int x^2\cdot d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int(-\cos x)d(x^2) =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

به‌این‌ترتیب، انتگرال مطلوب را، به‌انتگرال معلومی رساندیم [۲۷۰، (۴)]، که با قرار دادن مقدار آن، نتیجه می‌شود:

$$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$$

درواقع، دراین‌جا، دوبار ازقاعدهٔ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء استفاده کردیم.

مجدداً تکرار می‌کنیم که این قاعده را، می‌توان در محاسبهٔ انتگرال‌های

$$\int P(x)e^{ax}dx, \quad \int P(x)\sin bx\,dx, \int P(x)\cos bx\,dx,$$

به‌کار برد، که در آن، $P(x)$، یك چندجمله‌ای صحیح نسبت به x است.

۴) اگر از تعمیم قاعدهٔ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء استفاده کنیم، می‌توان یك باره، پاسخ را، برای انتگرال‌های به‌این‌صورت به‌دست آورد.

با فرض $v^{(n+1)} = e^{ax}$، خواهیم داشت: $v^{(n)} = \frac{e^{ax}}{a}$، $v^{(n-1)} = \frac{e^{ax}}{a^2}$، $v^{(n-2)} = \frac{e^{ax}}{a^3}$

و غیره.

بنابراین، اگر چندجمله‌ای $P(x)$ را، از درجهٔ n به‌حساب آوریم، با توجه‌به‌رابطهٔ (۵) داریم:

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P''}{a^3} - \dots\right) + C$$

به‌همین ترتیب، اگر فرض کنیم $v^{(n+1)}=\sin bx$، در آن صورت

$$v^{(n)}=-\frac{\cos bx}{b},\quad v^{(n-1)}=-\frac{\sin bx}{b^2},\quad v^{(n-2)}=\frac{\cos bx}{b^3},\ \dots$$

که در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\int P(x)\sin bx\,dx=\sin bx\left(\frac{P'}{b^2}-\frac{P'''}{b^4}+\dots\right)-\cos bx\left(\frac{P}{b}-\frac{P''}{b^3}+\dots\right)+C$$

به‌ترتیب مشابهی، رابطهٔ زیرهم به‌دست می‌آید:

$$\int P(x)\cos bx dx=$$

$$=\sin bx\left(\frac{P}{b}-\frac{P''}{b^3}+\dots\right)+\cos bx\left(\frac{P'}{b^2}-\frac{P'''}{b^4}+\dots\right)=C$$

۵) $\int x^3\ln^2 x dx$ داریم.

$$\int \ln^2 x\cdot d\left(\frac{x^4}{4}\right)=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\int x^4 d(\ln^2 x)=$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\frac{1}{2}\int x^3\ln x dx$$

کار، به‌محاسبهٔ انتگرال ۱) کشید، بالاخره

$$\int x^3\ln^2 x dx=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}x^4\left(\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right)+C$$

با همین روش، می‌توان، این انتگرال را هم محاسبه کرد:

$$\int x^k\ln^m x\,dx$$

که در آن، k عدد حقیقی دلخواه $(k\neq -1)$ و $m=1, 2, 3, \dots$. اگر قاعدهٔ انتگرال گیری جزء به‌جزء را، با فرض $u=\ln^m x$، به‌کار بریم، به‌رابطهٔ برگشتی زیر می‌رسیم:

$$\int x^k\ln^m x\,dx=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln^m x-\frac{m}{k+1}\int x^k\ln^{m-1}x\,dx$$

که، درنتیجه، محاسبهٔ انتگرال موردنظر، به‌محاسبهٔ انتگرال دیگری ازهمان نوع، با یك درجه کمتر نسبت به $\ln x$، منجر می‌شود. ضمناً، اگر $t=\ln x$ بگیریم، این انتگرال، به‌انتگرالی به‌صورت $\int t^m e^{(k+1)t}dt$ منجر می‌شود، که از ۳) و ۴)، باآن آشنا هستیم.

۶) انتگرال‌های زیر، نمونه‌های جالبی هستند

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

اگر از قاعدهٔ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء استفاده کنیم (در هردوحالت، فرض می‌کنیم $dv=e^{ax}dx$، $v=\frac{1}{a}e^{ax}$)، به‌دست می‌آید:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

به‌این‌ترتیب، هرکدام ازاین انتگرال‌ها، برحسب دیگری بیان می‌شود.*

ولی، اگر در رابطهٔ اول، مقدار انتگرال را از رابطهٔ دوم قرار دهیم، به‌معادله‌ای، نسبت به‌انتگرال اول می‌رسیم که، ازآن، این انتگرال به‌دست می‌آید:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C$$

انتگرال دوم هم، به‌همین‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C$$

۷) به‌عنوان مثال آخر، بااستفاده از قاعدهٔ انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، یك‌رابطهٔ برگشتی، برای محاسبهٔ انتگرال زیرمی‌دهیم:

---

*) اگر در انتگرال‌ها، تابع‌های اولیهٔ معینی درنظر گرفته شود (با یادداشت **۲۶۶ مقایسه** کنید)، درآن‌صورت، اگربخواهیم، دررابطهٔ دوم،همان تابع‌های رابطهٔ اول را داشته‌باشیم، به‌شرطی‌که بخواهیم دقیق باشیم، باید مقداری ثابت را ضمیمه کنیم. طبیعی است که در عبارت آخر، می‌توان C و C' را تلفیق کرد.

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\qquad(n=1, 2, 3, \ldots)$$

ازرابطهٔ (۳) استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\ dv=dx;\ \Rightarrow\ du=-\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}},\ v=x$$

درنتیجه

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

انتگرال اخیررا، می‌توان به‌ترتیب زیر، تبدیل کرد:

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=J_n-a^2J_{n+1}$$

که اگر در برابری قبل، قرار دهیم، به‌این رابطه می‌رسیم:

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nJ_n-2na^2J_{n+1}$$

ازآن‌جا

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n\qquad(۶)$$

این رابطه، محاسبهٔ انتگرال J_{n+1} را، به‌کمك انتگرال J_n، به دست می‌دهد. چون می‌دانیم

$$J_1=\frac{1}{a}\operatorname{arc}tg\frac{x}{a}$$

[۲۶۷، ۹)، (b)؛ یکی از مقدارهای انتگرال را انتخاب می‌کنیم]. حالا، اگر دررابطهٔ (۶) فرض کنیم $n=1$:

$$J_2=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc}tg\frac{x}{a}$$

[که قبلاً هم، آن را از راه دیگری، به‌دست آورده بودیم: ۲۶۹، ۸) را ببینید]. اگر در رابطهٔ (۶)، $n = ۲$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$J_۳ = \frac{۱}{۴a^۲} \cdot \frac{x}{(x^۲+a^۲)^۲} - \frac{۳}{۴a^۲} J_۲ =$$

$$= \frac{۱}{۴a^۲} \cdot \frac{x}{(x^۲+a^۲)^۲} + \frac{۳}{۸a^۴} \cdot \frac{x}{x^۲+a^۲} + \frac{۳}{۸a^۵} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$$

و به‌همین ترتیب، تا آخر.

به‌این ترتیب، انتگرال J_n را، تا هر نمای طبیعی دلخواه n، می‌توان محاسبه کرد.

§۲. انتگرال‌گیری عبارت‌های گویا

۲۷۲. طرح مسألهٔ انتگرال‌گیری به‌صورت متناهی. تا این‌جا، با روش‌های مقدماتی محاسبهٔ انتگرال‌های نامعین، آشنا شدیم. این روش‌ها، مسیر مشخصی را، برای محاسبهٔ یک انتگرال مفروض، معین نمی‌کنند و، در نتیجه، به‌هنر زیادی در محاسبه، نیاز دارند. در این بند و بند بعدی، به‌تفصیل، به بعضی از طبقه‌های مهم تابع‌ها می‌پردازیم و، در ارتباط با انتگرال آن‌ها، ردیف محاسبه‌ای کاملاً معینی را نشان می‌دهیم. حالا روشن می‌کنیم که به‌کدام طبقه‌های تابع‌ها نظر داریم و برای محاسبهٔ انتگرال آن‌ها، با چه ضابطه‌ای، عمل می‌کنیم!

در ۵۱، با تابع‌های گوناگونی آشنا شدیم که، به‌خصوص، در آنالیز، به‌کار می‌روند. این‌ها، عبارت بودند از تابع‌های مقدماتی و تابع‌هایی که از روی تابع‌های مقدماتی و به‌کمک تعداد متناهی عمل‌های حساب و انطباق (بدون عبور به‌حد)، به‌دست می‌آیند.

در فصل سوم دیدیم که همهٔ این تابع‌ها، مشتق‌پذیرند و، ضمناً، مشتق‌های آن‌ها هم، به‌همان نوع تابع‌ها، تعلق دارند. ولی، در انتگرال‌گیری، کار به‌گونه‌ای دیگر است: غالباً معلوم می‌شود که، انتگرال تابعی که، به‌این طبقه تعلق دارد، خارج از این طبقه قرار می‌گیرد، یعنی، این انتگرال‌ها را نمی‌توان، به‌کمک تعداد متناهی از عمل‌های مذکور، بیان کرد. از جملهٔ چنین انتگرال‌ها، که به‌صورت متناهی قابل بیان نیستند، می‌توان مثلاً، از این نمونه‌ها یاد کرد:

$$\int e^{-x^۲} dx, \quad \int \sin x^۲ dx, \quad \int \cos x^۲ dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

با مثال‌های دیگری ازاین نوع، بازهم، آشنا خواهیم شد [۲۸۰، ۲۸۹، ۲۹۰ وغیره].

مهم‌است تأکید کنیم که، همهٔ‌این انتگرال‌ها،درواقع، وجوددارند*، تنها، تابع‌هایی کاملاً تازه هستند و نمی‌توان آن‌ها را، به‌کمك تابع‌های مقدماتی، ساخت.**

طبقه‌های کلی تابع‌هایی که، درمورد آن‌ها، بتوان به‌صورتی متناهی انتگرال گیری کرد، چندان زیاد نیستند؛ وما فعلاً به‌آن‌ها می‌پردازیم. در بین آن‌ها، باید در درجهٔ نخست، از طبقهٔ مهم تابع‌های گویا، نام ببریم.

۲۷۳. کسرهای ساده و انتگرال‌گیری آن‌ها. چون در کسرهای ناسره [کسرهایی که می‌توان، درآن‌ها، صورت را برمخرج تقسیم کرد و، در خارج‌قسمت، عبارتی صحیح به‌دست‌آورد]، می‌توان بخش صحیح راکنارگذاشت، چراکه انتگرال‌گیری ازاین‌بخش صحیح اشکالی ندارد،کافی است، تنها به‌انتگرال کسرهای سره بپردازیم (کسرهایی که،در آن‌ها، درجهٔ صورت،کوچکتر از درجهٔ مخرج است).

دراین‌جا، تنها به‌کسرهای به‌اصطلاح ساده خواهیم پرداخت،که به‌چهار نوع کسر زیر گفته می‌شوند:

$$\text{I.}\ \frac{A}{x-a},\quad \text{II.}\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k=2,3,\dots),\quad \text{III.}\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \text{IV.}\ \frac{Mx+n}{(x^2+px+q)^m}\ (m=2,3,\dots)$$

که درآن‌ها، A، M، N، a، p و q، عددهایی حقیقی هستند. به‌جز آن، درمورد کسرهای III و IV، فرض می‌شود که سه‌جمله‌ای x^2+px+q، دارای ریشه‌های حقیقی نیست. به‌طوری که

$$\frac{p^2}{4}-q<0 \quad \text{یا} \quad q-\frac{p^2}{4}>0$$

ازکسرهای I و II می‌توانیم، به‌سادگی، انتگرال بگیریم:

---

*) دراین‌باره، آن‌چه را، در **۲۶۴** گفته‌ایم، ببینید. بعداً در **۳۰۵**، به‌این مطلب، برخواهیم گشت.

**) برای این‌که، خواننده، بااین واقعیت، خوبگیرد، یادآوری می‌کنیم‌که انتگرال‌های

$$\int\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dx}{x^2+1}$$

از تابع‌های‌گویا، خود تابع‌هایی‌گویا نیستند. بنابراین، اگرتنهاتابع‌های‌گویارا«مقدماتی» به‌حساب می‌آوریم، آن وقت، انتگرال این تابع‌های «مقدماتی»، خود تابع‌هایی «مقدماتی» نبودند و به‌صورت تابع‌های «غیرمقدماتی» تازه‌ای، $\ln x$، $\operatorname{arc\,tg} x$، ظاهرمی‌شدند.

$$A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$$

$$A\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$$

درمورد کسرهای II و III، به این ترتیب، عمل می‌کنیم: ابتدا، از عبارت x^2+px+q، دوجمله‌ای مجذور کامل را جدا می‌کنیم:

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

عبارت اخیر داخل پرانتز، بنا به‌فرض، مقداری است مثبت و، می‌توان، آن را به‌صورت a^2 نشان داد:

$$a=+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

حالا، به‌روش تغییر متغیر، متوسل می‌شویم:

$$x+\frac{p}{2}=t,\quad dx=dt$$

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\quad Mx+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)$$

درحالت III، خواهیم داشت:

$$\int\frac{Mx+n}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C$$

که اگر به‌متغیر x برگردیم و به‌جای a، مقدارش را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{M}{۲}\ln(x^۲+px+q)+\frac{۲N-Mp}{\sqrt{۴q-p^۲}}\operatorname{arctg}\frac{۲x+p}{\sqrt{۴q-p^۲}}+C$$

برای حالت IV، با همان تغییر متغیر، داریم:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^۲+px+q)^m}dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{۲}\right)}{(t^۲+a^۲)^m}dt=$$

$$=\frac{M}{۲}\int\frac{۲tdt}{(t^۲+a^۲)^m}+\left(N-\frac{Mp}{۲}\right)\int\frac{dt}{(t^۲+a^۲)^m} \qquad (۱)$$

نخستین انتگرال سمت راست را، به‌سادگی، و با تغییر متغیر، می‌توان به‌نتیجه رسانید:

$$t^۲+a^۲=u,\quad ۲tdt=du,$$

$$\int\frac{۲tdt}{(t^۲+a^۲)^m}=\int\frac{du}{u^m}=-\frac{۱}{m-۱}\cdot\frac{۱}{u^{m-۱}}+C=$$

$$=-\frac{۱}{m-۱}\cdot\frac{۱}{(t^۲+a^۲)^{m-۱}}+C \qquad (۲)$$

دومین انتگرال سمت راست راهم، می‌توان، برای هرمقدار m، به‌کمك رابطهٔ برگشتی(۶) شمارهٔ **۲۷۱** محاسبه کرد. سپس، اگر به‌جای t، مقدارش $\frac{۲x+p}{۲}$ را قرار دهیم، به‌متغیر x برمی‌گردیم. به‌این ترتیب، مسألهٔ مربوط به‌انتگرال‌گیری کسرهای ساده، پایان‌می‌پذیرد.

۲۷۴. تجزیهٔ کسرهای سره، به‌کسرهای ساده. به‌قضیه‌ای ازجبر اشاره می‌کنیم، که درنظریهٔ انتگرال‌گیری کسرهای گویا، اهمیت زیادی دارد. هرکسر سره

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

می‌تواند به‌صورت مجموعی ازکسرهای ساده، به‌تعداد متناهی، درآید.

این تجزیهٔ کسرهای سره، به‌کسرهای ساده، دقیقاً، با تجزیهٔ مخرج آن $Q(x)$ به‌عامل‌های ساده، بستگی دارد. می‌دانیم که هرچندجمله‌ای صحیح با ضریب‌های حقیقی، به‌عامل‌های حقیقی ازنوع $x-a$ و $x^۲+px+q$، قابل تجزیه است (وضمناً، این‌تجزیه، منحصر به‌فرد است). در ضمن، فرض می‌شود که عامل‌های درجه دوم، دارای ریشه‌های حقیقی نیستند و، بنابراین، به‌عامل‌های حقیقی خطی، تجزیه نمی‌شوند. اگر، برای سادگی کار، ضریب بزرگترین درجه را در $Q(x)$، برابرواحد بگیریم و، ضمناً، عامل‌های احتمالی

مشابه را، در مخرج، یك‌جا بنویسیم، تجزیهٔ این چندجمله‌ای، به‌این صورت درمی‌آید:

$$Q(x)=(x-a)^k \dots (x^2+px+q)^m \dots \qquad (۳)$$

که در آن، k، ...، m، عددهایی طبیعی هستند.

روشن‌است که، اگر درجهٔ چندجمله‌ای Q برابر n باشد، مجموع همهٔ kها و دوبرابر مجموع همهٔ mها، برابر با n خواهد شد:

$$\sum k+2\sum m=n \qquad (۴)$$

برای اثبات قضیه، قبلاً دو گزارهٔ کمکی زیررا روشن می‌کنیم:

۱°. عامل خطی $x-a$ با نمای $k \geqslant 1$ را، که درمخرج موجود است، درنظر می‌گیریم. داریم:

$$Q(x)=(x-a)^k \cdot Q_1(x)$$

که در آن، $Q_1(x)$، دیگر بر $x-a$ بخش‌پذیر نیست. درچنین صورتی، می‌توان کسرهٔ مفروض

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^k \cdot Q_1(x)}$$

را، به‌صورت مجموع کسرهای سره نوشت:*

$$\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{P_1'(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot Q_1(x)}$$

در این دو کسر، اولی کسری ساده و دومی، شامل عامل $x-a$، با نمائی کمتر ازقبل‌است.

برای اثبات، کافی است عدد A وچندجمله‌ای $P_1(x)$، طوری انتخاب شوند، که اتحاد زیر برقرار باشد:

$$P(x)-A \cdot Q_1(x)=(x-a) \cdot P_1(x)$$

ابتدا عدد A را طوری معین می‌کنیم که سمت‌چپ، بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد. برای این منظور، کافی است که مقدار آن، به‌ازای $x=a$، برابر صفرشود (بنابر قضیهٔ معروف «بزو»)، خواهیم داشت:

---

*) دراین‌جا، حرف‌های P و Q (با اندیس‌های مختلف)، چندجمله‌ای‌های صحیح، و حرف‌های A، M و N، عددهای ثابت هستند.

$$A=\frac{P(a)}{Q_1(a)}$$

این کسر، معنا دارد، زیرا (بنابر همان قضیهٔ به‌زو) داریم $Q_1(a)\neq 0$. وقتی که A معلوم باشد، چندجمله‌ای P_1، به‌طور ساده و به‌عنوان خارج‌قسمت، تعیین می‌شود.

۲°. حالا فرض می‌کنیم x^2+px+q، یکی از عامل‌های درجه دوم موجود در تجزیهٔ مخرج، با نمای $m\geqslant 1$ باشد، به‌طوری‌که این‌بار بتوان نوشت:

$$Q(x)=(x^2+px+q)^m\cdot Q_1(x)$$

که در آن، Q_1 بر سه جمله‌ای x^2+px+q بخش‌پذیر نیست. آن‌وقت، کسر سرهٔ مفروض

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m\cdot Q_1(x)}$$

می‌تواند به‌صورت مجموع کسرهای سرهٔ زیر درآید:

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}\cdot Q_1(x)}$$

که در آن، اولی کسری ساده است و دومی، در مخرج، شامل همان سه جمله‌ای درجه دوم، منتهی با نمائی کوچکتر است.

برای اثبات کافی است عددهای M و N و چند جمله‌ای $P_1(x)$، طوری انتخاب شوند که اتحاد زیر برقرار باشد:

$$P(x)-(Mx+N)\cdot Q_1(x)=(x^2+px+q)\cdot P_1(x)$$

M و N را طوری انتخاب می‌کنیم که، این بار، سمت چپ، بر سه جمله‌ای x^2+px+q بخش‌پذیر باشد. فرض می‌کنیم، باقی‌مانده‌های تقسیم P و Q_1 بر این سه جمله‌ای، به‌ترتیب، $\alpha x+\beta$ و $\gamma x+\delta$ باشد، آن‌وقت، مساله به این‌جا منجر می‌شود که عبارت

$$\alpha x+\beta-(Mx+N)(\gamma x+\delta)=$$
$$=-\gamma Mx^2+(\alpha-\delta M-\gamma N)x+(\beta-\delta N)$$

بر x^2+px+q بخش‌پذیر باشد. اگر عمل تقسیم را انجام دهیم، برای باقی‌ماندهٔ تقسیم، به‌دست می‌آید:

$$[(p\gamma-\delta)M-\gamma N+\alpha]x+[q\gamma M-\delta N+\beta]$$

که باید هر دوضریب آن‌را مساوی صفر قرار دهیم. به‌این ترتیب، برای تعیین M و N، دستگاهی با دو معادلهٔ خطی به‌دست می‌آید، که دترمینان آن

$$\begin{vmatrix} p\gamma-\delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix} = \delta^2 - p\gamma\delta + q\gamma^2$$

مخالف صفر است. در واقع، با فرض $\gamma \neq 0$، می‌توان آن‌را چنین نوشت:

$$\gamma^2\left[\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 + p\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) + q\right];$$

ولی، مقدار داخل کروشه، عبارت است از همان سه جمله‌ای x^2+px+q، در نقطهٔ $x=-\frac{\delta}{\gamma}$ و، در نتیجه، نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا این سه‌جمله‌ای، ریشه‌های حقیقی ندارد. در حالتی هم‌که داشته باشیم $\gamma=0$، دترمینان به δ^2 تبدیل می‌شود و روشن است که نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا درغیراین‌صورت، چندجمله‌ای Q_1 بر x^2+px+q بخش‌پذیر می‌شود.

وقتی‌که مقدارهای M و N معلوم باشند، چندجمله‌ای P_1 را می‌توان، بدون‌اشکال و به‌عنوان خارج‌قسمت، پیدا کرد.

اکنون، به‌اثبات قضیهٔ اصلی می‌پردازیم. این‌اثبات، منجر به‌استفادهٔ مکرر از گزاره‌های ۱° و ۲° می‌شود و، از این‌راه، مرتباً، کسرهای ساده از کسر سرهٔ اصلی جدا می‌شوند، تا کار به‌پایان برسد.

اگر $x-a$ در Q، تنها با نمای واحد وارد شده باشد، بنابر ۱°، آن‌را نظیر کسر ساده و منحصر

$$\frac{A}{x-a}$$

می‌گیریم. در حالتی‌که $x-a$ با نمای k $(k>1)$ باشد، درآن‌صورت، بنابر ۱°، با جدا کردن کسر سادهٔ

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

دوباره درکسری‌که باقی ماند، از گزارهٔ ۱° استفاده می‌کنیم و کسر سادهٔ

$$\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}$$

را جدا می‌کنیم وغیره، تا این‌که عامل $x-a$، به‌کلی ازمخرج حذف شود. به‌این ترتیب، دراین‌حالت، عامل $(x-a)^k$ $(k>1)$، متناظر می‌شود با گروهی شامل k کسر ساده:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k} \qquad (۵)$$

اگر در مخرج، عامل‌های خطی دیگری هم وجود داشته باشد، درمورد هرکدام از آن‌ها، به‌نوبت، به‌ترتیب مذکور در بالا، عمل می‌کنیم تا، درمخرج، هیچ عامل خطی باقی نماند.

به‌همین‌ترتیب، درمورد عامل درجه دوم x^2+px+q، درحالتی‌که با نمای‌واحد باشد، متناظر با کسر سادهٔ به‌صورت

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

و درحالتی با نمای m $(m>1)$ باشد، متناظر با گروهی از m کسر سادهٔ

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m} \qquad (۶)$$

می‌گیریم اگرعبارت‌های‌درجه دوم دیگری هم وجود داشته باشد، با یك‌یك آن‌ها، به‌همین ترتیب، عمل می‌کنیم. درنتیجه، درستی حکم قضیه ثابت می‌شود.

۲۷۵. تعیین ضریب‌ها. انتگرال‌گیری ازکسرهای سره. به‌این‌ترتیب، اگر تجزیهٔ (۳) را داشته باشیم، می‌توانیم مخرج کسرهای ساده‌ای را، که مجموع آن‌ها برابر با $\frac{P}{Q}$ می‌شود، به‌دست آوریم. به‌مسالهٔ تعیین صورت کسرها، یعنی ضریب‌های A، M و N، می‌پردازیم. چون صورت کسرهای گروه (۵)، شامل k ضریب وصورت کسرهای گروه (۶)، شامل $2m$ ضریب‌اند، بنابراین، بنابر (۴)، تعداد همهٔ آن‌ها، برابر n خواهند بود.

برای پیداکردن این‌ضریب‌ها، معمولاً، ازروش ضریب‌های نامعین، استفاده‌می‌کنند که، آن را، می‌توان، این‌طور، شرح داد. ازآن‌جاکه شکل کلی تجزیهٔ کسر $\frac{P}{Q}$ رامی‌دانیم، صورت کسرهای‌سمت‌راست را، باضریب‌های‌حرفی می‌نویسیم. مخرج مشترك همهٔ کسرهای سادهٔ سمت راست، همان Q می‌شود. کسرهای سمت راست را، باهم جمع می‌کنیم، کسری

سره به‌دست می‌آید.* اگر مخرج Q را، از دوطرف تساوی، حذف کنیم، به‌برابری دوچند جمله‌ای درجهٔ $(n-1)$ می‌رسیم که، نسبت به x، یك اتحاد است. اگر ضریب جمله‌های متشابه را، در دو طرف تساوی، برابر قرار دهیم، دستگاهی از n معادلهٔ خطی به‌دست می‌آید که، به‌کمك آن‌ها، همهٔ ضریب‌های حرفی، پیدا می‌شوند. با توجه به‌این‌که، امکان تجزیهٔ به‌کسرهای ساده، قبلاً ثابت شده است، این دستگاه، نمی‌تواند متناقض باشد.

علاوه بر آن، چون این دستگاه معادله‌ها، با ضریب‌های دلخواه برای چندجمله‌ای P، دارای‌جواب است، الزاماً، دترمینان آن مخالف صفر خواهد بود. به‌زبان دیگر،دستگاه همیشه معین است. همین ملاحظه، ضمناً ثابت می‌کند که هرکسر سره را، تنها به‌یك طریق می‌توان به‌کسرهای ساده تجزیه‌کرد. همهٔ این‌ها را، با یك مثال روشن می‌کنیم.

کسر $\frac{۲x^۲+۲x+۱۳}{(x-۲)(x^۲+۱)^۲}$ را درنظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ کلی، می‌توان این کسر، را، به‌صورت زیر، تجزیه‌کرد:

$$\frac{۲x^۲+۲x+۱۳}{(x-۲)(x^۲+۱)^۲}=\frac{A}{x-۲}+\frac{Bx+C}{x^۲+۱}+\frac{Dx+E}{(x^۲+۱)^۲}$$

ضریب‌های A، B، C، D و E را، به‌کمك اتحاد زیر، تعیین می‌کنیم:

$$۲x^۲+۲x+۱۳=A(x^۲+۱)^۲+(Bx+C)(x^۲+۱)(x-۲)+$$
$$+(Dx+E(x-۲)$$

با برابر قراردادن ضریب‌های جمله‌های متشابه در دو طرف تساوی، به‌دستگاهی شامل ۵ معادله می‌رسیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۴ & A+B=۰ \\ x^۳ & -۲B+C=۰ \\ x^۲ & ۲A+B-۲C+D=۲ \\ x^۱ & -۲B+C-۲D+E=۲ \\ x^۰ & A-۲C-۲E=۱۳ \end{array}$$

واز آن‌جا

$$A=۱،\ B=-۱،\ C=-۲،\ D=-۳،\ E=-۴$$

*) مجموع کسرهای گویای سره، همیشه یك کسرسره است.

و بالاخره

$$\frac{۲x^۲+۲x+۱۳}{(x-۲)(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱}{x-۲}-\frac{x+۲}{x^۲+۱}-\frac{۳x+۴}{(x^۲+۱)^۲}$$

این حقیقت جبری، مستقیماً، در انتگرال‌گیری کسرهای گویا، کاربرد دارد. همان‌طور که در **۲۷۳** دیدیم، کسرهای ساده، به‌صورتی متناهی، قابل انتگرال‌گیری هستند. و حالا، می‌توانیم دربارهٔ کسر گویای دلخواه، صحبت کنیم. اگر به‌انتگرال چندجمله‌ای‌های صحیح و کسرهای ساده توجه کنیم، می‌توانیم، این نتیجه‌گیری را تنظیم کنیم:

انتگرال تابع‌های دلخواه گویا، قابل بیان به وسیلهٔ تابع‌های گویا، لگاریتم و آرك تانژانت، به‌صورتی متناهی، هستند.

مثلاً، اگر به‌مثالی که هم‌اکنون داشتیم، برگردیم، با به‌یاد آوردن رابطهٔ شمارهٔ **۲۷۳**، داریم:

$$\int\frac{۲x^۲+۲x+۱۳}{(x-۲)(x^۲+۱)^۲}dx=\int\frac{dx}{x-۲}-\int\frac{x+۲}{x^۲+۱}dx-\int\frac{۳x+۴}{(x^۲+۱)^۲}dx=$$

$$=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳-۴x}{x^۲+۱}+\frac{۱}{۲}\ln\frac{(x-۲)^۲}{x^۲+۱}+۴\operatorname{arc}tgx+C$$

۲۷۶. جدا کردن بخش گویای انتگرال. روشی وجود دارد که متعلق به م. و. اوستروگرادسکی است و، به‌کمك آن، می‌توان انتگرال کسرهای سرهٔ گویا را، خیلی ساده کرد. با این روش، می‌توان، از طریق خالص جبری، قسمت گویای انتگرال را جدا کرد.

دیدیم [**۲۷۳**] که جمله‌های گویا، در ترکیب انتگرال، ضمن انتگرال‌گیری کسرهای سادهٔ به‌صورت II و IV به‌دست می‌آیند. درحالت اول، می‌توان انتگرال را یك‌باره نوشت:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\frac{A}{k-۱}\cdot\frac{۱}{(x-a)^{k-۱}}+C \qquad (۷)$$

ببینیم، بخش گویای انتگرال زیر، چه‌صورتی دارد:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^۲+px+q)^m}dx \quad \left(m>۱,\ q-\frac{p^۲}{۴}>۰\right)$$

به‌تغییرمتغیر $x+\frac{p}{۲}=t$ متوسل می‌شویم؛ از برابری‌های (۱) و (۲) و رابطهٔ (۶) شمارهٔ **۲۷۱**، به ازای $n=m-۱$، استفاده می‌کنیم. اگر دوباره به‌متغیر x برگردیم،

به‌دست می‌آید:

$$\int \frac{Mx+n}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}$$

که در آن، M'، N' و α، ضریب‌های ثابتی هستند. ازروی همین رابطه، وبا عوض کردن m به $m-1$، برای انتگرال بعدی به‌دست می‌آید (اگر $m>2$)

$$\int \frac{\alpha dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}}$$

وغیره، تا آن‌جا که نمای سه‌جمله‌ای x^2+px+q، در انتگرال سمت راست، برابرواحد شود.

همهٔ جمله‌های گویای متوالی، که از انتگرال جداشده‌اند کسرهایی سره هستند. اگر آن‌ها را، به‌صورت یك کسر، جمع کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \lambda\int \frac{dx}{x^2+px+q} \qquad (۸)$$

که در آن، $R(x)$، چندجمله‌ای صحیح با درجه‌ای کمتر از مخرج، و λ مقدار ثابتی است.

کسر سرهٔ $\frac{P}{Q}$ را، تحویل‌ناپذیر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که مخرج آن، Q، به‌عامل‌های ساده، تجزیه شده باشد [(۳) را ببینید]. انتگرال این کسر، به‌صورت مجموعی از انتگرال‌های کسرهای به‌صورت (۵) و (۶) درمی‌آید. اگر k (یا m) بزرگترازواحد باشد، در آن صورت، انتگرال کسرهای گروه (۵) [یا (۶)]، به‌جزاولی، ازروی رابطهٔ (۷) [یا (۸)]، تبدیل می‌شوند. با گردآوری همهٔ این نتیجه‌ها، بالاخره، به‌رابطه‌ای به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(Q)}{Q_2(x)}dx \qquad (۹)$$

بخش گویای انتگرال، یعنی $\frac{P_1}{Q_1}$، از ترکیب بخش‌های گویایی به‌دست آمده است، که قبلاً جدا شده‌اند. بنابراین، قبل ازهمه، یك کسر سره به‌دست می‌آید که مخرج Q_1 آن، دارای چنین بسطی است:

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1}\dots(x^2+px+q)^{m-1}\dots$$

کسر $\frac{P_۲}{Q_۲}$ هم، که در زیرعلامت انتگرال باقی‌مانده و از مجموع کسرهای به‌صورت I و III به‌دست آمده است، کسری سره است و داریم:

$$Q_۲(x)=(x-a)\dots(x^۲+px+q)\dots$$

و معلوم است که [(۳) را ببینید]: $Q=Q_۱.Q_۲$.

رابطهٔ (۹)، به رابطهٔ اوستروگرادسکی، معروف است.

با مشتق‌گیری، می‌توان رابطهٔ زیر را ــ که هم‌ارز رابطهٔ (۹) است ــ به‌دست آورد:

$$\frac{P}{Q}=\left[\frac{P_۱}{Q_۱}\right]'+\frac{P_۲}{Q_۲} \qquad (۱۰)$$

اگر تجزیهٔ (۳) از چندجمله‌ای Q معلوم باشد، دیدیم که به سادگی، می‌توان چندجمله‌ای‌های $Q_۱$ و $Q_۲$ را پیدا کرد. ولی این‌ها را، بدون در دست داشتن تجزیهٔ Q هم، می‌توان به‌دست آورد. درواقع، چون مشتق Q' شامل همهٔ عامل‌های سادهٔ Q، بایک‌درجه کمتر، است، بنابراین Q عبارت است از بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک Q و Q' که، می‌توان آن را، مثلاً، از راه تقسیم‌های متوالی معین کرد. وقتی $Q_۱$ معلوم باشد، $Q_۲$ را می‌توان، با تقسیم سادهٔ Q بر $Q_۱$ به‌دست آورد.

بپردازیم به‌تعیین صورت‌های $P_۱$ و $P_۲$ در رابطهٔ (۱۰). برای این منظور، از روش ضریب‌های نامعین استفاده می‌کنیم.

درجهٔ چندجمله‌ای‌های Q، $Q_۱$ و $Q_۲$ را، به‌ترتیب، n، $n_۱$ و $n_۲$ می‌گیریم، به‌طوری که $n=n_۱+n_۲$. دراین صورت، درجهٔ چندجمله‌ای‌های P، $P_۱$ و $P_۲$، به‌ترتیب، از $n-۱$، $n_۱-۱$ و $n_۲-۱$ تجاوز نمی‌کنند. $P_۱$ و $P_۲$ را، به‌صورت چندجمله‌ای‌های درجهٔ $(n_۱-۱)$ و $(n_۲-۱)$، باضریب‌های حرفی، نشان می‌دهیم؛ تعداد کل این‌ضریب‌ها، برابر $n_۱+n_۲$، یعنی n، خواهد بود. در (۱۰)، مشتق‌گیری را، انجام می‌دهیم:

$$\frac{P'_۱Q_۱-P_۱Q'_۱}{Q_۱^۲}+\frac{P_۲}{Q_۲}=\frac{P}{Q}$$

حالا، نشان می‌دهیم که کسر اول را، می‌توان همیشه، با حفظ صحیح بودن صورت کسر، با مخرج Q نوشت، یعنی

$$\frac{P'_۱Q_۱-P_۱Q'_۱}{Q_۱^۲}=\frac{P'_۱Q_۲-P_۱\dfrac{Q'_۱Q_۲}{Q_۱}}{Q_۱Q_۲}=\frac{P'_۱Q_۲-P_۱H}{Q}$$

که در آن، H عبارت است ازخارج قسمت تقسیم Q'_1Q_2 بـر Q_1. این خارج‌قسمت، یك چندجمله‌ای صحیح است، زیرا، اگر $(x-a)^k$ به‌ازای $k \geqslant 1$، در ترکیب Q_1 وجـود داشته باشد، درآن صورت، $(x-a)^{k-1}$ در Q'_1 و $x-a$ در ترکیب Q_2 وجود خواهد داشت. همین نتیجه را، درمورد عامل به صورت $(x^2+px+q)^m$ هم، به ازای $m \geqslant 1$، می‌توان به‌دست آورد. بنابراین، Q'_1Q_2 بـر Q_1 بخش‌پذیر است و H را می‌توان چند-جمله‌ای صحیحی از درجهٔ $n_2 - 1$ درنظر گرفت.

اگـر مخرج مشترك Q را کنار بگذاریم، به‌اتحادی بیـن دوچندجمله‌ای (از درجهٔ $n-1$) می‌رسیم:

$$P'_1Q_2 - P_1H + P_2Q_1 = Q$$

ازاین‌جا، دستگاهی با n معادلهٔ‌خطی، برای تعیین n ضریب‌مجهول، به‌دست‌می‌آید. چون، امکان تجزیهٔ (۱۰)، برای P دلخواه، ثابت شده است، دستگاه بدست آمده، متوافق خواهد بود. ازاین‌جا، به‌خودی خود، نتیجه می‌شودکه دترمینان آن، مخالف صفر است. به‌این‌ترتیب، دستگاه معین است و تجزیهٔ (۱۰)، برای مخرج‌های Q_1 و Q_2، تنها به‌یـك شکل ممکن است.

مثال: می‌خواهیم، بخش‌گویای انتگرال زیررا، جداکنیم:

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$$

داریم:

$$Q_1 = Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2} = \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]' + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1}$$

ازآن‌جا

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8 = (2ax+b)(x^3+x^2+x+1) -$$

$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)+(dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1)$$

که اگـر ضریب جمله‌های متشابه را، در دوطـرف تساوی، برابر قـرار دهیم، به‌دستگاه معادله‌هایی می‌رسیم، که ازآن، مجهول‌های a، b، ...، f به‌دست می‌آید.

(در بعدی‌ها، d را کنار گذاشته‌ایم)

$x^5 \mid d=0;$

$x^4 \mid -a+e=4;$

$x^3 \mid -2b+e+f=4;$

$x^2 \mid a-b-3c+e+f=16;\ a=-1,\ b=1,\ c=-4$

$x^1 \mid 2a-2c+e+f=12;\quad d=0,\ e=3,\ f=3$

$x^0 \mid b-c+f=8$

بنابراین، انتگرال مطلوب، چنین می‌شود:

$$\int \frac{x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+$$

$$+3\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+3\operatorname{arc}tg x+C$$

در این مثال، محاسبهٔ انتگرال آخری، به‌سادگی، پیدا شد، ولی درحالت کلی، باید دوباره آن‌را به‌کسرهای ساده تجزیه کرد. ضمناً، ممکن است این روند را، با روند قبلی، یکی کرد.

۲۷۷. مثال‌ها. مثال‌های دیگری، در زمینهٔ انتگرال تابع‌های گویا می‌آوریم.

۱) $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$.

در این مثال، تجزیهٔ به‌کسرهای ساده، مستقیماً به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

پاسخ: $-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{2}\operatorname{arc}tg\,x+C$

۲) $\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx$.

داریم:

$$\frac{۴x^۲+۴x-۱۱}{(۲x-۱)(۲x+۳)(۲x-۵)}=\frac{\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱۱}{۸}}{\left(x-\frac{۱}{۲}\right)\left(x+\frac{۳}{۲}\right)\left(x-\frac{۵}{۲}\right)}=$$

$$=\frac{A}{x-\frac{۱}{۲}}+\frac{B}{x+\frac{۳}{۲}}+\frac{C}{x-\frac{۵}{۲}}$$

که از آن‌جا، به‌اتحاد زیر می‌رسیم:

$$\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱۱}{۸}=A\left(x+\frac{۳}{۲}\right)\left(x-\frac{۵}{۲}\right)+B\left(x-\frac{۱}{۲}\right)\left(x-\frac{۵}{۲}\right)+$$

$$+C\left(x-\frac{۱}{۲}\right)\left(x+\frac{۳}{۲}\right)$$

به‌جای این‌که، در این اتحاد، ضریب‌های جمله‌های متشابه را، در دو طرف، برابر قرار دهیم، می‌توان x را، به‌ترتیب، برابر $\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$ گرفت و «مستقیماً» به‌دست آورد: $A=\frac{۱}{۴}$، $B=-\frac{۱}{۸}$ و $C=\frac{۳}{۸}$ (زیرا، هر بار، در سمت راست، تنها یک جمله می‌ماند).

پاسخ:
$$\frac{۱}{۴}\ln\left|x-\frac{۱}{۲}\right|-\frac{۱}{۸}\ln\left|x+\frac{۳}{۲}\right|+\frac{۳}{۸}\ln\left|x-\frac{۵}{۲}\right|+C=$$

$$=\frac{۱}{۸}\ln\left|\frac{(۲x-۱)^۲(۲x-۵)^۳}{۲x+۳}\right|+C'^{*}$$

۳) $\int\frac{dx}{x^۴+۱}$.

چون داریم:

$$x^۴+۱=(x^۴+۲x^۲+۱)-۲x^۲=(x^۲+۱)^۲-(x\sqrt{۲})^۲=$$

$$=(x^۲+x\sqrt{۲}+۱)(x^۲-x\sqrt{۲}+۱)$$

بنابراین، تجزیهٔ کسر، باید به‌این‌صورت باشد:

---

*) روشن است که مقدار ثابت C'، به‌اندازهٔ $-\frac{۱}{۲}\ln ۲$، با مقدار ثابت C فرق دارد.

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

از آن‌جا

$$1=(Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

و دستگاه معادله‌های زیر، به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0 \\ x^2 & -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \\ x^1 & A-\sqrt{2}b+C+\sqrt{2}D=0 \\ x^0 & B+D=1 \end{array}$$

و از آن‌جا

$$A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B=D=\frac{1}{2}$$

و به‌این ترتیب

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{atc}tg\,(x\sqrt{2}+1)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc}\,tg(x\sqrt{2}-1)+C$$

اگر از رابطهٔ مربوط به‌جمع آرك تانژانت‌ها استفاده کنیم [۵۰]، نتیجه را می‌توان، چنین نوشت:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc}tg\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C'$$

با وجود این، باید توجه داشت که، این عبارت، تنها در بازه‌های $(-\infty,-1)$، $(-1,1)$ و $(1,+\infty)$ به‌درد می‌خورد، زیرا درنقطه‌های $x=\pm 1$، مفهوم خودرا از دست می‌دهد. مقدار ثابت C'، در این بازه‌ها، به‌ترتیب، برابر است با

$$C-\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}},\quad C,\quad C+\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$$

تغییر جهش‌وار مقدار ثابت، در واقع، تاوانی است که به‌خاطر ناپیوستگی خود تابع در نقطه‌های $x=\pm ۱$، داده می‌شود.

۴) $\int \frac{۲x^۴-۴x^۳+۲۴x^۲-۴۰x+۲۰}{(x-۱)(x^۲-۲x+۲)^۳}dx$.

بخش گویای انتگرال را جدا می‌کنیم. داریم:

$$Q_۱=(x^۲-۲x+۲)^۲,\quad Q_۲=(x-۱)(x^۲-۲x+۲)$$

بنابراین

$$\frac{۲x^۴-۴x^۳+۲۴x^۲-۴۰x+۲۰}{(x-۱)(x^۲-۲x+۲)^۳}=$$

$$=\left[\frac{ax^۳+bx^۲+cx+d}{(x^۲-۲x+۲)^۲}\right]'+\frac{e}{x-۱}+\frac{fx+g}{x^۲-۲x+۲}$$

ضمناً، عبارت‌هایی را که هنوز زیر علامت انتگرال گیری هستند، به کسرهای ساده تبدیل می‌کنیم (بعد از جدا کردن قسمت‌های گویای انتگرال).

اتحاد

$$۲x^۴-۴x^۳+۲۴x^۲-۴۰x+۲۰=(۳ax^۲+۲bx+c)(x^۲-۲x+۲)(x-۱)$$
$$-(ax^۳+bx^۲+cx+d)\cdot ۲(۲x-۲)(x-۱)+$$
$$+e(x^۲-۲x+۲)^۳+(fx+g)(x-۱)(x^۲-۲x+۲)^۲$$

منجر به دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$\begin{array}{l|l}
x^۶ & e+f=۰,\\
x^۵ & -a-۶e-۵f+g=۰,\\
x^۴ & -a-۲b+۱۸e+۱۲f-۵g=۲,\\
x^۳ & ۸a+۲b-۳c-۳۲e-۱۶f+۱۲g=-۴,\\
x^۲ & -۶a+۴b+۵c-۴d+۳۶e+۱۲f-۱۶g=۲۴,\\
x^۱ & -۴b+۸d-۲۴e-۴f+۱۲g=-۴۰,\\
x^۰ & -۲c-۴d+۸e-۴g=۲۰
\end{array}$$

از آن‌جا

$$a=۲،\ b=-۶،\ c=۸،\ d=-۹،\ e=۲،\ f=-۲،\ g=۴$$

پاسخ: $\frac{۲x^۳-۶x^۲+۸x-۹}{(x^۲-۲x+۲)^۲}+\ln\frac{(x-۱)^۲}{x^۲-۲x+۲}+۲\operatorname{arctg}(x-۱)+C$

۵) $\int\frac{x^۶-x^۵+x^۴+۲x^۳+۳x^۲+۳x+۳}{(x+۱)^۲(x^۲+x+۱)^۳}dx$.

قسمت گویای انتگرال را جدا می‌کنیم. داریم:

$$Q_۱=(x+۱)(x^۲+x+۱)^۲،\quad Q_۲=(x+۱)(x^۲+x+۱)$$

تجزیه را به‌صورت زیر، جست و جو می‌کنیم:

$$\left[\frac{ax^۴+bx^۳+cx^۲+dx+e}{(x+۱)(x^۲+x+۱)^۲}\right]'+\frac{fx^۲+gx+h}{(x+۱)(x^۲+x+۱)}$$

از دستگاه معادله‌های

$$\begin{array}{l|l}
x^۷ & f=۰\\
x^۶ & -a+g=۱،\\
x^۵ & a-۲b+۳g+h=-۱،\\
x^۴ & ۵a-b-۳c+۵g+۳h=۱،\\
x^۳ & ۴a+۳b-۳c-۴d+۵g+۵h=۲،\\
x^۲ & ۳b+c-۵d-۵e+۳g+۵h=۳،\\
x^۱ & ۲c-d-۷e+g+۳h=۳،\\
x^۰ & d-۳e+h=۳
\end{array}$$

به‌دست می‌آید:

$$a=۱،\quad b=۰،\quad c=-۲،\quad d=۰،\quad e=-۱،\quad f=g=h=۰$$

به‌این ترتیب، در این‌جا، تمامی انتگرال، به‌تابع گویای زیر تبدیل می‌شود:

$$-\frac{x^۴+۲x^۲+۱}{(x-۱)(x^۲+x+۱)^۲}+C$$

§۳. انتگرال‌گیری بعضی عبارت‌های شامل رادیکال

۲۷۸. انتگرال عبارت‌های به‌صورت $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$*. مثال‌ها. انتگرال‌گیری به‌صورت متناهی، از تابع‌های گویا را، یادگرفتیم. روش اساسی که، بعد ازاین، برای انتگرال‌گیری از این یا آن طبقه از عبارت‌های دیفرانسیلی، به‌کار می‌بریم، عبارت است ازجست‌وجوی چنان تبدیل $t=\omega(x)$، که عبارت زیر انتگرال را، به‌صورت گویا درآورد و امکان محاسبهٔ انتگرال را، به‌صورت تابعی از t ومتناهی، به‌دست بدهد. اگر ضمناً، خود تابع $\omega(x)$، که باید به جای t گذاشته شود، برحسب تابع‌های مقدماتی بیان شود، آن‌گاه، انتگرال، به‌صورت متناهی و به‌صورت تابعی از x درمی‌آید.

این طریق را، روش گویا کردن عبارت زیر انتگرال می‌نامیم.

به‌عنوان مثال اول، برای‌کاربرد این روش، این انتگرال را درنظر می‌گیریم:

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx, \qquad (۱)$$

که درآن، R تابع گویایی از دوآوند خود، m عددی طبیعی و α، β، γ و δ، مقدارهایی ثابت هستند.

فرض می‌کنیم:

$$t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\quad t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}$$

و انتگرال به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt$$

دراین‌جا، دیگر دیفرانسیل، به صورت گویاست، زیرا، R، φ و φ' تابع‌هایی‌گویا هستند. این انتگرال را، به‌کمک‌قاعده‌های بند قبل‌محاسبه می‌کنیم و، سپس، با گذاشتن $t=\omega(x)$، به‌متغیر قدیم برمی‌گردیم.

انتگرال کلی‌تر زیرهم، به‌همان انتگرال (۱)، منجر می‌شود:

---

*) در این‌جا، یك بار و برای همیشه، یادآوری می‌کنیم که حرف R، علامت تابع گویا نسبت به‌آوندهای خودش می‌باشد

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{r}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{s}, \dots\right) dx,$$

که در آن، همهٔ نماهای r، s، ... گویا هستند. کافی است، این نماها را با مخرج مشترک m بنویسیم، تا در زیرعلامت انتگرال، تابع گویایی از دو آوند x و $\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ داشته باشیم.

مثال‌ها: ۱) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx$.

در این‌جا، تابع کسری خطی $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$، به‌تابع خطی ساده، تبدیل شده است. فرض می‌کنیم:

$$t=\sqrt{x+1},\quad dx=2t\,dt$$

بنابراین

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx = 2\int \frac{t+2}{t^3-1} dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1}\right) dt = \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

که تنها باید، در آن، $t=\sqrt{x+1}$ را قرارداد.

۲) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}$.

فرض می‌کنیم: $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$، $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$، $dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}$. آن‌گاه

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} = \int \frac{-x\,dt}{t^3-1} = \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C$$

که در آن داریم: $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

۲۷۹. انتگرال دیفرانسیل‌های دوجمله‌ای. مثال‌ها. دیفرانسیل‌های به‌صورت

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

که در آن، a و b ثابت‌های دلخواه و نماهای m، n و p، عددهایی گویا هستند، دیفرانسیل‌های دوجمله‌ای نامیده می‌شوند. می‌خواهیم، حالت‌هایی را پیدا کنیم که بتوان از این عبارت‌ها، به‌صورت متناهی، انتگرال گرفت.

یکی از این حالت‌ها، روشن است: اگر p عددی صحیح باشد (مثبت، صفر یا منفی)، آن‌گاه عبارت فوق به‌صورتی درمی‌آید، که قبلاً دربارهٔ آن بحث کرده‌ایم. اگر کوچکترین مخرج مشترک کسرهای m و n را به λ نشان دهیم، عبارت بالا به صورت $R(\sqrt[\lambda]{x})dx$ درمی‌آید، به‌نحوی که برای گویا کردن آن، کافی است $t=\sqrt[\lambda]{x}$ بگیریم.

حالا، عبارت مفروض را، با تغییر متغیر $z=x^n$ تبدیل می‌کنیم. آن‌وقت

$$x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{n}(a+bz)^p . z^{\frac{m+1}{n}-1} dz$$

برای سادگی کار، فرض می‌کنیم:

$$\frac{m+1}{n}-1=q$$

خواهیم داشت:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{n}\int (a+bz)^p . z^q dz \qquad (۲)$$

اگر q، عددی صحیح باشد، دوباره به‌عبارتی می‌رسیم که دربارهٔ آن صحبت کرده‌ایم. درواقع، اگر مخرج کسر p را با ν نشان دهیم، عبارت تبدیل شده، به صورت $R(z,\sqrt[\nu]{a+bz})$ در می‌آید، که برای گویا کردن عبارت زیر انتگرال، می‌توان، این تغییر متغیر را داد:

$$t=\sqrt[\nu]{a+bz}=\sqrt[\nu]{a+bx^n})$$

بالاخره، انتگرال دوم از انتگرال‌های (۲) را، این‌طور می‌نویسیم:

$$\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p . z^{p+q} dz$$

به‌سادگی می بینیم که، اگر $p+q$ عددی صحیح باشد، بازهم به‌حالت شناخته شده‌ای می‌رسیم: عبارت تبدیل شده، دارای صورت $R\left(z, \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\right)$ می‌باشد و عبارت زیر انتگرال، با این تغییر متغیر، گویا می‌شود:

$$t=\sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}$$

به‌این‌ترتیب، به‌شرطی که یکی از عددهای

$$p,\ q,\ p+q$$

ویا (هم‌ارز آن)، یکی از عددهای

$$p,\ \frac{m+1}{n},\ \frac{m+1}{n}+p$$

عددی صحیح باشد، انتگرال (۲)، به‌صورتی متناهی قابل بیان است.

این حالت‌های انتگرال‌پذیر، درواقع، برای نیوتون هم روشن بودند. ولی، در میانه‌های سدهٔ گذشته بود که پ. ل. چبیشف، توانست این واقعیت مهم را ثابت کند که، برای دیفرانسیل‌های دوجمله‌ای، حالت‌های دیگری که به‌صورت متناهی انتگرال‌پذیر باشند، وجود ندارد.

چند مثال می آوریم.

۱) $$\int \frac{\sqrt[۳]{۱+\sqrt[۴]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{۱}{۲}}(۱+x^{\frac{۱}{۴}})^{\frac{۱}{۳}}dx.$$

در این‌جا $m=-\frac{۱}{۲}$، $n=\frac{۱}{۴}$ و $p=\frac{۱}{۳}$ است. به‌طوری که

$$\frac{m+۱}{n}=\frac{-\frac{۱}{۲}+۱}{\frac{۱}{۴}}=۲$$

بنابراین، به‌حالت دوم انتگرال‌پذیری می‌رسیم. با توجه به‌این‌که $\nu=۳$ (از روی قاعدهٔ کلی) فرض می‌کنیم:

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},\ x=(t^3-1)^4,\quad dx=12t^2(t^3-1)^3dt$$

آن‌وقت

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int(t^6-t^3)\,dt=\frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C$$

۲) $$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx.$$

این‌بار $m=0$، $n=4$ و $p=-\frac{1}{4}$ و باحالت سوم انتگرال‌پذیری سروکاردارایم، زیرا $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$. این‌جا $v=4$؛ فرض می‌کنیم

$$t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x},\ x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$$

$$dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt$$

به‌نحوی که

$$\sqrt[4]{1+x^4}=tx=t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}t+C$$

۳) $$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}dx.$$

در این‌جا $m=-1$، $n=5$، $p=-\frac{1}{3}$؛ حالت دوم: $\frac{m+1}{n}=0$، $v=3$. فرض می‌کنیم؛

$$t=\sqrt[5]{1+x^5},\ x=(t^5-1)^{\frac{1}{5}},\ dx=\frac{3}{5}t^2(t^5-1)^{-\frac{4}{5}}dt$$

داریم:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[5]{1+x^5}}=\frac{3}{5}\int\frac{tdt}{t^3-1}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

۲۸۰. رابطه‌های کاهشی. چون انتگرال دیفرانسیل دوجمله‌ای را، همیشه می‌توان، به‌صورت زیر تبدیل کرد [(۲) را ببینید].

$$J_{p,q}=\int(a+bz)^p\cdot z^q dz \qquad (۳)$$

از این به‌بعد، به‌بررسی همین انتگرال‌ها، اکتفا می‌کنیم.

یك رشته از رابطه‌های کاهشی را می‌آوریم که، به‌کمك آن‌ها، می‌توان انتگرال (۳) را، درحالت کلی، برحسب انتگرال مشابه $J_{p',q'}$ بیان کرد که، در آن، p' و q' به‌اندازهٔ عددهای درستی، از p و q تفاوت دارند.

با انتگرال‌گیری از اتحادهای

$$(a+bz)^{p+1}\cdot z^q=a(a+bz)^p\cdot z^q+b(a+bz)^p\cdot z^{q+1}$$

$$\frac{d}{dz}[(a+bz)^{p+1}\cdot z^{q+1}]=(p+1)b(a+bz)^p\cdot z^{q+1}+$$

$$+(q+1)(a+bz)^{p+1}\cdot z^q$$

داریم:

$$J_{p+1,q}=aJ_{p,q}+bJ_{p,q+1}$$

$$(a+bz)^{p+1}\cdot z^{q+1}=(p+1)bJ_{p,q+1}+(q+1)J_{p+1,q}$$

از این‌جا، اولین دو رابطه به‌دست می‌آید:

$$\text{(I)}\quad J_{p,q}=-\frac{(a+bz)^{p+1}\cdot z^{q+1}}{a(p+1)}+\frac{p+q+2}{a(p+1)}J_{p+1,q} \qquad (p\neq-1)$$

$$\text{(II)}\quad J_{p,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}\cdot z^{q+1}}{a(q+1)}-b\,\frac{p+q+2}{a(q+1)}J_{p,q+1} \qquad (q\neq-1)$$

که به بزرگتر کردن نمای p یا q، به اندازهٔ یك واحد (به‌شرطی کـه مخالف ۱ — باشد) امکان می‌دهد.

اگر این معادله‌ها را نسبت به $J_{p+1,q}$ و $J_{p,q+1}$ حل و p و q را، به‌ترتیب، بـه $p-1$ و $q-1$ تبدیل کنیم، به‌رابطه‌های زیر می‌رسیم:

$$(III)\quad J_{p,q}=\frac{(a+bz)^p.z^{q+1}}{p+q+1}+\frac{ap}{p+q+1}J_{p-1,q}\qquad (p+q\neq -1)$$

$$(IV)\quad J_{p,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}.z^q}{b(p+q+1)}-\frac{aq}{b(p+q+1)}J_{p,q-1}$$

که به‌کمتر کردن نمای p یا q به‌اندازهٔ یك واحد (به‌شرطی کـه مجموع $p+q$ مخالف ۱ — باشد)، امکان می‌دهد.

درحالتی که‌هیچ‌کدام از عددهای p، q یا $p+q$، عددهای درستی نباشند (به‌نحوی که، انتگرال $J_{p,q}$ را نتوانیم، به‌صورت متناهی، برحسب تابع‌های مقدماتی، بیان کنیم)، می‌توانیم ازدستورهای کاهشی، بدون هیچ محدودیتی، استفاده‌کنیم. به‌کمك آن‌ها، می‌توان پارامترهای p و q را، مثلاً، به‌صورت کسرهای سره درآورد

جالب‌ترین حالت برای ما، وقتی است که انتگرال، به‌صورت‌متناهی درآید. ضمناً، می‌توان تنها به‌نمای صحیح p یا q توجه‌کرد، زیرا حالت صحیح‌بودن $p+q$، با تبدیل $z=\frac{1}{u}$، به‌همان حالت صحیح بودن q، منجر می‌شود.

آن‌وقت، اگر، پشت سر هم، از رابطه‌های بالا استفاده‌کنیم، می‌توانیم نمای صحیح p یا q را تا صفر (اگـر مثبت باشد) و تا ۱ — (اگـر منفی باشد) پایین بیاوریم. به‌این ترتیب عمل‌ما، یا باانتگرال‌گیری تمام می‌شود و یا، به‌طورقابل‌ملاحظه‌ای، ساده می‌شود.

مثال‌ها. ۱) این انتگرال را در نظر می‌گیریم*:

$$H_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx\quad (m،\text{ عددی درست})$$

---

*) به‌ترتیب مشابهی، می‌توان انتگرال‌های زیر را هم، بررسی کرد:

$$\int\frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}}dx,\qquad \int\frac{x^m}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

در این جا داریم: $n=۲$ و $p=-\frac{۱}{۲}$. بنابراین، با فرد بودن m، عدد $\frac{m+۱}{n}=\frac{m+۱}{۲}$ و با زوج بودن m، عدد $\frac{m+۱}{n}+p=\frac{m+۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{m}{۲}$، صحیح می‌شود. به نحوی که، در هر حالت، انتگرال، به صورت متناهی محاسبه می‌شود. با تبدیل $z=x^۲$، به‌انتگرال زیرمنجر می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}\int(۱-z)^{-\frac{۱}{۲}}\cdot z^{\frac{m-۱}{۲}}dz=\frac{۱}{۲}J_{-\frac{۱}{۲},\frac{m-۱}{۲}}$$

با فرض $m>۱$، رابطهٔ (IV) را، برای انتگرال اخیر به‌کار می‌بریم، به‌دست می‌آید:

$$J_{-\frac{۱}{۲},\frac{m-۱}{۲}}=-۲\frac{(۱-z)^{\frac{۱}{۲}}\cdot z^{\frac{m-۱}{۲}}}{m}+\frac{m-۱}{m}J_{-\frac{۱}{۲},\frac{m-۳}{۲}}$$

و یا بر برگشت به‌انتگرال مفروض

$$H_m=-\frac{۱}{m}x^{m-۱}\sqrt{۱-x^۲}+\frac{m-۱}{m}H_{m-۲}$$

اگر از این رابطه، پشت سر هم، استفاده کنیم، با کم شدن m به‌اندازهٔ ۲، در حالتی که m فرد باشد، به‌انتگرال

$$H_۱=\int\frac{xdx}{\sqrt{۱-x^۲}}=-\sqrt{۱-x^۲}+C$$

و در حالتی که m زوج باشد، به‌انتگرال زیر می‌رسیم:

$$H_۰=\int\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}=\arcsin x+C$$

حالا فرض می‌کنیم $m<-۱$، به‌نحوی که $m=-\mu$ و $\mu>۱$. این بار، از رابطهٔ (II) استفاده می‌کنیم:

$$J_{-\frac{۱}{۲},\frac{m-۱}{۲}}=۲\frac{(۱-z)^{\frac{۱}{۲}}\cdot z^{\frac{m+۱}{۲}}}{m+۱}+\frac{m+۲}{m+۱}J_{-\frac{۱}{۲},\frac{m+۱}{۲}}$$

از آن‌جا

$$H_{-\mu}=-\frac{x^{-(\mu-1)}\sqrt{1-x^2}}{\mu-1}+\frac{\mu-2}{\mu-1}H_{-(\mu-2)}$$

به‌کمك این رابطه، می‌توانیم مقدار μ را، مرتباً، به‌اندازهٔ ۲ واحد کوچك کنیم و، در نتیجه، محاسبهٔ $H_{-\mu}$ یا به

$$H_{-1}=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$$

(وقتی‌که μ فرد باشد) و یا به

$$H_{-2}=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

(وقتی‌که μ زوج باشد)، منجر می‌شود.

۲) اگر در مورد انتگرال*

$$J_{n+1}=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{1}{2}\int(a^2+z)^{-(n+1)}\cdot z^{-\frac{1}{2}}dz=J_{-(n+1),\,-\frac{1}{2}}$$
$$(n=1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

رابطهٔ (I) را به‌کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$J_{-(n+1),\,-\frac{1}{2}}=\frac{(a^2+z)^{-n}\cdot z^{\frac{1}{2}}}{na^2}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_{-n,\,-\frac{1}{2}}$$

آن‌وقت، اگر به J_n برگردیم، به‌رابطهٔ کاهشی معلوم [**۲۷۱**، (۶)]، می‌رسیم:

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n$$

۲۸۱. انتگرال عبارت‌های به صورت $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$. تبدیل‌های اولر به‌بررسی طبقهٔ بسیار مهمی از انتگرال‌ها، می‌پردازیم:

---

*) به‌ترتیب مشابهی، انتگرال زیر را هم، می‌توان بررسی کرد:

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad (۴)$$

طبعاً، فرض بر این است که سه جمله‌ای درجه دوم زیر رادیکال، ریشه‌های برابر ندارد، یعنی نمی‌توان رادیکال را، با عبارت گویایی، جانشین کرد. سه نوع تبدیل را یاد می‌گیریم، که به‌تبدیل‌های اولر (L. Euler) معروف‌اند و، به‌کمک آن‌ها، همیشه‌می‌توان، عبارت زیر انتگرال (۴) را، به‌عبارتی گویا، منجر کرد.

I. تبدیل برای حالت $a>0$. فرض می‌کنیم:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x \quad (*)$$

دو طرف را مجذور می‌کنیم (با حذف ax^2 از دو طرف برابری)، به‌دست می‌آید:

$$bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx$$

به‌نحوی که

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

همهٔ امتیاز تبدیل اولر در این‌است که، برای تعیین x، معادله‌ای درجهٔ اول به‌دست‌می‌آید، به‌طوری که x، و همراه با آن، رادیکال $\sqrt{ax^2+bx+c}$، نسبت به t، به صورتی گویا بیان می‌شوند.

اگر عبارت حاصل را، در (۴) بگذاریم، مساله، منجر به‌انتگرال‌گیری تابعی گویا نسبت به t می‌شود. در پایان، باید، برای برگشتن به متغیر x، قرار دهیم:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x.$$

II. تبدیل برای حالت $c>0$. در این حالت، می‌توان فرض کرد:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c} \quad (**)$$

---

*) می‌شد به‌این‌ترتیب فرض کرد،

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}x$$

**) می‌توان فرض کرد، $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$.

اگر دوطرف برابری را مجذور و c را از دوطرف حذف کنیم، با اختصار به x، به‌دست می‌آید:

$$ax+b=xt^2+2\sqrt{c}\,t$$

که، بازهم نسبت به x، معادله‌ای درجهٔ اول است. از این‌جا

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}}{a-t^2},$$

$$bx=2\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a-t^2)^2}dt$$

که اگر در (۴) قرار دهیم، عبارت زیر انتگرال، به صورتی گویا درمی‌آید. بعد از انتگرال‌گیری، به‌دست می‌آید:

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$$

یادداشت I. حالت‌هایی را که، در این جا، بررسی کردیم ($a>0$ و $c>0$)، می‌توان با در نظر گرفتن $x=\frac{1}{z}$ به‌یکدیگر تبدیل کرد. بنا بر این، همیشه می‌توان، از تبدیل دوم صرف‌نظر کرد.

III. بالاخره به‌حالتی می‌پردازیم که سه‌جمله‌ای درجه‌دوم ax^2+bx+c، دارای ریشه‌های حقیقی (و مختلف) λ و μ باشد. می‌دانیم، که در این حالت، سه‌جمله‌ای قابل تجزیه به‌عامل‌های خطی است:

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$$

فرض می‌کنیم:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$$

اگر دوطرف را مجذور و، سپس، به $x-\lambda$ ساده کنیم، دوباره، به‌معادله درجه اول، نسبت به x، می‌رسیم:

$$a(x-\mu)=t^2(x-\lambda)$$

و در نتیجه

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},$$

$$dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt$$

ادامهٔ کار، روشن است.

یادداشت II. در این فرض، رادیکال $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}$ را، می‌توان این‌طور نوشت (برای مشخص بودن وضع، $x>\lambda$ می‌گیریم):

$$(x-\lambda)\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

به‌نحوی که خواهیم داشت:

$$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})=R\left(x,\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\right)$$

و این، همان حالتی است که در شمارهٔ **۲۷۸** دیده‌ایم. تبدیل اولر، (III)، که می‌توان آن را، به‌صورت

$$t=\sqrt{a\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

نوشت، با تبدیلی که در شمارهٔ **۲۷۸** داشتیم، یکی است.

می‌توان ثابت کرد که تبدیل‌های I و III اولر، در همهٔ حالت‌ها، برای گویا کردن عبارت زیر انتگرال (۴)، کافی است. در واقع، اگر سه‌جمله‌ای ax^2+bx+c، دارای ریشه‌های حقیقی باشد، همان طور که دیدیم، می‌توان تبدیل III را به‌کار برد. اگر هم ریشه‌های حقیقی وجود نداشته باشد، یعنی $b^2-4ac<0$، در آن صورت، سه‌جمله‌ای

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[(ax+b)^2+(4ac-b^2)]$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای متغیر x، همان علامت a را دارد. حالت $a<0$ برای ما جالب نیست، زیرا رادیکال مقداری موهومی می‌شود. در حالت $a>0$ هم، می‌توان تبدیل I را به‌کار برد.

این ملاحظه‌ها، ما را به‌حکم کلی زیر می‌رساند:

انتگرال ازگونهٔ (۴)، همیشه به صورتی متناهی قابل محاسبه است. ضمناً، برای بیان این انتگرال، به جز تابع‌هایی که، برحسب آن‌ها، انتگرال‌های دیفرانسیل‌های گویا بیان شده‌اند، تنها به ریشه‌های دوم نیاز داریم.

۲۸۲. تغییر هندسی تبدیل‌های اولر. تبدیل‌های اولر را، که فوق‌العاده هنرمندانه به‌نظر می‌آیند، می‌توان از ملاحظه‌های روشن هندسی، به‌دست آورد.

منحنی درجه دوم

$$y=\pm\sqrt{ax^2+bx+c} \quad \text{یا} \quad y^2=ax^2+bx+c$$

را در نظر می‌گیریم. اگر نقطهٔ دلخواه (x_0, y_0) را، روی این منحنی، انتخاب کنیم، به‌نحوی که

$$y_0^2=ax_0^2+bx_0+c \qquad (۵)$$

قاطعی که از این نقطه می‌گذرد، یعنی $y-y_0=t(x-x_0)$، منحنی را، در نقطهٔ دیگر (x, y) هم قطع می‌کند، که مختصات آن را، با محاسبهٔ ساده‌ای می‌توان به‌دست آورد. اگر y را، بین معادلهٔ منحنی و معادلهٔ قاطع، حذف کنیم، نتیجه می‌شود:

$$[y_0+t(x-x_0)]^2=ax^2+bx+c$$

که از آن جا، با در نظر گرفتن (۵):

$$2y_0t(x-x_0)+t^2(x-x_0)^2=a(x^2-x_0^2)+b(x-x_0)$$

و یا، بعد از اختصار به $x-x_0$:

$$2y_0t+t^2(x-x_0)=a(x+x_0)+b$$

به‌این ترتیب، طول x، و همراه با آن، عرض y، از نقطهٔ تقاطع، به وسیلهٔ تابعی که، نسبت به‌ضریب زاویهٔ t گویاست، بیان می‌شود. ضمناً، روشن است که، با تغییرمناسب t، می‌توان نقطهٔ (x, y) را واداشت تا تمامی منحنی را بپیماید.

حالا، روشن می‌شود که بستگی

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-y_0=t(x-x_0)$$

چنان تبدیلی را معین می‌کند که موجب گویاشدن عبارت زیر انتگرال (۴) می‌شود.

فرض کنید، سه‌جمله‌ای ax^2+bx+c، دارای ریشه‌های λ و μ باشد. این، به‌معنای آن است که منحنی ما، محور x را، در نقطه‌های $(\lambda, 0)$ و $(\mu, 0)$ قطع می‌کند. اگر یکی از آن‌ها، و مثلاً اولی را، به‌نقطهٔ (x_0, y_0) وصل کنیم، به‌تبدیل III اولر می‌رسیم:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$$

اگر داشته باشیم $c>0$، در آن صورت، منحنی محور y را، درنقطه‌های $(0, \pm\sqrt{c})$ قطع می‌کند و با وصل کردن یکی از آن‌ها، به‌نقطهٔ (x_0, y_0)، تبدیل II اولر را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{c}=tx$$

سرانجام، براساس همین اندیشه، می‌توانیم تبدیل I اولر را هم به‌دست آوریم. تنها باید به‌جای نقطهٔ (x_0, y_0)، نقطهٔ بی‌نهایت دور منحنی را اختیار کنیم. وقتی داشته باشیم $a>0$ (دراین حالت، منحنی، یك‌هذلولی است)، مجانب‌های منحنی، یعنی $y=\pm\sqrt{a}x$ را در نظر می‌گیریم و برخورد منحنی را با خطهای $y=t\pm\sqrt{a}x$ ــ موازی مجانب‌ها ــ پیدا می‌کنیم (این‌ها، از نقطه‌های بی‌نهایت دور نامبرده، می‌گذرند). هر کدام از این خطها، منحنی را، در نقطهٔ دوم (x, y) قطع می‌کند که، مختصات آن، تابع گویائی از t خواهد بود. از آن جا، این تبدیل به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x$$

۲۸۳. مثال‌ها. دو انتگرال پایه‌ای زیر را می‌شناسیم [۲۶۹، ۹) و ۱۲)؛ ۲۶۸]:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

که با در نظر گرفتن آن‌ها، می‌توان انتگرال‌های دیگری را هم محاسبه کرد.

۱) $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$. برای محاسبهٔ این انتگرال، دو حالت در نظر می‌گیریم: $\alpha>0$ و $\alpha<0$. در حالت $a>0$، به‌سادگی، به‌نخستین انتگرال پایه می‌رسیم $\left(\frac{\beta}{\alpha}=\pm a^2\right)$:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{\beta}{\alpha}}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{\beta}{\alpha}}\right|+C$$

و نیز ممکن است آرگومان لگاریتم را در α ضرب کرد که منجر به جملهٔ اضافی $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\alpha$ می‌شود و، در نتیجه، تنها روی C اثر می‌گذارد و نتیجه می‌گیریم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\underset{(\alpha>0)}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln|\alpha x+\sqrt{\alpha(\alpha x^2+\beta)}|+C'} \qquad (۶)$$

در حالتی که داشته باشیم $\alpha<0$، داریم $\alpha=-|\alpha|$. رادیکال را به‌این صورت می‌نویسیم: $\sqrt{\beta-|\alpha|x^2}$. برای این که رادیکال حقیقی باشد. در این جا، باید داشته باشیم: $\beta>0$. درنتیجه، به‌دومین انتگرال پایه‌ای می‌رسیم $\left(\frac{\beta}{|\alpha|}=a^2\right)$ و

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\underset{(\alpha<0)}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}}x\right)+C} \qquad (۷)$$

با شیوه‌های مقدماتی، بسیاری از انتگرال‌های دیگر را، می‌توان، به‌انتگرال‌های (۶) و (۷) تبدیل کرد. مثلاً

۲) $\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx$. با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، عمل می‌کنیم:

$$\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx=x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int x\cdot d\sqrt{\alpha x^2+\beta}=$$

$$=x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int\frac{\alpha x^2}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-$$

$$-\int\frac{(\alpha x^2+\beta)-\beta}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=x\sqrt{\alpha x^2+\beta}-\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx+\beta\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+\beta}}$$

در سمت راست، بازهم همان انتگرال مجهول پیدا می‌شود، آن را به سمت چپ منتقل می‌کنیم. بعد از تقسیم دو طرف بر ۲، نتیجه می‌شود:

$$\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{\alpha x^2+\beta}+\frac{\beta}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} \qquad (۸)$$

برای به‌دست آوردن نتیجهٔ آخر، باید به‌جای انتگرال سمت راست، مقدار آن را از (۶)

یا (۷)، برحسب آن‌که $\alpha>0$ یا $\alpha<0$ باشد، بگذاریم:

۳) (a) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$ (b)· $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$ (c)· $\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}$·

با تبدیل سادهٔ $x=\frac{1}{t}$، $dx=-\frac{1}{t^2}dt$، همهٔ این انتگرال‌ها، به‌انتگرال‌های ساده‌ای تبدیل می‌شوند. داریم (برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم: $t>0$ ،x):

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}} \qquad \text{(a)}$$

محاسبهٔ بعدی، برحسب علامت β، از روی رابطهٔ (۶) یا (۷)، انجام می‌شود.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}}=-\frac{1}{\beta}\sqrt{\alpha+\beta t^2}+C= \qquad \text{(b)}$$

$$=-\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{\beta x}+C$$

$$\int\frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}=-\int\frac{tdt}{(\alpha+\beta t^2)^{\frac{3}{2}}}= \qquad \text{(c)}$$

$$=-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}}+C=-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}+C$$

۴) انتگرال‌های زیر را می‌توان، با تبدیل اتحادی عبارت زیر انتگرال، به‌انتگرال‌های معلوم، تبدیل کرد:

$$\text{(a)}\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}},\quad \text{(b)}\int\frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{x}dx,\quad \text{(c)}\int\frac{x^2dx}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

داریم:

$$\text{(a)}\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}=\frac{1}{\alpha}\int\frac{(\alpha x^2+\beta)-\beta}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int\sqrt{\alpha x^2+\beta}dx-\frac{\beta}{\alpha}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$$

و یا با استفاده از رابطهٔ (۸)، خواهیم داشت:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} = \frac{1}{2\alpha} x\sqrt{\alpha x^2+\beta} - \frac{\beta}{2\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$$

و غیره. [(۱) را ببینید].

$$\text{(b)} \quad \int \frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{x} dx = \int \frac{\alpha x^2+\beta}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}} dx =$$

$$= \alpha \int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} + \beta \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$$

انتگرال اولی، مستقیماً، محاسبه می‌شود و انتگرال دوم را هم، در ۳) محاسبه کرده‌ایم.

$$\text{(c)} \quad \int \frac{x^2}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

[(۱) و ۳) را ببینید].

۵) اگر سه‌جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c، زیر رادیکال باشد، بهتر است: با یك تبدیل خطی، آن را به‌دوجمله‌ای تبدیل کنیم؛ به‌این ترتیب که، ابتدا، مربع کامل آن را جدا می کنیم:

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]$$

و سپس، فرض می کنیم $t = 2ax+b$. به‌این ترتیب، به‌ازای $a>0$، مثلاً از رابطه‌های (۶) و (۷) داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}|+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right|+C' \qquad (6^*)$$

و به‌ازای $a<0$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2-bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C \qquad (7^*)$$

۶) به‌تبدیل اولر برمی‌گردیم. در ۲۶۹. ۱۲)، تبدیل I را برای محاسبهٔ انتگرال

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

به‌کار بردیم. با وجودی که انتگرال اصلی دوم

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

از ملاحظه‌های مقدماتی، برای ما معلوم است، به‌عنوان تمرین، تبدیل اولر را، در مورد آن به‌کار می‌بریم.

(a) ابتدا، تبدیل III را به‌کار می‌بریم: $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x)$، بنابراین

$$x = a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4atdt}{(t^2 + 1)^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1}$$

و در نتیجه

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a + x}{a - x}} + C$$

که با توجه به اتحاد

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a + x}{a - x}} = \arcsin\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \quad (-a < x < a)$$

نتیجه‌ای که در این جا، برای انتگرال، به‌دست آوردیم، تنها در شکل ظاهری خود، با نتیجه‌ای که از قبل می‌دانستیم، تفاوت دارد.

باید به این نکته توجه داشت که ممکن است، برای انتگرال‌ها، بسته به روشی که برای محاسبهٔ آن‌ها به‌کار می‌بریم، شکل‌های گوناگونی به دست آید.

(b) اگر در همان انتگرال، تبدیل II را به‌کار بریم: $\sqrt{a^2 - x^2} = xt - a$، نتیجه می‌شود:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -2\int \frac{dt}{t^2 + 1} = -\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C$$

در این‌جا، به‌کیفیت جالبی برمی‌خوریم*. این نتیجه، به‌طور جداگانه، برای بازهٔ $(-a, 0)$ و برای بازهٔ $(0, a)$ مناسب است، ولی در نقطهٔ $x = 0$، عبارت

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

مفهوم خود را از دست می‌دهد. حدهای این عبارت، برای $x \to -0$ و برای $x \to +0$، متفاوت‌اند: این حدها، به‌ترتیب، برابرند با π و $-\pi$. اگر در این بازه‌ها، مقدارهای مختلفی برای C انتخاب کنیم، به‌نحوی که دومی به‌اندازهٔ 2π بیشتر از اولی باشد، می‌توان تابعی تشکیل داد که، در تمامی بازهٔ $(-a, a)$ پیوسته باشد، به شرطی که مقدار آن را به‌ازای $x = 0$، حد مشترک چپ و راست آن بگیریم.

این‌بار هم، به‌همان نتیجهٔ قبل، منتهی با شکل دیگری می‌رسیم، زیرا اتحادهای زیر درست است:

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} - \pi & (0 < x < a) \\ \arcsin\dfrac{x}{a} + \pi & (-a < x < 0) \end{cases}$$

۷) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

(a) ابتدا، تبدیل I را به‌کار می‌بریم: $\sqrt{x^2-x+1} = t - x$:

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1}, \quad dx = 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt,$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt =$$

$$= \int\left[\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1} + 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| + C$$

که اگر در آن قرار دهیم: $t = x + \sqrt{x^2-x+1}$، سرانجام، به‌دست می‌آید:

---

*) با مثال ۳) شمارهٔ **۲۷۷** مقایسه کنید.

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}-$$

$$-\frac{2}{3}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|+2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|+C$$

(b) حالا از تبدیل II استفاده می‌کنیم: $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$:

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1},\quad dx=-2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt,\quad \sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1},$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt=$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt=$$

$$=\frac{3}{t+1}+2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C'$$

می‌ماند قرار دهیم: $t=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$، که بعد از اختصارهای لازم، نتیجه می‌شود:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}+$$

$$+2\ln|\sqrt{x^2-x+1}+1|-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}-x+1|-$$

$$-\frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}+x+1|+C'$$

اگرچه، این نتیجه، در ظاهر، با نتیجه قبلی فرق دارد، ولی اگر $C'=C+\frac{3}{2}$ بگیریم، با آن متحد می‌شود.

۸) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

(a) چون ریشه‌های عبارت زیر رادیکال حقیقی هستند، می‌توان از تبدیل III استفاده کرد: $\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x)$. در اینجا $-a<x<a$ و $t>0$. داریم:

$$x=a\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{4atdt}{(t^2+1)^2},\quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1},$$

$$x^2+a^2=\frac{2a^2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}$$

و در نتیجه

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2a^2}\int\frac{2t^2+2}{t^4+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int\left[\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)]+C$$

که در آن، باید $t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ قرار داد.

با استفاده از رابطهٔ مربوط به جمع آرك تانژانت‌ها، و همچنین رابطهٔ معلوم

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}=-\operatorname{arctg}\alpha\pm\frac{\pi}{2}\quad(\alpha\text{ منفی یا مثبت})$$

می‌توان نتیجه را، به‌صورت ساده‌تری نوشت:

$$\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-x^2}}+C_1\qquad\left(C_1=C+\frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}}\right)$$

(b) اگر درهمین انتگرال، از تبدیل II استفاده کنیم: $\sqrt{a^2-x^2}=tx-a$، در آن صورت، نتیجه می‌شود:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{a^2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)t+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)t]+C'$$

که در آن $t=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. این نتیجه، برای بازه‌های $(0, -a)$ و $(0, a)$، به‌طور جداگانه، به‌دست می‌خورد. به‌سادگی دیده می‌شود که، با تغییر مقدار C' ضمن عبور x از ۰، می‌توان نتیجه را، برای تمامی بازهٔ $(a, -a)$ مناسب کرد. بالاخره، اگر آن‌را، با توجه به‌رابطهٔ جمع آرك تانژانت‌ها، تبدیل کنیم. همان نتیجه قبلی به‌دست می‌آید.

۹) $\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}}$.

تبدیل I: $\sqrt{x^2+\mu}=t-x$. داریم:

$$\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}}=2\int \frac{2tdt}{t^4+2(2\lambda-\mu)t^2+\mu^2}=$$

$$=2\int \frac{du}{u^2+2(2\lambda-\mu)u+\mu^2}$$

به این ترتیب، مسأله منجر بـه محاسبهٔ یك انتگرال مقدماتی می‌شود. ضمناً، بایـد در نظر داشت که

$$u=t^2=(x+\sqrt{x^2+\mu})^2$$

۲۸۴. روش‌های دیگر محاسبه. هرچند، به کمك تبدیل‌های اولر، می‌توان مسألهٔ مربوط به‌محاسبهٔ انتگرال‌های نوع (۴) را، درهمهٔ حالت‌ها، به‌صورت متناهی حل کرد، ولی گاهی، با به‌کاربردن این تبدیل‌ها، حتی دیفرانسیل‌های ساده، منجر به‌محاسبه‌های پیچیده‌ای می‌شوند. با توجه به‌اهمیتی که این نوع انتگرال‌ها دارند، روش‌های دیگری را هم، برای محاسبهٔ آن‌ها، نشان می‌دهیم.

برای سادگی کار، فرض می‌کنیم:

$$Y=ax^2+bx+c, \quad y=\sqrt{Y}$$

تابع گویای $R(x, y)$ را، می‌توان به‌صورت خارج‌قسمت دوچندجمله‌ای صحیح نسبت به x و y نشان داد. اگر همه‌جا y^2 را به Y تبدیل کنیم. $R(x, y)$ به‌این‌صورت در می‌آید:

$$R(x, y)=\frac{P_1(x)+P_2(x)\cdot y}{P_3(x)+P_4(x)\cdot y}$$

کـه در آن، $P_i(x)$، چندجمله‌ای‌های صحیح هستند. اگـر صورت و مخـرج کسر را در

y ضرب کنیم ($y^۲$ به Y تبدیل) $P_۳(x)-P_۴(x).y$، به‌شکل تازه‌ای برای R می‌رسیم:

$$R(x, y)=R_۱(x)+R_۲(x).y$$

انتگرال جملهٔ اول سمت راست را، می‌توانیم به‌صورت متناهی، بیان کنیم، در نتیجه، تنها باید به جملهٔ دوم بپردازیم. یك بار آن‌را در y ضرب و یکبار بر y تقسیم می‌کنیم، سرانجام به‌چنین عبارتی می‌رسیم:

$$R^*(x)\frac{۱}{y}=R^*(x)\frac{۱}{\sqrt{ax^۲+bx+c}}$$

که باید انتگرال آن‌را به‌دست آوریم.

قبل از هر چیز، از تابع $R^*(x)$، بخش صحیح $P(x)$ را جدا می‌کنیم و بخش کسر سرهٔ آن‌را، به‌کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم [۲۷۴]. در این‌صورت، انتگرال‌گیری، منجر به‌محاسبهٔ یکی از سه نوع انتگرال زیر می‌شود:

$$\text{I.}\quad \int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^۲+bx+c}}dx$$

$$\text{II.}\quad \int\frac{Adx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^۲+bx+c}}$$

$$\text{III.}\quad \int\frac{Mx+N}{(x^۲+px+q)^m\sqrt{ax^۲+bx+c}}dx$$

که در آن‌ها، همهٔ ضریب‌ها حقیقی، و ریشه‌های سه‌جمله‌ای $x^۲+px+q$، موهومی‌هستند. دربارهٔ هرکدام از آن‌ها، به‌طور جداگانه، بحث می‌کنیم.

I. فرض می‌کنیم (برای $m=۰, ۱, ۲, \dots$):

$$V_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{ax^۲+bx+c}}dx=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{Y}}$$

برای این انتگرال، به‌سادگی می‌توان، یك رابطهٔ برگشتی درست کرد. برای این منظور، با فرض $m\geqslant ۱$، مشتق زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$(x^{m-۱}\sqrt{Y})'=(m-۱)x^{m-۲}\sqrt{Y}+\frac{x^{m-۱}Y'}{۲\sqrt{Y}}=$$

$$= \frac{۲(m-۱)x^{m-۲}(ax^۲+bx+c)+x^{m-۱}(۲ax+b)}{۲\sqrt{Y}} =$$

$$= ma\frac{x^m}{\sqrt{Y}} + \left(m-\frac{۱}{۲}\right)b\frac{x^{m-۱}}{\sqrt{Y}} + (m-۱)c\frac{x^{m-۲}}{\sqrt{Y}}$$

از اتحادی که به‌دست‌آمده است، انتگرال می‌گیریم:

$$x^{m-۱}\sqrt{Y} = maV_m + \left(m-\frac{۱}{۲}\right)bV_{m-۱} + (m-۱)cV_{m-۲}$$

اگر $m = ۱$ بگیریم، داریم:

$$V_۱ = \frac{۱}{a}\sqrt{Y} - \frac{b}{۲a}V_۰$$

سپس، با فرض $m = ۲$ (و با استفاده از عبارت $V_۱$)، نتیجه می‌گیریم:

$$V_۲ = \frac{۱}{۴a^۲}(۲ax-۳b)\sqrt{Y} + \frac{۱}{۸a^۲}(۳b^۲-۴ac)V_۰$$

با ادامهٔ این عمل، به‌رابطهٔ کلی زیر می‌رسیم:

$$V_m = p_{m-۱}(x)\sqrt{Y} + \lambda_m V_۰$$

که در آن، $p_{m-۱}(x)$، چندجمله‌ای از درجهٔ $(m-۱)$ و λ_m، مقداری ثابت است. به‌این ترتیب، همهٔ انتگرال‌های V_m، به $V_۰$ منجر می‌شوند.

اگر در انتگرال I، چندجمله‌ای $P(x)$، از درجهٔ n باشد، آن‌گاه، این انتگرال، ترکیبی خطی از انتگرال‌های $V_۰$، $V_۱$، ...، V_n می‌شود، یعنی، با توجه به‌رابطهٔ قبل، به‌صورت

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}}dx = Q(x)\sqrt{Y} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{Y}} \qquad (۹)$$

درمی‌آید، که در آن، $Q(x)$ یك چندجمله‌ای از درجهٔ $(n-۱)$ و λ، مقدار ثابتی است. خود چندجمله‌ای $Q(x)$ و مقدار ثابت λ، معمولاً با روش ضریب‌های نامعین به‌دست می‌آید. اگر از رابطهٔ (۹) مشتق بگیریم و برابری حاصل را در $\sqrt{Y}$ ضرب کنیم، داریم:

$$P(x) = Q'(x)(ax^۲+bx+c) + \frac{۱}{۲}Q(x)(۲ax+b) + \lambda$$

اگر در این‌جا، به جای $Q(x)$، چندجمله‌ای درجهٔ $(n-۱)$ام، با ضریب‌های حرفی قرار

دهیم، آن‌گاه، در دو طرف برابری، چندجمله‌ای‌های درجهٔ n به‌دست خواهیم آورد. با برابر قرار دادن ضریب‌های جمله‌های متشابه در دو طرف برابری، به دستگاه $(n+1)$ معادلهٔ خطی می‌رسیم، که از آن‌ها، n ضریب نامعلوم چندجمله‌ای $Q(x)$ و، همچنین، ضریب λ، پیدا می‌شود.*

یادداشت. رابطهٔ (۹)، در واقع، بخش جبری انتگرال زیر را، جدا می‌کند:

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{Y}}$$

این عمل ــ یعنی جدا کردن بخش جبری ــ را، دربارهٔ انتگرال کلی‌تر زیر هم، می‌توان انجام داد:

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{Y}}dx$$

که در آن، R، نمایندهٔ تابع گویای غیرمشخصی است. ولی ما، به‌آن نمی‌پردازیم.

II. انتگرال

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{Y}}$$

با تبدیل $x-\alpha=\frac{1}{t}$، به‌انتگرال قبلی منجر می‌شود. در واقع داریم:

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\quad ax^2+bx+c=\frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}{t^2}$$

به‌نحوی که (برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم: $x>\alpha$، $t>0$):

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}$$

اگر داشته باشیم: $a\alpha^2+b\alpha+c=0$، یعنی α ریشهٔ سه‌جمله‌ای Y باشد، در آن‌صورت،

---

*) از آن‌چه، تا این‌جا، گفته‌ایم، روشن می‌شود که این‌دستگاه، همیشه، متوافق است و، درچنین حالتی، دترمینان آن، الزاماً، مخالف صفر است و دستگاه همیشه معین می‌شود. ضمناً، خودبه‌خود، منحصر به‌فرد بودن بیان (۹) هم ثابت می‌شود [به‌حالت‌های مشابه در **۲۷۵** و **۲۷۶** مقایسه کنید].

کار بازهم ساده‌تر می‌شود: به‌انتگرالی می‌رسیم که در ۲۷۸ مورد بررسی قرار دادیم.

III. (a) به‌انتگرال آخر می‌پردازیم و حالتی را در نظر می‌گیریم که سه‌جمله‌ای ax^2+bx+c، تنها در ضریب a، با سه‌جمله‌ای x^2+px+q فرق داشته باشد. در این‌صورت، انتگرال مفروض، چنین می‌شود:

$$\int \frac{M+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx$$

که به‌سادگی، می‌توان آن‌را، همچون مجموع دو انتگرال، نشان داد:

$$\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}dx+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}$$

که از آن‌ها، اولی را می‌توان، با تبدیل $t=ax^2+bx+c$، محاسبه کرد.

برای محاسبهٔ انتگرال

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}=\int \frac{dx}{Y^{\frac{2m+1}{2}}}$$

بهتر از همه این است که از، به‌اصطلاح، تبدیل آبل (N. H. Abel) استفاده کنیم:

$$t=(\sqrt{Y})'=\frac{Y'}{2\sqrt{Y}}=\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

که اگر دو طرف را مجذور و، سپس، در $4Y$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$4t^2Y=(Y')^2=4a^2x^2+4abx+b^2$$

حالا، اگر دو طرف برابری

$$Y=ax^2+bx+c$$

را در $4a$ ضرب و برابری قبلی را از نتیجه این ضرب کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$4(a-t^2)Y=4ac-b^2$$

و از آن‌جا

$$Y^m=\left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^m\cdot\frac{1}{(a-t^2)^m} \qquad (10)$$

حالا، اگر از برابری

$$t\sqrt{Y}=ax+\frac{b}{۲}$$

دیفرانسیل بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{Y}dt+t^{۲}dx=adx$$

به‌نحوی که

$$\frac{dx}{\sqrt{Y}}=\frac{dt}{a-t^{۲}} \qquad (۱۱)$$

از (۱۱) و (۱۰) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dx}{Y^{\frac{۲m+۱}{۲}}}=\left(\frac{۴}{۴ac-b^{۲}}\right)^{m}(a-t^{۲})^{m-۱}dt$$

و بالاخره

$$\int\frac{dx}{Y^{\frac{۲m+۱}{۲}}}=\left(\frac{۴}{۴ac-b^{۲}}\right)^{m}\int(a^{۲}-t^{۲})^{m-۱}dt \qquad (۱۲)$$

به‌این‌ترتیب، مسأله، منجر به‌انتگرال یك چندجمله‌ای می‌شود.

در حالت خاص $m=۱$ داریم

$$\int\frac{dx}{(ax^{۲}+bx+c)^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۲}{۴ac-b^{۲}}\cdot\frac{۲ax+b}{\sqrt{ax^{۲}+bx+c}}$$

(b) در حالت کلی، برای تقارن بیشتر نشانه‌ها، فرض می‌کنیم:

$$ax^{۲}+bx+c=a(x^{۲}+p'x+q')$$

ضمناً، می‌توانیم فرض کنیم که، در این‌جا، سه‌جمله‌ای داخل پرانتز، متحد با سه‌جمله‌ای $x^{۲}+px+q$ نیست. می‌خواهیم ببینیم، چگونه به x تغییر متغیر بدهیم که، به‌طورهم‌زمان، در هر دو سه‌جمله‌ای، جملهٔ درجهٔ اول حذف شود.

ابتدا فرض می‌کنیم $p\neq p'$. حالا، اگر تبدیل کسری ـ خطی

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+۱} \qquad (۱۳)$$

را انتخاب کنیم، می‌توان با در نظرگرفتن ضریب‌های مناسب برای μ و ν، به‌هدف خود رسید. داریم:

$$x^۲+px+q=$$
$$=\frac{(\mu^۲+p\mu+q)t^۲+[۲\mu\nu+p(\mu+\nu)+۲q]t+(\nu^۲+p\nu+q)}{(t+۱)^۲}$$

و به همین ترتیب، برای سه جمله‌ای دوم، ضریب‌های مطلوب، از معادله‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$۲\mu\nu+p(\mu+\nu)+۲q=۰,\quad ۲\mu\nu+p'(\mu+\nu)+۲q'=۰$$

یا

$$\mu+\nu=-۲\frac{q-q'}{p-p'},\qquad \mu\nu=\frac{p'q-pq'}{p-p'}$$

به‌این‌ترتیب، μ و ν، ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم هستند:

$$(p-p')z^۲+۲(q-q')z+(p'q-pq')=۰$$

برای آن‌که این دو ریشه، حقیقی و متمایز باشند*، لازم و کافی است‌که مبین معادله، مثبت باشد:

$$(q-q')^۲-(p-p')(p'q-pq')>۰ \qquad (۱۴)$$

این شرط را می‌توان، به‌صورت زیر، که هم‌ارز آن است، نوشت:

$$[۲(q+q')-pp']^۲>(۴q-p^۲)(۴q'-p'^۲) \qquad (۱۴^*)$$

می‌دانیم که $۴q-p^۲>۰$ (زیرا، سه‌جمله‌ای $x^۲+px+q$، ریشه‌های حقیقی ندارد). بنابراین، اگر داشته باشیم $۴q'-p'^۲>۰$، نابرابری (۱۴*)، به روشنی، برقرار است. باید حالتی را بررسی کنیم که $۴q'-p'^۲<۰$ است. آن‌وقت $q'<۰$، $q>۰$ و $۴\sqrt{qq'}>pp'$ و، در نتیجه، داریم**:

$$[۲(q+q')-pp']^۲\geqslant[۴\sqrt{qq'}-pp']^۲=$$

---

*) اگر داشته باشیم $\nu=\mu$، تبدیل، مفهوم‌خودش‌را ازدست‌می‌دهد، زیرا به‌$x=\mu$ منجرمی‌شود.

**) با توجه به‌رابطهٔ مسلم $\frac{q+q'}{۲}\geqslant\sqrt{qq'}$.

$$= (۴q - p^۲)(۴q' - p'^۲) + ۴(p\sqrt{q'} - p'\sqrt{q}) \geqslant$$
$$\geqslant (۴q - p^۲)(۴q' - p'^۲)$$

دراین‌جا، دوبار، ازعلامت تساوی درکنار علامت نامساوی استفاده شده است، ولی‌علامت تساوی، در هر دو حالت، به‌طور هم‌زمان، نمی‌تواند وجود داشته باشد: اگر داشته باشیم $q \neq q'$، در حالت، اول، تساوی وجود ندارد و اگرداشته باشیم: $q = q'$، در مورد دوم، تساوی بی‌معناست. به‌این ترتیب، نابرابری (۱۴*) و، همراه با آن، نابرابری (۱۴) ثابت می‌شود.

اگر تبدیل را انجام دهیم، انتگرال مورد نظر، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\int \frac{P(t)dt}{(t^۲+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^۲+\beta}}$$

که‌درآن، $P(t)$، چندجمله‌ای‌از درجهٔ $(m-۱)$ ($\lambda > ۰$ و) است. اگر (برای $m > ۱$)، کسر

$$\frac{P(t)}{(t^۲+\lambda)^m}$$

را به‌کسرهای ساده تجزیه‌کنیم، به‌مجموعی از انتگرال‌های به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\int \frac{At+B}{(t^۲+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^۲+\beta}}dt \quad (k = ۱, ۲, \ldots, m)$$

در حالت خاص $p = p'$، بـرای از بین بـردن جملهٔ درجـهٔ اول، بهتر است از تبدیـل $x = t - \frac{p}{۲}$ استفاده‌کنیم‌که، مستقیماً، ما را به‌انتگرال اخیر می‌رساند.

انتگرال حاصل را، می‌توان به‌دو انتگرال تجزیه‌کرد:

$$\frac{A}{\alpha}\int \frac{\alpha t\,dt}{(t^۲+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^۲+\beta}} + B\int \frac{dt}{(t^۲+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^۲+\beta}}$$

انتگرال اول، به‌سادگی و با تبدیل $u = \sqrt{\alpha t^۲+\beta}$، پیدا می‌شود. در مورد دومی هم، از تبدیل معلوم آبل استفاده می‌کنیم:

$$u = \frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^۲+\beta}}$$

که، با توجه به (۱۱)، داریم:

$$\frac{dt}{\sqrt{at^2+\beta}}=\frac{du}{\alpha-u^2}$$

علاوه بر آن، به‌سادگی محاسبه می‌شود:

$$t^2+\lambda=\frac{(\beta-\alpha)u^2+\lambda\alpha^2}{\alpha(\alpha-u^2)}$$

بنابراین

$$\int\frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}=\alpha^m\int\frac{(\alpha-u^2)^{m-1}}{[(\beta-\alpha\lambda)u^2+\lambda\alpha^2]^m}du$$

و انتگرال مطلوب، به‌انتگرال تابعی گویا، منتهی می‌شود.

یادداشت. به‌جز این که، در این شماره، روش‌های تازه‌ای، برای محاسبهٔ انتگرال‌های از نوع (۴) آوردیم، مجموعهٔ همهٔ ملاحظه‌ها، مستقل از اثبات حکمی بود که در پایان شمارهٔ **۲۸۱**، تنظیم کرده‌ایم.

۲۸۵. مثال‌ها. ۱) $\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

فرض می‌کنیم:

$$\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=$$

$$=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+2x+2}+d\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

از آن‌جا

$$x^3-x+1=(2ax+b)(x^2+2x+2)+(ax^2+bx+c)(x+1)+d$$

دستگاه معادله‌های

$$3a=1,\ 5a+2b=0,\ 4a+3b+c=-1,\ 2b+c+d=1$$

به‌مقدارهای $a=\frac{1}{3}$، $b=-\frac{5}{6}$، $c=\frac{1}{6}$ و $d=\frac{5}{2}$ منجر می‌شود. به‌این ترتیب، اگر مثال ۵) شمارهٔ **۲۸۳** را درنظر داشته باشیم، بالاخره نتیجه می‌شود:

$$\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{1}{6}(2x^2-5x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+\frac{5}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$$

۲) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$.

اگر تبدیل $x-1=\frac{1}{t}$ (اگر $x>1$ و $t>0$ بگیریم) رادر نظر بگیریم، انتگرال به‌صورت

$$-\int \frac{t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}$$

درمی‌آید، که به‌سادگی قابل محاسبه است [۲۸۳، ۴) را ببینید]:

پاسخ: $\frac{1}{4}t\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin(t\sqrt{2})+C=$

$$=\frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2-2x-1}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C.$$

۳) $\int \frac{dx}{(2x^2-x+2)^{\frac{7}{2}}}$.

تبدیل آبل

$$t=\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}$$

انتگرال مفروض را، به‌این صورت، تبدیل می‌کند:

$$\frac{64}{3375}\int(2-t^2)^2dt$$

ضمناً، می‌توان، برای حالت خاص، همهٔ آن‌چه‌را که درشمارهٔ ۲۸۴، III، (a) گفته‌ایم، تکرار ویا از رابطهٔ آمادهٔ (۱۲) استفاده کرد.

پاسخ: $\frac{۶۴}{۳۳۷۵}\left[۲\frac{۴x-۱}{(۲x^۲-x+۲)^{\frac{۱}{۲}}}-\frac{۱}{۶}\cdot\frac{(۴x-۱)^۳}{(۲x^۲-x+۲)^{\frac{۳}{۲}}}+\right.$

$\left.+\frac{۱}{۱۶۰}\cdot\frac{(۴x-۱)^۵}{(۲x^۲-x+۲)^{\frac{۵}{۲}}}\right]+C$

۴) $\int\frac{(x+۳)dx}{(x^۲-x+۱)\sqrt{x^۲+x+۱}}$.

تبدیل کسری ـ خطی

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+۱}$$

می‌دهد:

$$x^۲\pm x+۱=\frac{(\mu^۲\pm\mu+۱)t^۲+[۲\mu\nu\pm(\mu+\nu)+۲]t+(\nu^۲\pm\nu+۱)}{(t+۱)^۲}$$

شرط

$$۲\mu\nu\pm(\mu+\nu)+۲=۰$$

یا $\mu+\nu=۰$ و $\mu\nu=-۱$، مثلاً، به‌ازای $\mu=۱$ و $\nu=-۱$ برقرار است. داریم:

$$x=\frac{t-۱}{t+۱},\ dx=\frac{۲dt}{(t+۱)^۲},\ x+۳=\frac{۴t+۲}{t+۱},\ x^۲-x+۱=\frac{t^۲+۳}{(t+۱)^۲}$$

و

$$\sqrt{x^۲+x+۱}=\frac{\sqrt{۳t^۲+۱}}{t+۱}$$

برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم $t+۱>۰$ (یعنی $x<۱$)، دراین صورت

$$\int\frac{(x+۳)\,dx}{(x^۲-x+۱)\sqrt{x^۲+x+۱}}=\int\frac{(۸t+۴)\,dt}{(t^۲+۳)\sqrt{۳t^۲+۱}}$$

این انتگرال، به‌دو انتگرال، تجزیه می‌شود:

$$۸\int\frac{tdt}{(t^۲+۳)\sqrt{۳t^۲+۱}}+۴\int\frac{dt}{(t^۲+۳)\sqrt{۳t^۲+۱}}$$

اولی، با تبدیل $u=\sqrt{۳t^۲+۱}$، به‌سادگی محاسبه و برابر $\frac{\sqrt{۸}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{۳t^۲+۱}{۸}}}{۸}+C'$ می‌شود. برای دومی، تبدیل آبل را به‌کار می‌بریم:

$$u=\frac{۳t}{\sqrt{۳t^۲+۱}}$$

که انتگرال را، به‌این‌صورت درمی‌آورد:

$$۱۲\int\frac{du}{۲۷-۸u^۲}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}\ln\left|\frac{۳\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}u}{۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}u}\right|+C''$$

که تنها باید به‌متغیر x برگردد.

۵) $\int\frac{(x^۲+۱)\sqrt{x^۲+x+۱}-x^۳+۱}{\sqrt{x^۲+x+۱}-x}dx$.

راهنمائی. تابع زیر علامت انتگرال را، به‌صورت زیر درآورید:

$$\frac{۲x^۴+x^۳+۲x^۲+۱}{x+۱}-\frac{۲x^۵+۲x^۴+۳x^۳-۱}{(x+۱)\sqrt{x^۲+x+۱}}=$$

$$=(۲x^۳-x^۲+۳x-۳)+\frac{۴}{x+۱}-\frac{۲x^۴+۳x^۲-۳x+۳}{\sqrt{x^۲+x+۱}}+$$

$$+\frac{۴}{(x+۱)\sqrt{x^۲+x+۱}}$$

در مورد جملهٔ سوم، از روش شمارهٔ **۲۸۴**، I، و در مورد آخری، از تبدیل $x+۱=\frac{۱}{t}$ استفاده کنید.

§۴. انتگرال‌گیری از عبارت‌های شامل تابع‌های مثلثاتی و تابع‌های نمائی

۲۸۶. انتگرال‌گیری از دیفرانسیل‌های $R(\sin x,\cos x)dx$. انتگرال‌های به‌این‌صورت، همیشه، با تبدیل $t=\operatorname{tg}\frac{x}{۲}$ $(-\pi<x<\pi)$، گویا می‌مانند. در واقع داریم:

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arc}tgt,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

به‌نحوی که

$$R(\sin x,\cos x)dx=R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

به‌این‌ترتیب، انتگرال‌های به‌گونهٔ

$$\int R(\sin x,\cos x)dx \qquad (1)$$

همیشه به‌صورت متناهی درمی‌آیند و، برای بیان آن‌ها، به‌جز تابع‌هایی که برای انتگرال دیفرانسیل‌های گویا به‌دست می‌آید، تنها به‌تابع‌های مثلثاتی نیاز داریم.

تبدیل مذکور ــ که برای انتگرال‌های گونهٔ (۱) عمومیت دارد ــ گاهی، منجر به‌محاسبه‌های طولانی و پیچیده می‌شود. در این‌جا، حالت‌هایی را می‌آوریم، که با تبدیل‌های ساده‌تری، می‌توان به‌نتیجه رسید. مثلاً، به‌این ملاحظه‌های جبری توجه کنید.

اگر مقدار تابع گویای صحیح یا کسری $R(u,v)$، با تغییرعلامت یکی از آوندها، و مثلاً u، تغییر نکند، یعنی اگر داشته باشیم:

$$R(-u,v)=R(u,v)$$

در آن‌صورت، این تابع را می‌توان به‌صورت

$$R(u,v)=R_1(u^2,v)$$

نوشت، که تنها شامل توان‌های زوج u است.

اگر هم برعکس، با تغییر علامت u، تابع $R(u,v)$ تغییر علامت بدهد، یعنی اگر داشته باشیم:

$$R(-u,v)=-R(u,v)$$

آن‌وقت، تابع را می‌توان به‌صورت

$$R(u,v)=R_1(u^2,v)\cdot u$$

نوشت. این مطلب را، از همان ملاحظهٔ قبلی، می‌توان نتیجه گرفت، به‌شرطی که آن را در مورد تابع $\frac{R(u, v)}{u}$ به‌کار ببریم.

I. حالا فرض کنیم $R(u, v)$، با تغییر علامت u، تغییر علامت بدهد، آن‌وقت

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx =$$
$$= -R_0(1-\cos^2 x, \cos x)d\cos x$$

و با تبدیل $t = \cos x$، گویا می‌شود.

II. به‌همین ترتیب، اگر $R(u, v)$، با تغییر علامت v، تغییر علامت بدهد، آن‌گاه

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0^*(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx =$$
$$= R_0^*(\sin x, 1-\sin^2 x)d\sin x$$

که در آن، باید تبدیل $t = \sin x$ را انجام داد.

III. بالاخره فرض می‌کنیم، تابع $R(u, v)$، با تغییر هم‌زمان علامت‌های u و v، تغییر نکند:

$$R(-u, -v) = R(u, v)$$

در این حالت، اگر u را به $\frac{u}{v}v$ تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right)$$

بنابر خاصیت تابع R، اگر علامت‌های u و v را عوض کنیم (که ضمناً، علامت نسبت $\frac{u}{v}$ هم تغییر نمی‌کند.)

$$R^*\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right)$$

و در این‌صورت، همان‌طور که می‌دانیم

$$R^*\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1^*\left(\frac{u}{v}, v^2\right)$$

بنابراین

$$R(\sin x, \cos x) = R_1^*(tgx, \cos^2 x) = R_1^*\left(tgx, \frac{1}{1+tg^2 x}\right)$$

یعنی به‌طور ساده

$$R(\sin x, \cos x) = \widetilde{R}(tgx)$$

که در آن، باید تبدیل $t = tgx$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ را انجام داد:

$$R(\sin x, \cos x)dx = \widetilde{R}(t)\frac{dt}{1+t^2}$$

یادداشت. یادآوری این نکته لازم است که، عبارت گویای $R(u, v)$ را، به‌هرصورتی که باشد، همیشه می‌توان، به صورت مجموع سه عبارت نوشت که هرکدام از آن‌ها، به‌صورت یکی از حالت‌های بالا باشد. مثلاً، می‌توان فرض کرد:

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} +$$

$$+ \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}$$

از این سه عبارت، اولی با تغییر علامت u، تغییر علامت می‌دهد؛ دومی با تغییر علامت v، تغییر علامت می‌دهد؛ و بالاخره سومی با تغییر هم‌زمان علامت‌های u و v، بدون تغییر می‌ماند. وقتی که با تابع $R(\sin x, \cos x)$ سروکار داشته‌باشیم، می‌توانیم آن‌را، به‌مجموع چنین سه‌عبارتی تبدیل کنیم و، سپس، دراولی $t = \cos x$ و در دومی $t = \sin x$ و درسومی $t = tgx$ بگیریم. به‌این‌ترتیب، برای محاسبهٔ انتگرال‌های از گونهٔ (۱)، همین سه تبدیل، کافی خواهد بود.

۲۸۷. انتگرال‌گیری از عبارت‌هایی که شامل $\sin^\nu x$ و $\cos^\mu x$ هستند. ν و μ را، عددهای گویا و x را متغیری در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ می‌گیریم. اگر تبدیل $z = \sin^2 x$ و $dz = 2\sin x \cos x dx$ را انجام دهیم، داریم:

$$\sin^\nu x \cos^\mu x dx = \frac{1}{2}\sin^{\nu-1} x(1-\sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}} \cdot 2\sin x \cos x dx =$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱-z)^{\frac{\mu-۱}{۲}}.z^{\frac{\nu-۱}{۲}}dz$$

به‌نحوی که کار، منجر به‌انتگرال گیری از دیفرانسیل دو جمله‌ای می‌شود [۲۷۹].

$$\int sin^{\nu}x\cos^{\mu}xdx=\frac{۱}{۲}\int(۱-z)^{\frac{\mu-۱}{۲}}.z^{\frac{\nu-۱}{۲}}dz=\frac{۱}{۲}j_{\frac{\mu-۱}{۲},\frac{\nu-۱}{۲}} \qquad (۲)$$

به‌این ترتیب، و با توجه به‌انتگرال پذیری دیفرانسیل‌های دوجمله‌ای، متوجه‌می‌شویم که، انتگرال موردنظر ما، وقتی به‌صورت متناهی قابل‌محاسبه است که: ۱) $\frac{\mu-۱}{۲}$ (یا $\frac{\nu-۱}{۲}$) عددی درست، یعنی μ (یا ν) عددی فرد باشد، و یا ۲) $\frac{\mu+\nu}{۲}$ عدد درست، یعنی $\mu+\nu$، عددی درست و زوج باشد.

حالتی که هر دو نمای μ و ν درست باشند، به همین‌جا مربوط می‌شود. ضمناً، در این‌صورت، عبارت $sin^{\nu}x\cos^{\mu}x$، نسبت‌به $sinx$ و $cosx$، گویاست، یعنی به‌طبقه‌ای‌مربوط می‌شودکه در شمارهٔ قبل، مورد بررسی قرار دادیم.

در این حالت، اگر نمای ν (یا μ) فرد باشد، عبارت مفروض، با تبدیل $t=cosx$ (یا $t=sinx$)، بلافاصله، به‌عبارتی گویا منجر می‌شود. در حالتی هم که هر دو نمای ν و μ زوج (یا هر دوی آن‌ها، فرد) باشند، می‌توان برای گویا کردن، از تبدیل $t=tgx$ یا $t=cotgx$ استفاده‌کرد.

یادآوری می‌کنیم که، اگر هر دو نمای ν و μ، عددهایی زوج و مثبت باشند، بهتر است از روش دیگری استفاده‌کنیم که بر مبنای رابطه‌های زیر قرار دارد:

$$sinxcosx=\frac{sin۲x}{۲},\quad sin^{۲}x=\frac{۱-cos۲x}{۲},\quad cos^{۲}x=\frac{۱+cos۲x}{۲}$$

اگر فرض‌کنیم $\nu=۲n$، $\mu=۲m$ و $\mu\geqslant\nu$، می‌توان نوشت:

$$sin^{۲n}x\cos^{۲m}x=(sinxcosx)^{۲m}.sin^{۲(n-m)}x=\left(\frac{sin۲x}{۲}\right)^{۲m}.\left(\frac{۱-cos۲x}{۲}\right)^{n-m}$$

و به‌ازای $\nu<\mu$:

$$sin^{۲n}x\cos^{۲m}x=(sinxcosx)^{۲n}.cos^{۲(m-n)}x=\left(\frac{sin۲x}{۲}\right)^{۲n}.\left(\frac{۱+cos۲x}{۲}\right)^{m-n}$$

که بعد از بازکردن، به‌جمله‌هایی به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$C\sin^{\nu'}2x\cos^{\mu'}2x$$

که در آن $\frac{\nu+\mu}{2}=m+n\leqslant\nu'+\mu'$. درمورد جمله‌هایی که، دست‌کم، یکی‌ازنماهای ν' و μ' فرد باشد، باروش قبل، عمل می‌کنیم و در مورد بقیهٔ جمله‌ها، به $\sin 4x$ و $\cos 4x$ عبور می‌کنیم و غیره. از آن‌جا که، در هر تبدیل، مجموع نماها، دست‌کم نصف می‌شود، به‌سرعت به‌نتیجهٔ مطلوب نزدیك می‌شویم.

برمی‌گردیم به‌رابطهٔ (۲). می‌توانیم‌از رابطه‌های مربوط به‌انتگرال‌های دوجمله‌ای [۲۸۰]، استفاده کنیم اگر فرض کنیم $a=1$، $b=-1$، $p=\frac{\mu-1}{2}$ و $q=\frac{\nu-1}{2}$، به‌رابطه‌هایی برای محاسبهٔ انتگرال‌های مورد نظر ما، تبدیل می‌شوند.

به‌این‌ترتیب، رابطه‌های زیر به‌دست‌می‌آید (که البته، مستقیماً هم، قابل اثبات‌اند):

(I) $$\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu}x\,dx=-\frac{\sin^{\nu+1}x\cos^{\mu+1}x}{\mu+1}+\frac{\mu+\nu+2}{\mu+1}\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu+2}x\,dx\quad(\mu\neq-1)$$

(II) $$\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu}x\,dx=\frac{\sin^{\nu+1}x\cos^{\mu+1}x}{\nu+1}+\frac{\nu+\mu+2}{\nu+1}\int\sin^{\nu+2}x\cos^{\mu}x\,dx\quad(\nu\neq-1)$$

(III) $$\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu}x\,dx=\frac{\sin^{\nu-1}x\cos^{\mu-1}x}{\nu+\mu}+\frac{\mu-1}{\nu+\mu}\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu-2}x\,dx\quad(\nu+\mu\neq0)$$

(IV) $$\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu}x\,dx=-\frac{\sin^{\nu-1}x\cos^{\mu+1}x}{\nu+\mu}+\frac{\nu-1}{\nu+\mu}\int\sin^{\nu-2}x\cos^{\mu}x\,dx\quad(\nu+\mu\neq0)$$

این رابطه‌ها، امکان می‌دهند که نمای ν یا μ را، به‌اندازهٔ ۲ واحد کم یا زیاد کنیم (به‌استثنای موردهایی که مشخص کرده‌ایم). اگر نمای ν و μ، عددهای درستی باشند، در آن صورت، با استفادهٔ متوالی از این رابطه‌ها، می‌توان کار را به یکی از انتگرال‌های مقدماتی منجر کرد (که متناظر با ترکیب‌های مختلف مقدارهای ν و μ، برابر ۱ —، ۰ و ۱ می‌باشند):

۱) $\int dx = x$,

۲) $\int \cos x\,dx = \sin x$,

۳) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)\right|$,

۴) $\int \sin x\,dx = -\cos x$,

۵) $\int \sin x\cos x\,dx = \frac{\cos^۲ x}{۲}$,

۶) $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|$

۷) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{۲}\right|$

۸) $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x|$

۹) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \ln|tg x|$

۲۸۸. مثال‌ها. ۱) $\int \sin^۲ x\cos^۳ x\,dx$. اگر $\cos x$ را به $-\cos x$ تبدیل کنیم، علامت عبارت زیر انتگرال، عوض می‌شود. از تبدیل $t = \sin x$ استفاده می‌کنیم:

$$\int \sin^۲ x\cos^۳ x\,dx = \int t^۲(۱-t^۲)dt = \frac{t^۳}{۳}-\frac{t^۵}{۵}+C =$$

$$= \frac{\sin^۳ x}{۳}-\frac{\sin^۵ x}{۵}+C$$

۲) $\int \frac{\sin^۵ x}{\cos^۴ x}dx$. با تبدیل $\sin x$ به $-\sin x$، علامت عبارت زیر انتگرال عوض می‌شود. تبدیل $t = \cos x$ را انجام می‌دهیم:

$$\int \frac{\sin^۵ x}{\cos^۴ x}dx = -\int \frac{t^۴-۲t^۲+۱}{t^۴}dt = -t-\frac{۲}{t}+\frac{۱}{۳t^۳}+C =$$

$$= -\cos x-\frac{۲}{\cos x}+\frac{۱}{۳\cos^۳ x}+C$$

۳) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$. مقدار عبارت زیر انتگرال، با تبدیل $\sin x$ به $-\sin x$ و $\cos x$ به $-\cos x$، تغییر نمی‌کند: تبدیل $t = tgx$:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= tgx - 2\cot gx - \frac{1}{3}\cot g^3 x + C$$

۴) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. در این‌جا هم، همان تبدیل مثال قبل را می‌توان انجام داد. ولی ساده‌تر این است که از رابطه‌های دو برابر کردن زاویه استفاده کنیم:

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8}\sin^2 2x(\cos 2x + 1) =$$

$$= \frac{1}{8}\sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16}(1 - \cos 4x)$$

و

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{48}\sin^2 2x + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + C$$

۵) $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$. تبدیل $t = \sin x$ مناسب است؛ ولی ساده‌تر از همه، استفاده از رابطهٔ (II) است:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \frac{-1}{2\sin x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

۶) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$. تبدیل $t = \sin x$ مناسب است، ولی ساده‌تر است از رابطهٔ (I) استفاده کنیم:

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

و به‌نوبهٔ خود

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

به‌نحوی که

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

۷) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$. تبدیل $t=\cos x$ مناسب است، ولی بهتر است از رابطه‌های II و III استفاده کنیم:

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx = -\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}dx,$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}dx = \frac{1}{3}\cos^3 x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x + \cos x + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

به‌نحوی، به‌عنوان نتیجه، خواهیم داشت:

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \cos x - \frac{3}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

۸) $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x - 1)}$. تبدیل $t=\cos x$:

$$\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)} = \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}\right| + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

۹) $\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x}dx$. چون با تغییر علامت $\sin x$ و $\cos x$، عبارت زیر انتگرال تغییر می‌کند، تبدیل $t=tgx$ مناسب است:

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{t^2 dt}{(1+t)(1+t^2)^2} =$$

$$= \int \left[\frac{1}{4} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{4} \frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2} \frac{t-1}{(t^2+1)^2} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4} \frac{1+t}{1+t^2} + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C$$

۱۰) $\int \frac{dx}{A \sin^2 x + 2B \sin x \cos x + C \cos^2 x}$ با شرط $AC - B^2 > 0$. با فرض $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، به‌کمك تبدیل $t = tg\, x$، انتگرال را به‌صورت زیردرمی‌آوریم:

$$\int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}$$

پاسخ: $\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arc}\, tg \frac{C\, tg\, x + B}{\sqrt{AC - B^2}} + C'$.

۱۱) $\int \frac{dx}{a + b\, tg\, x}$. با تبدیل $t = tg x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ به‌صورت زیردزمی آید:

$$\int \frac{dt}{(a+bt)(1+t^2)}$$

به‌کسرهای ساده، تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{(a+bt)(1+t^2)} = \frac{A}{a+bt} + \frac{Bt+C}{1+t^2}$$

برای تعیین A، B و C، معادله‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$A + bB = 0, \quad aB + bC = 0, \quad A + aC = 1$$

واز آن‌جا: $A = \frac{b^2}{a^2+b^2}$، $B = -\frac{b}{a^2+b^2}$، $C = \frac{a}{a^2+b^2}$.

پاسخ: $= \frac{a}{a^2+b^2} \operatorname{arc}\, tg\, t + \frac{b}{a^2+b^2} \ln \frac{a+bt}{\sqrt{1+t^2}} + C'$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|]+C'$$

۱۲) دو انتگرال زیرهم، به‌همان انتگرال، منجر می‌شوند:

$$T_1=\int\frac{\sin x\,dx}{a\cos x+b\sin x},\quad T_2=\int\frac{\cos x\,dx}{a\cos x+b\sin x}$$

ولی، اگر از دورابطهٔ زیر استفاده‌کنیم، ساده‌تر به‌نتیجه می‌رسیم:

$$bT_1+aT_2=\int dx=x+C_1$$

$$-aT_1+bT_2=\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx=$$

$$=\int\frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2$$

که از آن‌جا، نتیجه می‌شود:

$$T_1=\frac{1}{a^2+b^2}[bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|]+C$$

$$T_2=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|]+C'$$

۱۳) $\frac{1}{2}\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx$ ($0<r<1$ و $-\pi<x<\pi$). در این‌جا، تبدیل عمومی $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ را به‌کار می‌بریم. داریم:

$$\frac{1}{2}\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=(1-r^2)\int\frac{dt}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}=$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$$

انتگرال زیرهم، به‌همین انتگرال، منجر می‌شود:

$$\int\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dr=\int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right]dx=$$

$$=\frac{۱}{۲}x+\text{arc}\,tg\left(\frac{۱+r}{۱-r}tg\frac{x}{۲}\right)+C$$

(۱۴ $\int\frac{dx}{a+b\cos x}$ با شرط $|a|\neq|b|$ $(-\pi<x<\pi)$.

ابتدا فرض می‌کنیم $|a|>|b|$ و، بدون این‌که به‌کلی بودن مسأله لطمه‌ای بزند، a را مثبت می‌گیریم. تبدیل $t=tg\frac{x}{۲}$ ما را به‌نتیجه‌می‌رساند

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{۲}{\sqrt{a^۲-b^۲}}\text{arc}tg\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}tg\frac{x}{۲}\right)+C$$

که می‌توان آن را، به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$\pm\frac{۱}{\sqrt{a^۲-b^۲}}\text{arc}\sin\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}+C'$$

ضمناً، درحالت $\pi>x\geqslant ۰$ علامت مثبت و درحالت $۰\geqslant x>-\pi$، علامت منفی را باید اختیارکرد ووقتی x از ۰ عبورمی‌کند، مقدارثابت C' به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ ترقی می‌کند.

حالا فرض می‌کنیم $|a|<|b|$ و $۰>b$، ازهمان تبدیل استفاده می‌کنیم:

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\int\frac{۲dt}{(b+a)-(b-a)t^۲}=$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{b^۲-a^۲}}\ln\left|\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,t}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,t}\right|+C=$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{b^۲-a^۲}}\ln\left|\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}tg\frac{x}{۲}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}tg\frac{x}{۲}}\right|+C$$

که به‌سادگی، می‌توان آن را به‌صورت زیر درآورد:

$$\frac{۱}{\sqrt{b^۲-a^۲}}\ln\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^۲-a^۲}\sin x}{a+b\cos x}\right|+C$$

انتگرال $\int \frac{dx}{a+b\sin x}$. با تبدیل $x=\frac{\pi}{2}\pm t$، به‌همان انتگرال قبلی، تبدیل می‌شود.

۱۵) بالاخره، انتگرال $\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}$ هم، به انتگرال ۱۴) تبدیل می‌شود؛ اگر زاویهٔ α را با شرط‌های زیر درنظر بگیریم:

$$\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad \sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

در آن صورت، انتگرال مفروض به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int \frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}$$

تبدیل: $t=x-\alpha$. البته، در این‌جا هم، حالت $|a|\geqslant\sqrt{b^2+c^2}$، برای ما جالب است.

۲۸۹. مختصری دربارهٔ حالت‌های دیگر. در ۲۷۱، ۴) دیدیم که چگونه می‌توان از عبارت‌های به‌صورت زیر، انتگرال گیری کرد:

$$P(x)e^{ax}dx,\quad P(x)\sin bx\,dx,\quad P(x)\cos bx\,dx$$

که در آن‌ها، $P(x)$، یك چندجمله‌ای صحیح است. یادآوری این مطلب لازم است که، عبارت‌های از نوع

$$\frac{e^x}{x^n}dx,\quad \frac{\sin x}{x^n}dx,\quad \frac{\cos x}{x^n}dx\quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

به‌صورت متناهی، قابل انتگرال‌گیری نیستند.

به کمك انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، برای این عبارت‌ها، رابطه‌های بازگشتی پیدا می‌کنیم و آن‌ها را، به‌ترتیب به‌صورت سه انتگرال اساسی زیر، درمی‌آوریم:

$$\text{I.}\int \frac{e^x}{x}dx=\int \frac{dy}{\ln y}=\operatorname{li} y^{*}\qquad (\text{«لگاریتم انتگرالی»})$$

$$\text{II.}\int \frac{\sin x}{x}dx=\operatorname{si} y\qquad (\text{«سینوس انتگرالی»})$$

---

*) تبدیل $x=\ln y$.

$$\text{III}\cdot\int\frac{\cos x}{x}dx=\text{ci}\,y^{*}$$ («کسینوس انتگرالی»)

انتگرال‌های زیررا می‌دانیم [۲۷۱، ۶)]:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^{2}+b^{2}}e^{ax}+C$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^{2}+b^{2}}e^{ax}+C$$

با آغاز از این انتگرال‌ها، می‌توانیم انتگرال‌های زیررا، به‌صورت متناهی محاسبه کنیم:

$$\int x^{n}e^{ax}\sin bx\,dx=x^{n}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^{2}+b^{2}}e^{ax}-$$

$$-\frac{na}{a^{2}+b^{2}}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx\,dx+\frac{nb}{a^{2}+b^{2}}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$\int x^{n}e^{ax}\cos bx\,dx=x^{n}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^{2}+b^{2}}e^{ax}-$$

$$-\frac{nb}{a^{2}+b^{2}}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx\,dx-\frac{na}{a^{2}+b^{2}}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx\,dx$$

این رابطه‌های بازگشتی، امکان می‌دهند تاانتگرال‌های مفروض را، به‌حالت $n=0$ برسانیم.

اگر منظور از $P(\dots)$، مثل سابق، چندجمله‌ای صحیح باشد، به‌عنوان آخرین نتیجه، می‌توان حکم کرد که، انتگرال زیرهم، به‌صورت متناهی، قابل محاسبه است:

$$\int P(x,\,e^{a'x},\,e^{a''x},\,\dots,\,\sin b'x,\,\sin b''x,\,\dots,\,\cos b'x,\,\cos b''x,\,\dots)\,dx$$

که در آن، a'، a''، ...، b'، b''، ...، مقدارهای ثابتی هستند.

درمورد این انتگرال، به‌روشنی، کار منجر به‌محاسبهٔ انتگرال ازعبارت زیرمی‌شود:

$$x^{n}e^{ax}\sin^{k'}b'x\sin^{k''}b''x\dots\cos^{m'}b'x\dots$$

که اگر از دستورهای مقدماتی

---

*) ضمناً، درهرسه حالت، باید مقدارثابت دلخواه را تثبیت کرد. این کار را بعداً خواهیم کرد.

$$\sin^2 bx = \frac{1-\cos 2bx}{2},$$

$$\sin b'x \cos b''x = \frac{1}{2}[\cos(b'-b'')x - \cos(b'+b'')x]$$

ومشابه آن‌ها استفاده شود، عبارت مفروض، به‌صورت جمله‌هایی از نوع $A = x^n e^{ax} \sin bx$ و $B = x^n e^{ax} \cos bx$ درمی‌آید، که می‌توانیم انتگرال آن‌ها را محاسبه کنیم.

§۵. انتگرال‌های بیضوی (الیپتیک)

۲۹۰. ملاحظه‌های کلی و تعریف‌ها. انتگرال به‌صورت

$$\int R(x, y)\, dx \qquad (۱)$$

را درنظر می‌گیریم، که در آن، y یك تابع جبری از x است، یعنی [۲۰۵]، درمعادلهٔ جبری

$$P(x, y) = 0 \qquad (۲)$$

صدق می‌کند (دراین‌جا، P یك چندجمله‌ای صحیح، نسبت به x و y است). این گونه انتگرال‌ها را، انتگرال‌های آبلی می‌گویند. درواقع، انتگرال‌های

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx, \quad \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

هم، که در §۳ موردبررسی قرارداديم، به‌همین انتگرال‌های آبلی تعلق دارند، زیرا تابع‌های

$$y = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \quad y = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

به‌ترتیب، درمعادله‌های جبری زیر صدق می‌کنند:

$$(\gamma x+\delta)y^m - (\alpha x+\beta) = 0, \quad y^2 - (ax^2+bx+c) = 0$$

اگر از دیدگاه هندسی صحبت کنیم، می‌توانیم بگوییم که، انتگرال‌های آبلی (۱)، به‌آن منحنی‌های جبری بستگی دارند که به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۲) تعریف می‌شوند، مثلاً، انتگرال

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \qquad (۳)$$

به منحنی درجهٔ دوم $y^2=ax^2+bx+c$ بستگی دارد.

اگر منحنی (۲) را، بتوان به‌صورت پارامتری

$$x=r_1(t),\quad y=r_2(t)$$

نشان داد، به‌نحوی که تابع‌های $r_1(t)$ و $r_2(t)$ گویا باشند (در این صورت، منحنی را، **اونیکورسال** می‌نامند)*، آن‌گاه، در انتگرال (۱)، می‌توان عبارت زیر انتگرال را، گویا کرد. با تبدیل $x=r_1(t)$، به‌صورت

$$R(r_1(t),\ r_2(t))r_1'(t)\,dt$$

درمی‌آید. هر دو حالتی‌هم، که در بالا از آن‌ها یاد کردیم، به‌همین طبقه تعلق دارند. به‌خصوص، امکان گویا کردن عبارت زیر انتگرال، در انتگرال از نوع (۳)، با همین واقعیت بستگی دارد که، منحنی درجه دوم اونیکورسال باشد [۲۸۱ و ۲۸۲].

معلوم است که، متغیرهای x و t، با یک معادلهٔ جبری به‌هم مربوط‌اند، به‌نحوی که t یک تابع جبری از x می‌شود. اگر طبقهٔ تابع‌های مقدماتی را گسترش‌دهیم و همهٔ تابع‌های جبری را در آن واردکنیم، آن گاه می‌توان گفت که، در حالت اونیکورسال بودن منحنی (۲)، انتگرال (۱) همیشه، برحسب تابع‌های مقدماتی و به‌صورت متناهی، قابل بیان است.

با همهٔ این‌ها، می‌توان این کیفیت را، به‌مفهومی، استثنائی دانست. در حالت کلی، منحنی (۲)، اونیکورسال نیست. در این صورت، می‌توان ثابت کرد که: انتگرال (۱)، همیشه وجود ندارد، یعنی برای هر تابع دلخواه R، نمی‌توان آن را، به‌صورت متناهی، بیان کرد (اگرچه، نمی‌توان این امکان را، برای حالت‌های مشخص، منتفی دانست).

حالا، به‌بررسی طبقهٔ مهمی از انتگرال‌ها می‌رسیم:

$$\int R(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx$$

$$\int R(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx \qquad (۴)$$

که شامل ریشهٔ دوم چند جمله‌ای‌های درجه سوم و درجه چهارم هستند، و به‌طور طبیعی، می‌توان آن‌ها را، به‌انتگرال (۳) مربوط کرد. انتگرال‌های (۴) را، معمولاً، نمی‌توان

---

*) می‌توان، ویژگی خالص هندسی منحنی‌های اونیکورسال را مطرح کرد، ولی ما، به آن، نمی‌پردازیم.

به‌صورت متناهی، برحسب تابع‌های مقدماتی ــ حتی اگر این مفهوم را، به‌معنای گستردهٔ آن بگیریم ــ بیان کرد. به‌همین مناسبت، بررسی آن‌ها را، به بند آخر موکول کردیم، تا خط اصلی بحث این فصل را ــ که به‌طور عمده، به‌انتگرال‌هایی مربوط می‌شد که به‌صورت متناهی قابل بیان‌اند ــ قطع نکرده باشیم.

چندجمله‌ای‌های زیر انتگرال‌های (۴) را، با ضریب‌های حقیقی در نظر می‌گیریم. علاوه‌بر آن، فرض می‌کنیم که آن‌ها، دارای ریشهٔ تکراری نیستند، زیرا درغیراین‌صورت، عامل‌های خطی، از زیررادیکال بیرون می‌آیند ومساله منجر به‌انتگرال‌گیری ازعبارت‌هایی می‌شود که قبلاً دربارهٔ آن‌ها بحث کرده‌ایم (و درنتیجه، حاصل انتگرال به‌صورت متناهی درمی‌آید). این کیفیت، ممکن است، درحالت‌عدم وجود ریشه‌های تکراری هم، پیش آید. مثلاً، می‌توان به‌سادگی تحقیق کرد که:

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}+C,$$

$$\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}dx=x\sqrt{2x^3+1}+C$$

انتگرال‌های از نوع (۴) را، به‌طورکلی، بیضوی می‌نامند [این نام‌گذاری، به‌این خاطراست که، برای نخستین‌بار، ضمن‌بررسی راستاپذیری بیضی، به‌آن برخورد کرده‌اند: ۳۳۱، ۸)]. ضمن این‌که، درواقع، باید این نام را، تنها به‌آن‌هایی نسبت داد که به‌صورت متناهی به‌دست نمی‌آیند. به‌همین مناسبت، آن‌هایی راکه به‌صورت متناهی قابل بیان‌اند ــ ازقبیل دوموردی که دربالا دیدیم، بیضوی دروغین یا شبه‌بیضوی نام‌گذاشته‌اند.

بررسی انتگرال‌های (۴) و به‌جدول درآوردن آن‌ها (یعنی تنظیم جدول مقدارهای آن‌ها)، برای ضریب‌های غیرمشخص a، b، c، ...، کار دشواری است. به‌همین مناسبت، طبیعی است که سعی کنیم، این انتگرال‌ها را، به‌صورتی درآوریم که، در ترکیب آن‌ها، حتی‌الامکان، ضریب‌های (پارامترهای) غیرمشخص کمتری وجود داشته باشد.

با تبدیل‌های مقدماتی، می‌توان به‌این هدف رسید، و ما در شماره‌های بعد، به‌آن می‌پردازیم.

۲۹۱. تبدیل‌های کمکی. ۱°. قبل ازهمه یادآوری می‌کنیم که، کافی است حالتی را بررسی کنیم که در زیر رادیکال، عبارت درجه‌چهارم وجود دارد، زیرا حالت عبارت درجه سوم را می‌توان به‌سادگی به همان حالت درجه چهارم منجر کرد. درواقع، چندجمله‌ای درجه سوم ax^3+bx^2+cx+d با ضریب‌های حقیقی، الزاماً دارای یک ریشهٔ حقیقی، و

مثلا، λ است [۸۱] و درنتیجه، می‌توان آن را تجزیه کرد:

$$ax^3+bx^2+cx+d\equiv a(x-\lambda)(x^2+px+q)$$

وتبدیل $x-\lambda=t^2$ (یا $x-\lambda=-t^2$)، ما را به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رساند:

$$\int R(x,\sqrt{ax^3+\cdots})dx=\int R(t^2+\lambda,\sqrt{ax^4+\cdots})2tdt$$

ازاین به‌بعد، تنها به‌بررسی دیفرانسیل‌هایی می‌پردازیم که شامل ریشهٔ دوم چندجمله‌ای‌های درجه چهارم باشند.

۲°. بنابر قضیهٔ معلوم جبر، هرچندجمله‌ای درجه چهارم با ضریب‌های حقیقی را، می‌توان به‌صورت ضرب دوسه‌جمله‌ای درجه دوم با ضریب‌های حقیقی، تبدیل کرد:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x^2+px+q)(x^2+p'x+q') \qquad (۵)$$

حالا سعی می‌کنیم، با تبدیل مناسبی، جمله‌های درجه اول را، در هردو سه‌جمله‌ای، ازبین ببریم. در ۲۸۴، III، (b) هم، باچنین مساله‌ای سروکار داشتیم.

اگرداشته باشیم $p=p'$، به‌سادگی وبا تبدیل سادهٔ $x=t-\frac{p}{2}$ به این منظور می‌رسیم. درحالتی که داشته باشیم: $p\neq p'$، ازتبدیل خطی-کسری

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}$$

استفاده می‌کنیم. امکان تعیین مقدارهای حقیقی و، ضمناً، متمایز برای ضریب‌های μ و ν، همان‌طورکه قبلاً دیده‌ایم، مشروط به‌نابرابری زیراست:

$$(q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')>0 \qquad (۶)$$

قبلاً ثابت کردیم که، این نابرابری، برای حالتی که، یکی از سه‌جمله‌ای‌های موردنظر، دارای ریشه‌های موهومی باشد، برقرار است؛ همین مطلب، نقشی جدی دربحث ما به‌عهده‌دارد. حالا فرض می‌کنیم، سه‌جمله‌ای‌های (۵)، هردو، دارای ریشه‌های حقیقی باشند. ریشه‌های اولی را α و β وریشه‌های دومی را γ و δ می‌گیریم. اگرقرار دهیم:

$$p=-(\alpha+\beta),\ q=\alpha\beta,\ p'=-(\gamma+\delta),\ q'=\gamma\delta$$

رابطهٔ (۶)، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)>0 \qquad (۶')$$

برای برقراربودن این نابرابری، تنها باید مراقب باشیم که ریشه‌های دو سه‌جمله‌ای، به‌صورت متناوب قرار نگیرند (ومثلاً، به‌این صورت باشند: $\delta<\gamma>\beta<\alpha$)، و تحقق این شرط هم دراختیارماست.*

به‌این‌ترتیب، با انتخاب مناسب ضریب‌های μ و ν، خواهیم داشت:

$$\int R(x, \sqrt{ax^4+\cdots})dx =$$

$$= \int R\Big(\frac{\mu t+\nu}{t+1}, \frac{\sqrt{(M+Nt^2)(M'+N't^2)}}{(t+1)^2}\Big)\frac{\mu-\nu}{(t+1)^2}dt$$

که، اگرحالت خاصی راکه یکی ازضریب‌های M، N، M' و N' برابر صفر باشدکنار بگذاریم، می‌توان آن را به‌صورت زیرنوشت:

$$\int \tilde{R}(t, \sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)})dt$$

که درآن، A، m و m' مخالف صفرند.

۳°. با ملاحظه‌هایی، کاملا شبیه آن‌چه درابتدای شمارهٔ **۲۸۴** آوردیم، می‌توان، این انتگرال را، به‌انتگرال تابع گویای زیرمنجر کرد:

$$\int \frac{R^*(t)}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}dt$$

تابع گویای $R^*(t)$ را، به‌دوجمله تبدیل می‌کنیم:

$$R^*(t) = \frac{R^*(t)+R^*(-t)}{2} + \frac{R^*(t)-R^*(-t)}{2}$$

اولی، با تبدیل t به $-t$، تغییر نمی‌کند و، بنابراین، به‌تابعی گویا از t^2، $R_1(t^2)$، منجرمی‌شود. دومی، با تبدیل t به $-t$، تغییر علامت می‌دهد و، به‌همین مناسبت، به‌صورت

---

* ضمناً، به‌این نکته هم توجه‌کنیم که از تبدیل نابرابری (۶) به صورت (۶')، می‌توان برای حالتی هم‌که ریشه‌های α، β،... حقیقی نیستند، استفاده‌کرد. اگر تنها سه‌جمله‌ای اول دارای ریشه‌های‌غیرحقیقی، یعنی ریشه‌های مزدوج α و β باشد و عددهای γ و δ حقیقی‌باشند، آن‌وقت، عامل‌های $\gamma-\alpha$ و $\beta-\gamma$ مزدوج و حاصل‌ضرب آن‌ها، عددی مثبت می‌شود. همین وضع، درمورد عامل‌های $\delta-\alpha$ و $\delta-\beta$ هم برقرار است. واگر، هم ریشه‌های α و β و هم ریشه‌های γ و δ، دوبه‌دو، عددهای مختلط‌مزدوجی‌باشند، باز هم‌عامل‌های $\gamma-\alpha$ و $\delta-\beta$ و، همچنین، $\delta-\alpha$ و $\gamma-\beta$، مزدوج، وحاصل‌ضرب آن‌ها، عددهای مثبت حقیقی خواهد شد.

$t.R_۲(t^۲)$ درمی‌آید. به‌این‌ترتیب، انتگرال مورد بررسی، به‌مجموع این دوانتگرال منجر می‌شود:

$$\int \frac{R_۱(t^۲)dt}{\sqrt{A(۱+mt^۲)(۱+m't^۲)}} + \int \frac{R_۲(t^۲)\cdot t dt}{\sqrt{A(۱+mt^۲)(۱+m't^۲)}}$$

انتگرال دوم، با تبدیل $u=t^۲$، بلافاصله، به‌انتگرال مقدماتی

$$\frac{۱}{۲}\int \frac{R_۲(u)du}{\sqrt{A(۱+mu)(۱+m'u)}}$$

تبدیل می‌شود و، به‌صورت متناهی، قابل محاسبه است. به‌این‌ترتیب، تنها باید، به‌بررسی انتگرال زیرپرداخت:

$$\int \frac{R_۲(t^۲)dt}{\sqrt{A(۱+mt^۲)(۱+m't^۲)}} \qquad (۷)$$

۲۹۲. تبدیل به‌شکل‌متعارف. بالاخره، نشان می‌دهیم که هرانتگرال از نوع (۷) را می‌توان به‌صورت زیردرآورد:

$$\int \frac{R(z^۲)dz}{\sqrt{(۱-z^۲)(۱-k^۲z^۲)}} \qquad (۸)$$

که درآن، k یك کسر سرهٔ مثبت است. $۰<k<۱$. این را، شکل متعارف (یـا کانونی) انتگرال گویند.

برای سهولت‌کار، فرض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{A(۱+mt^۲)(۱+m't^۲)}$$

پی‌آن‌که لطمه‌ای به‌کلی‌بودن مطلب وارد شود، $A=\pm ۱$ درنظرمی‌گیریم. علاوه برآن، برای مشخص بودن وضع، به مقدارهای مثبت t، اکتفا می‌کنیم. حالا، ترکیب‌های مختلف وممکن علامت‌های A، m و m' را درنظر می‌گیریم و، برای هرحالت، تبدیلی را معرفی می‌کنیم که، مستقیماً، انتگرال (۷) را به‌شکل متعارف (کانونی) آن برساند.

۱) $A=+۱$، $m=-h^۲$، $m'=-h'^۲$ $(h>h'>۰)$، برای این که رادیکال، مقداری حقیقی باشد، لازم است کـه داشته باشیم: $t<\frac{۱}{h}$ یا $t>\frac{۱}{h'}$. فرض می‌کنیم:

$$ht=z \qquad \left(۰<z<۱ \text{ یا } z>\frac{h}{h'}\right)$$

آن‌وقت

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)}}$$

به‌نحوی که، به‌جای k، باید $\frac{h'}{h}$ را درنظر گرفت.

۲) $A=+1$، $m=-h^2$، $m'=h'^2$ $(h, h'>0)$. برای این که رادیکال، حقیقی باشد، به مقدارهای $t<\frac{1}{h}$ اکتفا می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$ht=\sqrt{1-z^2}\quad (0<z\leqslant 1)$$

آن‌وقت

$$\frac{dt}{y}=-\frac{1}{\sqrt{h^2+h'^2}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}$$

و می‌توان انتخاب کرد: $k=\frac{h'}{\sqrt{h^2+h'^2}}$.

۳) $A=+1$، $m=h^2$ و $m'=h'^2$ $(h>h'>0)$. t محدودیتی ندارد. فرض می‌کنیم:

$$ht=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}},\quad (0\leqslant z<1)$$

در این حالت

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}$$

و $k=\frac{\sqrt{h^2-h'^2}}{h}$.

۴) $A=-1$، $m=-h^2$، $m'=h'^2$ $(h, h'>0)$. t با نابرابری $t>\frac{1}{h}$ محدود.

می‌شود. فرض می‌کنیم:

$$ht=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\quad(0<z<1)$$

به‌طوری که

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{\sqrt{h^2+h'^2}\cdot\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}$$

و $k=\frac{h}{\sqrt{h^2+h'^2}}$.

۵) $A=-1$، $m=-h^2$، $m'=-h'^2$ $(h>h'>0)$. t تنها می‌تواند بین $\frac{1}{h}$ و $\frac{1}{h'}$ تغییر کند. فرض می‌کنیم:

$$h't=\sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2}\quad(0<z<1)$$

و داریم:

$$\frac{dt}{y}=\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}$$

و $k=\sqrt{\frac{h^2-h'^2}{h}}$.

به‌این ترتیب، همهٔ حالت‌های ممکن به‌پایان می‌رسد، زیرا درحالت $A=-1$ و $m'>0$، m، مقدار رادیکال نمی‌تواند حقیقی باشد. دربارهٔ عامل $R_1(t^2)$ چیزی نگفتیم، زیرا درهمهٔ حالت‌ها، به‌تابع گویائی از z^2 تبدیل می‌شود.

بازهم یادآوری می‌کنیم که، با توجه به‌انتگرال (۸)، می‌توانیم به‌مقدارهای $z<1$ اکتفا کنیم. اگر $z>\frac{1}{k}$ باشد، با تبدیل $kz=\frac{1}{\zeta}$، که در آن $\zeta<1$، به‌حالت قبل تبدیل می‌شود.

۲۹۳. انتگرال‌های بیضوی نوع اول، دوم وسوم. حالا به‌مطالعهٔ ساده‌ترین نوع از

انتگرال‌های به‌صورت (۸) می‌پردازیم: این، انتگرالی است که همهٔ انتگرال‌های (۸) و، درنتیجه، همهٔ انتگرال‌های بیضوی را، می‌توان به‌آن تبدیل کرد.

از تابع گویای $R(x)$ موجود درعبارت زیر انتگرال (۸)، بخش صحیح $P(x)$را جدا می‌کنیم و بخش کسری آن را (که کسری سره است)، به‌کسرهای ساده تجزیه‌می‌کنیم. اگر ریشه‌های مختلط مزدوج مخرج را توأم نکنیم (آن‌طورکه در **۲۷۴** کردیم و آن‌ها را جدا از هم، شبیه ریشه‌های حقیقی، درنظر بگیریم، آن‌گاه، $R(x)$ به‌صورت مجموعی از توان‌های x^n $(n=0, 1, 2, \dots)$ و کسرهای به‌صورت $\frac{1}{(x-a)^m}$ $(m=1, 2, 3, \dots)$ درمی‌آیدکه درآن، a می‌تواند عددی موهومی هم باشد. به‌این ترتیب، روشن می‌شودکه، انتگرال (۸)، درحالت کلی، عبارت است از ترکیب خطی انتگرال‌های زیر:

$$I_n=\int \frac{z^{2n}dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\ (n=0, 1, 2, \dots) \qquad H_m=\int \frac{dz}{(z^2-a)^m\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\ (m=1, 2, \dots)$$

روی انتگرال I_n تامل می‌کنیم. اگراز اتحاد زیر (که درستی آن، به‌سادگی، قابل تحقیق است) انتگرال بگیریم:

$$[z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}]'=(2n-3)z^{2n-4}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}+$$

$$+z^{2n-3}\frac{2k^2z^3-(k^2+1)z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=$$

$$=\frac{(2n-1)k^2z^{2n}-(2n-2)(k^2+1)z^{2n-2}+(2n-3)z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

به‌این رابطهٔ بازگشتی می‌رسیم:

$$(2n-1)k^2I_n-(2n-2)(k^2+1)I_{n-1}+(2n-3)I_{n-2}=$$

$$=z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \qquad (9)$$

که سه انتگرال متوالی I را به هم مربوط می‌کند. اگر $n=2$ بگیریم، I_2 برحسب I_0 و I_1 بیان می‌شود و، سپس، اگر $n=3$ بگیریم و به‌جای I_2، مقدارش را برحسب I_0 و I_1 بگذاریم، I_3 برحسب همان I_0 و I_1 بیان می‌شود. اگراین روش را ادامه دهیم، به‌سادگی معلوم می‌شود که هریك از انتگرال‌های I_n $(n\geqslant 2)$ را می‌توان برحسب I_0 و I_1 بیان کرد. وحتی، با درنظرگرفتن (۹)، می‌توان بین آن‌ها، رابطهٔ زیر را برقرارکرد:

$$I_n=\alpha_n I_0+\beta_n I_1+q_{2n-3}(z)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

که در آن، α_n و β_n مقدارهایی ثابت و $q_{2n-3}(z)$، چندجمله‌ای فرد از درجهٔ $(2n-3)$ است. از این‌جا روشن است که، اگر $P_n(x)$، چند جمله‌ای درجهٔ n از x باشد، در آن صورت

$$\int\frac{P_n(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=$$

$$=\alpha I_0+\beta I_1+zQ_{n-2}(z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \qquad (10)$$

که در آن، α و β مقدارهایی ثابت و $Q_{n-2}(x)$، یك چندجمله‌ای درجهٔ $(n-2)$ از x است. تعیین این مقدارهای ثابت وضریب چندجمله‌ای Q را می‌توان به کمك روش ضریب‌های نامعین، پیدا کرد ــ البته درحالتی که چندجمله‌ای P، به طور مشخص، معلوم باشد [با ۲۸۴، ۱ مقایسه کنید].

یادآوری می‌کنیم که از (۹) می‌توان، انتگرال I_n را برحسب I_0 و I_1، به‌ازای مقدارهای منفی n هم $(n=-1,-2,\dots)$ بیان کرد، به‌نحوی که در انتگرال H_m، کافی است به‌حالت $a\neq 0$ اکتفا کنیم.

به‌طریق مشابهی، می‌توان رابطهٔ بازگشتی زیررا، برای انتگرال‌های H_m $(a$ را، حقیقی فرض می‌کنیم)، به‌دست آورد:

$$(2m-2)[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3]H_m-$$

$$-(2m-3)[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2]H_{m-1}+$$

$$+(2m-4)[(k^2+1)-3k^2a]H_{m-2}-(2m-5)k^2H_{m-3}=$$

$$=\frac{z}{(z^2-a)^{m-1}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

که برای مقدارهای منفی وصفر m هم درست است. ازاین‌جا، می‌توان همهٔ H_mها را، برحسب سه تا ازآن‌ها بیان کرد:

$$H_1=\int\frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$H_0=\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=I_0$$

$$H_{-1}=\int\frac{(z^2-a)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=I_1-aI_0$$

یعنی، سرانجام، برحسب I_0، I_1 و H_1.

تاکید می‌کنیم که، همهٔ این‌ها، به‌ازای مقدارهای موهومی پارامتر a هم، اعتبار خود را، حفظ می‌کنند، ولی، در این‌جا، به‌آن نمی‌پردازیم و خواننده را به §۵ فصل دوازدهم، مراجعه می‌دهیم.

به‌این ترتیب، در نتیجهٔ همهٔ این بررسی‌ها، به‌یك نتیجهٔ کلی می‌رسیم: همهٔ انتگرال‌های بیضوی، به‌کمك تبدیل‌های مقدماتی ــ و بادقت جمله‌هایی که به‌صورت متناهی بیان می‌شوند ــ منجر به‌سه انتگرال استاندارد زیر می‌شوند:*

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\ \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\\ \displaystyle\int\frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\end{array}\right\}\ (0<k<1)$$

[آخری، از H_1، با واردکردن پارامترجدید $h=-\frac{1}{a}$ $(a\neq 0)$ به دست می‌آید].

لیوویل (J.Liouville) ثابت کرد که این انتگرال‌ها، به‌صورت متناهی، قابل بیان نیستند؛ و لژاندر، به ترتیب، آن‌ها را، انتگرال‌های بیضوی نوع اول، دوم و سوم نامیده است. دوتای اولی، شامل تنها یك پارامتر k، و آخری علاوه بر آن، شامل پارامتر (مختلط) h هم می‌باشد.

لژاندر، این انتگرال‌ها را، با انجام تبدیل $z=\sin\varphi$، ساده‌تر کرد (φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند). ضمناً، نخستین آنها، مستقیماً، به‌این انتگرال بدل می‌شود:

---

*) با این‌که، با توضیح‌های بالا، نشان دادیم که هر انتگرال بیضوی غیرمشخص را، می‌توان به‌سه انتگرال اساسی نامبرده، تبدیل کرد، ولی در عمل، ممکن است دشواری‌هایی در این راه پیش آید. در کتاب‌های خاصی که، دربارهٔ انتگرال‌های بیضوی و مسأله‌های مربوط به‌آن، بحث می‌کنند، می‌توان راه‌حل‌های دیگری هم، برای این منظور پیدا کرد.

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (11)$$

دومی، این‌طور تبدیل می‌شود:

$$\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

یعنی، به‌انتگرال قبلی ویك انتگرال تازه، منجرمی‌شود.

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \qquad (12)$$

بالاخره، انتگرال سوم، به

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (13)$$

منجر می‌شود. انتگرال‌های (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) را، انتگرال‌های بیضوی نوع اول، دوم و سوم به‌شکل لژاندر، می‌گویند.

ازمیان این سه‌نوع، دوتای اولی، اهمیت خاص وکاربرد زیادی دارند، اگر درنظر بگیریم‌که این انتگرال‌ها، به‌ازای $\varphi = 0$ برابر صفر می‌شوند، و با آن، هرمقدار ثابت موجود در آن‌ها، تثبیت می‌شود، دوتابع‌کاملاً معین از φ به‌دست می‌آید، که لژاندر آن‌ها را، به‌ترتیب، $F(k, \varphi)$ و $E(k, \varphi)$ می‌نامد. دراین‌جا، علاوه برمتغیر مستقل φ، پارامتر k هم وارد شده است، که آن را، مدول می‌نامند و در مقدار این تابع‌ها، دخالت دارد.

لژاندر، جدول‌های گسترده‌ای برای این تابع‌ها، به‌ازای φهای مختلف و kهای مختلف، تنظیم‌کرد، که در آن‌ها، نه‌تنها آوند φ، به‌مفهوم زاویه، و با درجه بیان شده‌است، بلکه مدول k هم، همچون سینوس یك زاویهٔ θ درنظر گرفته می‌شود، که درجدول، به‌جای مدول وبا درجه نشان داده شده است.

به‌جزاین، چه لژاندر وچه‌سایردانشمندان، ویژگی‌های این تابع‌ها را، موردبررسی قرار دادند و یك رشته از رابطه‌های مربوط به‌آن‌ها را، ثابت‌کرده‌اند. به‌همین دلیل، می‌توان تابع‌های F و E لژاندر را، درخانوادهٔ تابع‌هایی دانست‌که در آنالیز ریاضی و در کاربردهای آن، مورد استفاده قرار می‌گیرند و با تابع‌های مقدماتی، حقوقی برابر دارند.

بخش بعدی محاسبهٔ انتگرالی، که به‌طور عمده به آن می‌پردازیم، فعلاً، محدود به‌«انتگرال‌گیری به‌صورت متناهی» می‌شود. ولی، اشتباه است اگرگمان کنیم‌که موضوع

محاسبهٔ انتگرالی، به‌همین‌جا خاتمه می‌یابد: انتگرال‌های بیضوی F و E، نمونه‌هایی از چنین تابع‌هایی هستند که مقدار آن‌ها، مورد بررسی قرار می‌گیرد و با موفقیت به‌کار برده می‌شوند، هرچند که نمی‌توانند، برحسب تابع‌های مقدماتی، به‌صورتی متناهی بیان شوند.

ما دوباره به‌انتگرال‌های F و E، در فصل‌های بعد، برخواهیم گشت و، به‌طور کلی، در فصل‌های بعدی این کتاب، بارها به‌آن‌ها برخورد خواهیم کرد.

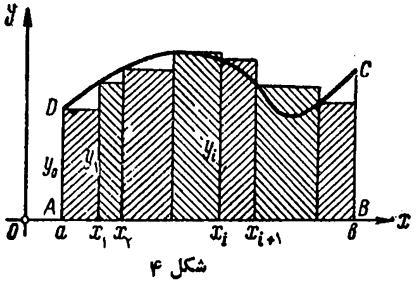
MATH75.IR

فصل نهم

انتگرال معین

§۱. تعریف و شرط‌های وجود انتگرال معین

۲۹۴. دیدگاه دیگری دربارهٔ مساحت. به‌مسالهٔ تعریف‌مساحت P ذوزنقهٔ‌منحنی‌الخط $ABCD$ (شکل ۴) ــ که در **۲۶۴** هم به‌آن پرداختیم ــ برمی‌گردیم. در این‌جا، تعریف دیگری را، برای حل این مساله، مورد بررسی قرار می‌دهیم*.



شکل ۴

قاعدهٔ AB شکل‌را، به‌ترتیب دلخواه به بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم و عرض‌های نظیر تقسیم را رسم می‌کنیم. ذوزنقهٔ منحنی‌الخط، به‌یك رشته نوار تقسیم می‌شود (شکل را ببینید).

حالا، به‌تقریب، هر نوار را با یك مستطیل عوض می‌کنیم که قاعدهٔ آن همان قاعدهٔ نوار و ارتفاعش، یکی از عرض‌های نوار، مثلاً مرز چپ آن، باشد. به‌این‌ترتیب، شکل منحنی‌الخط، با یك شکل پلکانی، که از مستطیل‌های جدا جدا تشکیل شده است، عوض می‌شود.

طول‌های نقطه‌های تقسیم را با

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b \qquad (1)$$

نشان می‌دهیم. قاعدهٔ مستطیل iام $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$: برابر است با تفاضل $x_{i+1} - x_i$، که ما آن‌را با Δx_i نشان می‌دهیم. ارتفاع‌هم، بنابر آن‌چه گفته شد، برابراست با $y_i = f(x_i)$. به‌این جهت، مساحت مستطیل iام، برابر $y_i \cdot \Delta x_i = f(x_i) \cdot \Delta x_i$ می‌شود.

---

*) ضمناً، اندیشه‌ای را که یك‌بار در مثال خاصی [۳۲، ۴] به‌کار بردیم، تعمیم می‌دهیم.

اگر مساحت‌های همهٔ مستطیل‌ها را باهم جمع کنیم، مقدار تقریبی مساحت P ذوزنقهٔ منحنی‌الخط، به‌دست می‌آید:

$$P=\sum_{i=0}^{n-1} y_i\cdot\Delta x_i \quad \text{یا} \quad P=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x_i$$

اگر همهٔ Δx_iها مرتباً کوچك وکوچکتر شوند، خطای این برابری به‌سمت صفر، میل می‌کند. مقدار واقعی مساحت P را، باید به‌عنوان حد این برابری به‌دست آورد:

$$P=\text{حد}\sum y_i\cdot\Delta x_i=\text{حد}\sum f(x_i)\cdot\Delta x_i \qquad (۲)$$

با این فرض که همهٔ اندازه‌های Δx_i، به‌طور هم‌زمان، به‌سمت صفر میل کنند.

از همین روش، برای محاسبهٔ مساحت $P(x)$ شکل $AMND$ (شکل ۲) استفاده می‌کنیم؛ تنها باید پاره‌خط AM را به‌بخش‌ها تقسیم کرد. یادآوری می‌کنیم که، می‌توان نتیجهٔ شمارهٔ **۲۶۴** را، در مورد مساحت قسمتی از شکل هم، که زیر محور x قرار گرفته است، به‌کار برد، با این شرط که این مساحت را منفی به‌حساب آوریم.

لایب نیتس، برای نشان‌دادن مجموع $\Sigma y\Delta x$ (بهتر است گفته شود: مقدار حدی‌این مجموع)، از نماد $\int ydx$ استفاده کرده است، که در آن ydx نمایندهٔ جمع جمله‌های یك شکل، و $\int$، همان حرف S، منتهی به‌صورت دراز شدهٔ آن است. S، حرف اول واژهٔ لاتینی «summa»، به‌معنی مجموع، است*. چون، عبارتی که معرف این‌مقدار حدی‌است (به‌عنوان مساحت)، درعین‌حال، تابع‌اولیهٔ تابع y است، همین‌علامت، برای نمایش‌تابع اولیه هم، در نظر گرفته شد. و بعدها، با وارد شدن علامت تابعی، به‌صورت

$$\int f(x)dx$$

برای حالت مساحت متغیر و به‌صورت

$$\int_a^b f(x)dx$$

---

*) نام‌گذاری «انتگرال» (از واژهٔ لاتینی integer ــ به‌معنی‌صحیح)، ازطرف یوهان‌برنولی، شاگرد و همکار لایب نیتس، پیشنهاد شد. خود لایب نیتس، در ابتدا، از واژهٔ «مجموع» استفاده می‌کرد.

برای حالت مساحت مشخص شکل $ABCD$ ــ وقتی‌که متغیر x، از a تا b در نظر گرفته شود ــ نشان داده شد.

ما ازمعرفت شهودی، برای تصورمساحت استفاده‌کردیم، تا به‌طورطبیعی، به‌بررسی حد مجموع‌های‌خاص به‌صورت (۲) (که ازنظرتاریخی هم، در وابستگی به‌مسالهٔ محاسبهٔ مساحت‌ها، پیدا شده‌اند)، بپردازیم. ولی خود مفهوم مساحت، نیاز به‌پایه‌گذاری دارد و، اگرصحبت برسر ذوزنقهٔ منحنی‌الخط باشد، به‌کمك همین‌حدهای مذکور، به‌دست‌می‌آید. روشن است‌که بررسی حدهای (۲)، باید بدون توجه به‌تصورهای هندسی انجام گیرد، کاری‌که فصل حاضر، به‌آن اختصاص داده شده است.

حدهای به‌صورت (۲)، نقش فوق‌العاده مهمی در آنالیز ریاضی و در کاربردهای گوناگون آن، به‌عهده دارد. ولی، ضمن ادامهٔ بحث درکتاب، بازهم بارها و به‌شکل‌های گوناگون، به‌آن برخواهیم گشت.

۲۹۵. تعریف. تابع $f(x)$ را، دربازهٔ $[a, b]$ مفروض می‌گیریم. این بازه را، به ترتیب دلخواهی، با قراردادن نقطه‌های تقسیم (۱)، بین a و b، تقسیم می‌کنیم. از بین تفاضل‌های $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$، بزرگترین را، از این به بعد، با λ نشان می‌دهیم.

در هر کدام از بازه‌های جزئی $[x_i, x_{i+1}]$، نقطهٔ دلخواه $x = \xi_i$ را انتخاب می‌کنیم*:

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

گویند: مجموع σ، وقتی‌که $\lambda \to 0$، دارای حد (متناهی) l است، اگر به‌ازای هر عدد $\varepsilon > 0$، چنان عدد $\delta > 0$ پیدا شود، به‌نحوی‌که، تنها اگر داشته باشیم: $\lambda < \delta$ (یعنی، بازهٔ اصلی، به‌بخش‌هایی به‌درازای $\Delta x_i < \delta$ تقسیم شود)، نابرابری

$$|\sigma - l| < \varepsilon$$

برای هر انتخاب دلخواه عددهای ξ_i برقرار باشد.

آن‌را، به‌این ترتیب، می‌نویسند:

---

*) در بالا، همه‌جا، به‌عنوان ξ_i، کوچکترین مقدار x_i را در نظر گرفته بودیم.

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma \qquad (۳)$$

این تعریف «به‌زبان $\varepsilon - \delta$»، طبق معمول، در برابر تعریف «به‌زبان دنباله‌ها» قرار می‌گیرد. فرض کنیم، بازهٔ $[a, b]$، مرتباً و به‌طریقه‌های گوناگون، به‌بخش‌ها تقسیم شود: ابتدا به‌طریق اول، بعد به‌طریق دوم، سوم وغیره. این دنبالهٔ تقسیم‌های فاصله را اساسی می‌نامیم، وقتی که دنبالهٔ مقدارهای نظیر آن ... ، $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$، $\lambda = \lambda_1$، به‌سمت صفر متقارب باشد.

اکنون، برابری (۳) را می‌توان، به این معنا فهمید که: دنبالهٔ مجموع‌های σ، نظیر هر دنبالهٔ اساسی و دلخواه تقسیم بازه، به‌هرنحوی که ξ_i انتخاب شده باشد، همیشه به‌سمت I میل می‌کند.

هم‌ارزی این دو تعریف را، می‌توان، به‌همان ترتیبی که در ۵۳ داشتیم، ثابت کرد. تعریف دوم، این‌امکان را به‌مامی‌دهد که بتوانیم، مفهوم‌ها وقضیه‌های اصلی مربوط به‌حدها را، در مورد این شکل تازهٔ حد هم، به‌کار ببریم.

حد متناهی I از مجموع σ، وقتی $\lambda \to 0$، انتگرال معین تابع $f(x)$، درفاصلهٔ از a تا b نامیده می‌شود و آن‌را، به‌این ترتیب، نمایش می‌دهند:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (۴)$$

در حالتی که این حد وجود دارد، تابع $f(x)$ را، انتگرال‌پذیر در بازهٔ $[a, b]$، گویند. عددهای a و b را، به‌ترتیب، حد پایین و حد بالای انتگرال می‌نامند. وقتی که‌این حدها، مقدارهای ثابتی باشند، انتگرال معین هم، عدد ثابتی می‌شود.

تعریفی که در این‌جا آوردیم، به‌ریمان (B. Riemann) تعلق دارد و او بود که، برای نخستین‌بار، آن‌را به‌صورت کلی خود بیان کرد و حوزهٔ کاربرد آن‌را مورد بررسی قرارداد. به‌همین مناسبت، مجموع σ را، گاهی، مجموع ریمانی* می‌نامند، ولی ما، آن‌را مجموع انتگرالی خواهیم نامید، تا بر رابطهٔ آن با انتگرال، تاکید کرده باشیم.

حالا، به‌شرط‌هایی می‌پردازیم که، به‌ازای آن‌ها، مجموع انتگرالی σ، دارای حد متناهی باشد، یعنی انتگرال معین (۴) وجود داشته باشد.

قبل از همه، یادآوری می‌کنیم که تعریف فوق، در واقع، تنها در مورد تابع‌های کران‌دار می‌تواند به کار رود. در واقع، اگر تابع $f(x)$، دربازهٔ $[a, b]$ بی‌کران باشد،

---

*) در واقع، کوشی هم، به‌روشنی، از چنین حد مجموع‌هایی استفاده می‌کرد، منتهی فقط برای حالت تابع‌های پیوسته.

وقتی هم که بازه را، به‌هر نحوی، به بخش‌ها تقسیم می‌کنیم، این ویژگی، دست‌کم برای یکی از بخش‌ها، باقی خواهدماند. آن‌وقت، به‌حساب انتخاب نقطهٔ ξ_i دراین بخش، می‌توان $f(\xi)$، وهمراه با آن مجموع σ را، به‌دلخواه بزرگ کرد؛ و روشن‌است که، دراین‌صورت، حد متناهی برای σ، نمی‌تواند وجود داشته باشد. به‌این ترتیب، تابع مورد انتگرال‌گیری، باید حتماً کران‌دار باشد.

به‌همین مناسبت، در بررسی‌های بعدی، تابع مورد مطالعهٔ $f(x)$ را، کران‌دار فرض خواهیم کرد:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

۲۹۶. مجموع‌های داربو. به‌عنوان وسیلهٔ کمکی بررسی، در کنار مجموع‌های انتگرالی، مجموع‌های دیگری را که شبیه آن‌ها، ولی ساده‌تر از آن‌هاست، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مرزهای پایین و بالای تابع $f(x)$ را، در بازهٔ ام i $[x_i, x_{i+1}]$، به ترتیب، m_i و M_i می‌نامیم و این مجموع‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

این مجموع‌ها را، به‌ترتیب، مجموع‌های انتگرالی پایینی و بالایی، یامجموع‌های داربو می‌نامند.

درحالت خاصی که تابع $f(x)$ پیوسته باشد، این‌ها به‌طورساده، عبارتند ازکمترین و بیشترین مقدار، از مجموع‌های انتگرالی، نظیر تقسیم‌بندی مفروض؛ زیرا، در این‌حالت، تابع $f(x)$، در هر بازه، به‌مرزهای خودش می‌رسد، و نقطه‌های ξ_i را هم، می‌توان‌طوری اختیارکردکه داشته باشیم:

$$f(\xi_i) = m_i \quad \text{یا} \quad f(\xi_i) = M_i$$

با گذر به‌حالت‌کلی، از خود تعریف مرز پایین و بالا داریم:

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$$

اگر جمله‌های هر دو نابرابری را در Δx_i $(\Delta x_i > 0)$ ضرب کنیم و، نسبت به i، جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$s \leqslant \sigma \leqslant S$$

اگر تقسیم‌بندی را تثبیت کنیم، مجموع‌های s و S، مقدارهای ثابتی خواهند بود، ولی، مجموع σ، با توجه به‌نامشخص بودن عددهای ξ_i، باز هم متغیر باقی می‌ماند. منتهی روشن است که، به‌حساب انتخاب ξ_i، می‌توان مقدار $f(\xi_i)$ را، به m_i یا M_i نزدیک کرد، به این معنا کـه، مجموع σ، بـه قدر دلخواه، به s یـا S نزدیک شود. در این صورت، نابرابری‌های قبل، به‌نکتهٔ کلی زیر، منجر می‌شوند: مجموع‌های s و S داربو، بـه‌ترتیب، بر مرزهای پایینی و بالایی مجموع‌های انتگرالی منطبق می‌شوند.

مجموع‌های داربو، دارای ویژگی‌های سادهٔ زیر هستند:

ویژگی اول. اگر به‌نقطه‌های تقسیم موجود، نقطه‌هـای تازه‌ای اضافه کنیم، نتیجهٔ این عمل این خواهد بود کـه مجموع پایینی داربو فقط می‌تواند ترقی و مجموع بالائی فقط می‌تواند تنزل کند.

اثبات. برای اثبات ایـن ویژگی، کافی است تنها یك نقطهٔ دیگر x' را به‌نقطه‌هـای تقسیم موجود، اضافه کنیم.

این نقطه را، بین نقطه‌های x_k و x_{k+1} می‌گیریم، به‌نحوی که

$$x_k<x'<x_{k+1}$$

مجموع بالائی جدید را S' می‌گیریم. تفاوت این مجموع با مجموع قبلی S، از این‌جا ناشی می‌شود که، در مجموع S، بازهٔ $[x_k, x_{k+1}]$ نظیر جملهٔ

$$M_k(x_{k+1}-x_k)$$

می‌باشد، درحالی‌که، در مجموع S'، همین بازه، متناظر با دو جملهٔ

$$M_k(x'-x_k)+\overline{M}_k(x_{k+1}-x')$$

است، که‌در آن، M_k و $\overline{M}_k$، عبارتند‌ازمرزهای بالایی تابع $f(x)$، دربازه‌های $[x_k, x']$ و $[x', x_{k+1}]$. از آن‌جا که، این بازه‌ها، عبارتند از بازه‌های جزئی $[x_k, x_{k+1}]$، بنابراین

$$\overline{M}_k\leqslant M_k,\quad \overline{\overline{M}}_k\leqslant M_k$$

به‌نحوی که

$$\overline{M}_k(x'-x_k)\leqslant M_k(x'-x_k)$$
$$\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x')\leqslant M_k(x_{k+1}-x')$$

از جمع عضو به‌عضو این دو نابرابری، نتیجه می‌شود:

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{M}_k(x_{k+1}-x')\leqslant M_k(x_{k+1}-x_k)$$

و از این‌جا نتیجه می‌شود: $S'\leqslant S$. بـرای مجموع پایینی هم، بـه‌همین ترتیب، می‌توان استدلال کرد.

یادداشت. چون تفاضل‌های $M_k-\overline{M}_k$ و $M_k-\overline{M}_k$، به‌روشنی، از نوسان Ω تابع $f(x)$ در تمامی بازهٔ $[a, b]$، تجاوز نمی‌کنند، پس تفاضل $S-S'$، نمی‌تواند از حاصل‌ضرب $\Omega\Delta x_k$ تجاوز کند. این حکم، برای حالتی هم که، در بازهٔ kام، چند نقطهٔ تقسیم تازه اختیار شود، به‌قوت خود باقی است.

ویژگی دوم. هیچ‌کدام از مجموع‌های پایینی داربو، از هیچ‌کدام از مجموع‌هـای بالایی تجاوز نمی‌کند، هر چند که نظیر تقسیم‌بندی دیگری از بازه باشد.

اثبات. بازهٔ $[a, b]$ را، به‌ترتیب دلخواهی، به‌بخش‌ها تقسیم می‌کنیم و، به‌ازای این تقسیم‌بندی، مجموع‌های داربو را، تشکیل می‌دهیم:

$$s_1, S_1 \qquad (I)$$

حالا، تقسیم دیگری از بازه را در نظر می‌گیریم که، به‌هیچ وجه، ارتباطی با تقسیم نخستین بازهٔ $[a, b]$، نداشته باشد. مجموع‌هـای داربوی نظیر این تقسیم را هم، تشکیل می‌دهیم:

$$s_2, S_2 \qquad (II)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $s_1\leqslant S_2$. برای این منظور، نقطه‌های تقسیم اول و دوم را یکی می‌کنیم؛ یك تقسیم‌بندی کمکی سوم به‌دست می‌آید، که نظیر مجموع‌های زیر است:

$$s_3, S_3 \qquad (III)$$

تقسیم‌بندی سوم، از تقسیم‌بندی اول، با افزودن نقطه‌های تقسیم جدید، به‌دست‌آمده است؛ بنابراین، براساس ویژگی اول مجموع‌های داربو، داریم:

$$s_1\leqslant S_3$$

با مقایسهٔ تقسیم‌بندی‌های دوم و سوم هم، چنین نتیجه‌ای به‌دست می‌آید:

$$S_3\leqslant S_2$$

ولی $s_3\leqslant S_3$، به‌طوری که از این سه نابرابری، نتیجه می‌شود:

$$s_1\leqslant S_2$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

از آن‌چه ثابت شد، نتیجه می‌شود که، مجموعهٔ $\{s\}$ مجموع‌های پایینی، از بالا، و

مثلاً با مجموع دلخواه بالایی S، کران‌دار است؛ و در چنین حالتی [۱۱]، این مجموعه، دارای مرز بالای متناهی است:

$$I^* = \sup\{s\}$$

و علاوه بر آن، برای هر مجموع بالایی دلخواه S داریم:

$$I^* \leqslant S$$

و چون، مجموعهٔ $\{s\}$ مجموع‌های بالایی، به‌این ترتیب، از پایین با عدد I^* کران‌دار می‌شود، بنابراین، دارای مرز پایین متناهی است:

$$I_* = \inf\{s\}$$

و ضمناً، مسلم است که

$$I_* \leqslant I^*$$

با مقایسهٔ همهٔ آن‌چه تا این جا گفتیم، برای مجموع‌های دلخواه پایینی و بالایی داربو داریم:

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S \qquad (۵)$$

عددهای I_* و I^* را، به‌ترتیب، انتگرال‌های پایینی و بالایی داربو می‌نامند [با ۳۰۱ که کمی بعد می‌آید، مقایسه کنید].

۲۹۷. شرط وجود انتگرال. حالا دیگر می‌توانیم، به‌کمک مجموع‌های داربو، این شرط را تنظیم کنیم.

قضیه. برای وجود انتگرال معین، لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0 \qquad (۶)$$

آن‌چه در ۲۹۵ گفته‌شد، برای روشن‌کردن معنای این‌حد، کافی‌است. مثلاً، «به‌زبان $\varepsilon - \delta$»، شرط (۶) به‌این معناست که: به‌ازای $\varepsilon > 0$ دلخواه، چنان $\delta > 0$ پیدامی‌شود که تنها وقتی $\lambda < \delta$ (یعنی، وقتی بازه به‌بخش‌هایی به‌درازای $\Delta x_i < \delta$ تقسیم شود)، بلافاصله، نابرابری زیر، برقرار باشد:

$$S - s < \varepsilon$$

اثبات. شرط لازم است. فرض کنیم، انتگرال وجود داشته باشد. آن‌وقت، از روی

$\varepsilon>0$ دلخواه و مفروض، چنان $\delta>0$ پیدا می‌شود، که تنها وقتی برای همهٔ Δx_iها داشته باشیم $\Delta x_i<\delta$، بلافاصله

$$|\sigma-I|<\varepsilon \quad \text{یا} \quad I-\varepsilon<\sigma<I+\varepsilon$$

هر جور که ξ_i را، درمحدوده‌های بازه‌های نظیر انتخاب کرده باشیم. ولی مجموع‌های s و S ــ همان‌طور که برای مجموع‌های انتگرالی معین کردیم ــ در تقسیم‌بندی مفروض بازه، عبارتند از مرزهای پایینی و بالایی نظیر. به‌همین مناسبت، برای آن‌ها خواهیم داشت:

$$I-\varepsilon\leqslant s\leqslant S\leqslant I+\varepsilon$$

به‌نحوی که

$$\lim_{\lambda\to 0} S=I, \qquad \lim_{\lambda\to 0} s=I \tag{۷}$$

که از آن‌جا، (۶) نتیجه می‌شود.

شرط کافی است. فرض کنیم، شرط (۶) برقرار باشد، آن‌وقت، از (۵) بلافاصله معلوم می‌شود که $I_*=I^*$، و اگر مقدار مشترک آن‌ها را I بنامیم:

$$s\leqslant I\leqslant S \tag{۵*}$$

اگر σ را، یکی از مقدارهای مجموع انتگرالی، که متناظر با همان تقسیم‌بندی بازه‌برای مجموع‌های s و S است، در نظر بگیریم، آن‌گاه، همان‌طور که می‌دانیم

$$s\leqslant\sigma\leqslant S$$

طبق شرط (۶)، اگر همهٔ Δx_iها را به‌قدر کافی کوچك بگیریم، تفاضل مجموع‌های s و S، از هر $\varepsilon>0$ مفروض، کوچکتر می‌شود. ولی، در چنین حالتی، این کیفیت، برای عددهای σ و I نیز، که در حد فاصل آن‌ها قرار دارند، درست است:

$$|\sigma-I|<\varepsilon$$

به‌طوری که I، حدی برای σ، یعنی انتگرال معین، است.

اگر نوسان M_i-m_i تابع را، دربازهٔ جزئی iام، با ω_i نشان‌دهیم، خواهیم‌داشت:

$$S-s=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$$

و شرط وجود انتگرال معین را، می‌توان چنین نوشت:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0 \qquad (۸)$$

و معمولاً هم این شرط، به‌همین شکل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲۹۸. طبقه‌های تابع‌های انتگرال‌پذیر. معیاری را که به‌دست آوردیم، دربارهٔ چند طبقه، از تابع‌های انتگرال‌پذیر، به‌کار می‌بریم.

I. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، پیوسته باشد، آن‌گاه، این تابع، انتگرال‌پذیر است.

اثبات. اگر تابع $f(x)$ پیوسته باشد، براساس نتیجهٔ قضیهٔ کانتور، [۸۷] می‌توان، از روی $\varepsilon > 0$ مفروض، همواره $\delta > 0$ را پیدا کرد، به‌نحوی که، اگر بازهٔ $[a, b]$ به‌بخش‌های به‌درازای $\Delta x_i < \delta$ تقسیم شده باشد، در آن‌صورت همهٔ $\omega_i < \varepsilon$. ازآن‌جا

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b-a)$$

چون $b-a$ عددی ثابت و ε به‌دلخواه کوچك است، بنابراین، شرط (۸) برقرار می‌شود، که ازآن، وجود انتگرال ناشی می‌شود. گزاره‌ای را که ثابت کردیم، می‌توان کمی تعمیم داد:

II. اگر تابع کران‌دار $f(x)$، در $[a, b]$، دارای تعدادی متناهی نقطه‌های ناپیوستگی باشد، در این‌صورت، تابع انتگرال‌پذیر است.

اثبات. نقطه‌های ناپیوستگی را $x', x'', \ldots, x^{(k)}$ می‌گیریم. $\varepsilon > 0$ دلخواه را انتخاب می‌کنیم، نقطه‌های ناپیوستگی را، به‌وسیلهٔ همسایگی‌های زیر، محصور می‌کنیم:

$$(x'-\varepsilon', x'+\varepsilon'), (x''-\varepsilon'', x''+\varepsilon''), \ldots, (x^{(k)}-\varepsilon^{(k)}, x^{(k)}+\varepsilon^{(k)})$$

به‌نحوی که درازای هرکدام، کمتر از ε باشد. تابع $f(x)$، در بازه‌های (بسته) باقی‌مانده، پیوسته است و می‌توانیم، در مورد هرکدام ازآن‌ها، نتیجهٔ قضیهٔ کانتور را به‌کار بریم. از بین عددهای δ، که از روی ε به‌دست می‌آیند، کوچکترین آن‌ها را انتخاب می‌کنیم (و آن‌را هم، با δ نشان می‌دهیم). این δ، برای هر یك از بازه‌هایی که در بالا نشان دادیم، مناسب است. هیچ چیز مانع آن نیست که، ضمناً، $\delta < \varepsilon$ انتخاب شود. حالا بازهٔ $[a, b]$ را، به‌چنان قسمت‌هایی تقسیم می‌کنیم که دارای Δx_iها، کمتر از δ بشود. این بازه‌های جزئی، دو نوع خواهند بود:

۱) بازه‌هایی که به‌تمامی در بیرون همسایگی‌های نقطه‌های ناپیوستگی، قرار دارند. نوسان تابع، در مورد این بازه‌ها: $\omega_i < \varepsilon$.

۲) بازه‌هایی که، یا به‌تمامی درددرون این‌همسایگی‌ها محصورند و یا بخشی از آن‌ها، در این همسایگی‌ها، قرار دارد.

چون تابع $f(x)$ کران‌دار است، بنابراین، نوسان آن، Ω، در تمامی بازهٔ $[a, b]$، متناهی خواهد بود؛ نوسان، در بازه‌های جزئی هم، از Ω تجاوز نمی‌کند.

مجموع

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

را، به‌دو مجموع

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'}, \quad \sum_{i''} \omega_{i''} \omega x_{i''}$$

تقسیم می‌کنیم که، به‌ترتیب، مربوط به‌بازه‌های نوع اول ودوم باشند.

برای مجموع اول، شبیه قضیهٔ قبل، خواهیم داشت:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon(b-a)$$

واما، درمورد مجموع نوع دوم، یادآوری می‌کنیم کـه، درازای آن بازه‌هایی از نوع دوم که، به‌تمامی در درون همسایگی‌ها واقع‌اند، در مجموع، از $k\varepsilon$ کوچکتر است؛ درازای هـر بازه‌ای هم کـه تنها قسمتی از آن در داخل همسایگی واقع است، نمی‌تواند بزرگتر از $2k$ باشد و، درنتیجه، مجموع درازای آن‌ها از $2k\delta$، وبه‌طور مسلم، از $2k\varepsilon$ کوچکتر است. بنابراین

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \cdot 3k\varepsilon$$

به‌این‌ترتیب، سرانجام، به‌ازای $\Delta x_i < \delta$، داریم:

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon[(b-a) + 3k\Omega]$$

و همین، حکـم را ثابت می‌کند، زیرا، مقدار داخل کـروشه عـددی ثابت، و ε مقداری به‌دلخواه کوچك است.

درپایان، طبقهٔ دیگری از تابع‌های انتگرال‌پذیر را، که جزو قبلی‌ها نیست، نشان‌می‌دهیم.

III. تابع کران‌دار یکنوای $f(x)$ همیشه انتگرال‌پذیر است.

اثبات. $f(x)$ را، تابـع صعودی یکنـوا می‌گیریم. نوسان ایـن تابـع، در بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ چنین است:

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$\varepsilon > 0$ را به‌دلخواه درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

همین‌که $\Delta x_i < \delta$ باشد، بلافاصله، خواهیم داشت:

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \delta \sum [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \delta [f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

که از آن‌جا، انتگرال‌پذیری تابع، ثابت می‌شود.

۲۹۹. ویژگی‌های تابع‌های انتگرال‌پذیر. از معیار شمارهٔ **۲۹۷**، می‌توان یک سلسله خاصیت‌های کلی، برای تابع‌های انتگرال‌پذیر، به‌دست آورد.

I. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه، تابع‌های $|f(x)|$ و $kf(x)$ $(k = \text{const.})$ هم، در این بازه، انتگرال‌پذیرند.

اثبات را برای تابع $|f(x)|$ انجام می‌دهیم. از آن‌جا که برای هردو نقطهٔ x' و x'' از بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$، داریم [**۱۷**]:

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant |f(x'')| - |f(x')|$$

بنابراین، نوسان تابع $|f(x)|$ هم، دراین بازه، از ω_i تجاوز نمی‌کند [**۸۵**]. از آن‌جا

$$\sum \omega_i^* \Delta x_i \leqslant \sum \omega_i \Delta x_i$$

وچون مجموع سمت راست به‌سمت صفر میل می‌کند (به‌ازای $\lambda \to 0$)، بنابراین به‌طور مسلم، سمت‌چپ هم به‌سمت صفرمیل می‌کند، یعنی تابع $|f(x)|$ انتگرال‌پذیر است.

II. اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشند، مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب آن‌ها هم، انتگرال‌پذیر است.

اثبات را، برای حالت حاصل‌ضرب می‌دهیم.

فرض کنیم: $|f(x)| \leqslant k$ و $|g(x)| \leqslant L$. دو نقطهٔ دلخواه x' و x'' را، در بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$، اختیار می‌کنیم و تفاضل

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') =$$

$$= [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x')$$

را درنظر می‌گیریم معلوم است که

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leqslant L\omega_i + K\bar{\omega}_i$$

که در آن، ω_i و $\bar{\omega}_i$، به‌ترتیب، نوسان‌های تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ را، در بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ نشان می‌دهند. ولی، در این صورت [۸۵]، برای نوسان Ω_i تابع $f(x)g(x)$، در این بازه، خواهیم داشت:

$$\Omega_i \leqslant L\omega_i + K\bar{\omega}_i$$

از آن‌جا

$$\sum \omega_i \Delta x_i \leqslant L\sum \omega_i \Delta x_i + K\sum \bar{\omega}_i \Delta x_i$$

وچون دومجموع اخیر (به‌ازای $\lambda \to 0$) به‌سمت صفر میل می‌کند، مسلماً، درمورد مجموع اولی هم، چنین خواهد بود که، در نتیجه، انتگرال‌پذیری تابع $f(x)g(x)$ را ثابت می‌کند.

III. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه، این تابع، در بخش دلخواه $[\alpha, \beta]$ از این بازه، انتگرال‌پذیر خواهد بود. برعکس، اگر بازهٔ $[a, b]$ به‌بخش‌هایی تقسیم شود و تابع $f(x)$، در هر بخش جداگانه انتگرال‌پذیر باشد، در آن صورت، در تمامی بازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر خواهد بود.

اثبات. تابع $f(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر می‌گیریم و در این بازه، مجموع $\sum \omega_i \Delta x_i$ را می‌سازیم (با این شرط که، نقطه‌های α و β، جزو نقطه‌های تقسیم باشند). مجموع مشابه، در بازهٔ $[\alpha, \beta]$، از راه حذف بعضی جمله‌ها (که مثبت‌اند) به‌دست می‌آید و روشن است که، اگر مجموع اولی به‌سمت صفر میل کند، مجموع اخیر هم، به‌طور مسلم، به‌سمت صفر میل خواهد کرد.

حالا، فرض می‌کنیم، بازهٔ $[a, b]$، مثلاً به‌دو بخش $[a, c]$ و $[c, b]$ تقسیم شده باشد $(a<c<b)$، و در هر کدام از آن‌ها، تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر باشد. دوباره، مجموع $\sum \omega_i \Delta x_i$ را، برای بازهٔ $[a, b]$، محاسبه می‌کنیم، اگر نقطهٔ c، یکی از نقطه‌های تقسیم باشد، مجموع نامبرده، از دومجموع مشابه برای بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$، تشکیل می‌شود و همراه با آن‌ها، به‌سمت صفر میل می‌کند. این نتیجه، برای حالتی هم، که c یکی از نقطه‌های تقسیم نباشد، به‌قوت خود باقی است: اگر این نقطه را، به‌نقطه‌های تقسیم اضافه کنیم، تنها یکی از جمله‌های مجموع تغییر می‌کند، که خودش، به‌روشنی، به‌سمت صفر میل می‌کند.

IV. اگر مقدار تابع انتگرال‌پذیر را، در تعدادی متناهی از نقطه‌ها (و مثلاً، k نقطه) تغییر دهیم، انتگرال‌پذیری آن، از بین نمی‌رود.

اثبات روشن است، زیرا این تغییر، بر بیش از k جمله از مجموع $\sum \omega_i \Delta x_i$، اثر نمی‌گذارد.

به‌سادگی می‌توان فهمید که، ضمن این تغییر، مقدار خود انتگرال هم، دستخوش تغییر نمی‌شود. این مطلب، از آن‌جا ناشی می‌شود که، در هردو تابع ـ تابع اولی و تابع تغییر یافته ـ می‌توان نقطهٔ ξ_i را، درمجموع انتگرالی، همواره چنان انتخاب کرد که برنقطه‌هایی که، برای آن‌ها مقدارهای انتگرال تغییر کرده است، منطبق نشود.

یادداشت. به‌خاطر همین ویژگی است که امکان گفت و گو دربارهٔ انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، حتی در موردی که تابع $f(x)$ درتعداد متناهی ازنقطه‌های بازهٔ $[a, b]$ نامعین باشد، پیدا می‌شود. ضمناً، می‌توان، برای تابع، دراین نقطه‌ها، مقدارهای کاملا دلخواهی را درنظر گرفت و، به‌این ترتیب، انتگرال تابعی را محاسبه کرد که در تمام نقطه‌های خود معین است. همان‌طور که دیدیم، نه‌وجود انتگرال و نه‌مقدار آن، بستگی به‌مقدارهایی که برای تابع دراین نقطه‌ها درنظر می‌گیریم، ندارد.

۳۰۰. مثال‌ها و اضافه‌ها. مثال‌هایی از کاربرد معیار شمارهٔ **۲۹۷** را، درمورد تابع‌های مشخص، می‌آوریم.

۱) به‌تابعی که در ۷۰، ۸) مورد بررسی قرار دادیم، برمی‌گردیم. این تابع، به‌این ترتیب، تعریف می‌شد: درحالتی که x، کسرسره و تحویل ناپذیر $\frac{p}{q}$ باشد، مقدار $f(x)$ برابر $\frac{1}{q}$، و در سایر نقطه‌های بازهٔ $[0, 1]$، مقدار $f(x)$ برابر ۰ است.

فرض کنیم، بازهٔ $[0, 1]$، به‌بخش‌هایی به‌درازای $\Delta x_i \leqslant \lambda$، تقسیم‌بندی شود. عدد طبیعی و دلخواه N را، انتخاب می‌کنیم. تمامی بازه‌های جزئی را، به‌دو نوع تقسیم می‌کنیم:

(a) درنوع اول، بازه‌هایی را جامی‌دهیم که شامل عددهای $\frac{p}{q}$ با مخرج‌های $q \leqslant N$ باشند. از آن‌جا که، چنین‌عددهایی، به‌تعداد متناهی $k = k_N$ هستند، تعداد بازه‌های نوع اول از $2k$ ومجموع درازاهای آن‌ها، از $2k\lambda$ تجاوز نمی‌کند.

(b) درنوع دوم، بازه‌هایی را قرار می‌دهیم که شامل عددهای یاد شده در بالا، نباشند و، روشن است که برای آن‌ها، نوسان ω_i، کمتر از $\frac{1}{N}$ است.

اگر مجموع $\sum \omega_i \Delta x_i$ را، متناظر بادونوع بازه، به‌دو قسمت تقسیم کنیم و هرکدام را، به‌طور جداگانه، مورد برآورد قراردهیم، نتیجه می‌شود:

$$\sum \omega_i \Delta x_i < 2k_N\lambda + \frac{1}{N}$$

اگر ابتدا $N>\frac{۲}{\varepsilon}$ و، سپس، $\delta=\frac{\varepsilon}{۴k_N}>\lambda$ اختیار کنیم، خواهیم داشت $\sum\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$، که انتگرال‌پذیری تابع را ثابت می‌کند.

این مثال، بیشتر از این جهت جالب است که تابع، مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌های ناپیوستگی دارد و، با این وصف، انتگرال‌پذیر است (ضمناً، نمونه‌هایی از این نوع را، می‌توان، بر اساس قضیهٔ III ساخت).

۲) حالا دوباره، تابع دیریکله را در نظر می‌گیریم [۴۶، ۷۰، ۷۰]: $\chi(x)=۱$، اگر x عددی گویا باشد، و $\chi(x)=۰$، اگر x عددی گنگ باشد. چون در هر بخشی از بازهٔ $[۰\ ,۱]$، نوسان این تابع $\omega=۱$ است، بنابراین داریم: $\sum\omega_i\Delta x_i=۱$، به‌طوری که تابع، آشکارا انتگرال‌ناپذیر است.

۳) معیاری که، در ۲۹۷، برای وجود انتگرال آوردیم، می‌تواند به صورت زیر داده شود:

برای وجود انتگرال معین، لازم و کافی است تا، از روی عددهای مفروض $\varepsilon>۰$ و $\sigma>۰$، بتوان چنان $\delta>۰$ پیدا کرد که، تنها وقتی همهٔ Δx_iها کوچکتر از δ هستند، مجموع

$$\sum_{i'}\Delta x_{i'},$$

درازاهای بازه‌های نظیر نوسان

$$\omega_{i'}\geqslant\varepsilon$$

خود کوچکتر از σ باشد.

شرط لازم است. لزوم شرط، از نابرابری‌های زیر روشن است:

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i\geqslant\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}\geqslant\varepsilon\sum_{i'}\Delta x_{i'},$$

اگر به‌حساب انتخاب δ، مجموع اول را کمتر از $\varepsilon\sigma$ بگیریم.

شرط کافی است. کافی بودن شرط هم، از برآورد زیر نتیجه می‌شود:

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i=\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}<\Omega\sum_{i'}\Delta x_i+\varepsilon\sum_{i''}\Delta x_{i''}<\Omega\sigma+\varepsilon(b-a)$$

(در این‌جا، Ω، مثل همیشه، معرف نوسان تابع در تمامی بازه است و با علامت $''i$، آن بازه‌های جزئی نشان داده شده است که برای نوسان آن‌ها داریم: $\omega_{i''}<\varepsilon$).

۴) معیار را در شکل تازه‌اش، برای اثبات گزارهٔ زیر به‌کار می‌بریم:

اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a,\ b]$، انتگرال‌پذیر باشد، ضمناً، مقدارهای آن، از

محدودهٔ بازهٔ $[c, d]$، که در آن تابع $\varphi(y)$ پیوسته است، تجاوز نکند، در آن صورت، تابع $\varphi(f(x))$ نیز در $[a, b]$، انتگرال‌پذیر است.

عددهای $\varepsilon > 0$ و $\sigma > 0$ را، به‌دلخواه، در نظر می‌گیریم. از روی عدد ε، بنابر پیوستگی تابع $\varphi(y)$، چنان عدد $\eta > 0$ پیدا می‌شود که، در بازهٔ دلخواه مقدارهای y به‌درازای کوچکتر از η، نوسان تابع φ، کوچکتر از ε باشد.

با توجه به انتگرال‌پذیری تابع f، ازروی عددهای η و σ، چنان عدد δ پیدا می‌شود که، تنها وقتی بازه به بخش‌هایی به درازای $\Delta x_i < \delta$ تقسیم شده باشد، مجموع $\sum_i \Delta x_i$ درازاهای آن‌هایی که برای آن‌ها نوسان تابع f، $\omega_i[f] \geqslant \eta$، خودکمتر از σ است [۳] را ببینید]. برای سایر بازه‌ها داریم: $\omega_i[f] \geqslant \eta$ و، در نتیجه، از روی خودانتخاب عدد η، $\omega_i[\varphi(f)] < \varepsilon$. به‌این ترتیب، برای تابع مرکب $\varphi(f(x))$، نوسان‌ها، تنها در بعضی بازه‌های گروه اول که مجموع درازاهای آن‌ها کوچکتر از σ است، ممکن است بزرگتر یا مساوی ε باشند. با به کار بردن معیار ۳) در مورد تابع مرکب، نسبت به انتگرال‌پذیری آن، متقاعد می‌شویم.

۵) اگر دربارهٔ تابع φ، تنها انتگرال‌پذیری را فرض کنیم، آن‌وقت، تابع مرکب، می‌تواند انتگرال‌پذیر نباشد. مثالی می‌آوریم:

تابع $f(x)$ را، همان تابعی می‌گیریم که در ۱) مورد بررسی قرار دادیم. این تابع در بازهٔ $[۰, ۱]$، انتگرال‌پذیر است و، در ضمن، مقدارهای آن، از حدود این بازه تجاوز نمی‌کند. سپس فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} \varphi(y) = ۱ & (۰ < y \leqslant ۱) \\ \varphi(۰) = ۰ \end{cases}$$

تابع $\varphi(y)$ هم، در بازهٔ $[۰, ۱]$، انتگرال‌پذیر است.

تابع مرکب $\varphi(f(x))$، به‌طوری که به‌سادگی دیده می‌شود، همان تابع دیریکله است [۲] را ببینید]. و بنابراین، در بازهٔ $[۰, ۱]$، انتگرال‌پذیر نیست.

۳۰۱. انتگرال‌های پایینی و بالایی به‌عنوان حدها. دوباره به انتگرال‌های پایینی و بالائی برمی‌گردیم (که در شمارهٔ **۲۹۶**، مانند مرزهای مجموع‌های s و S داربو، تعریف شده بودند). در این‌جا، ثابت می‌کنیم که این مرزها، چیزی جز حد مجموع‌های نامبرده، نیستند.

قضیهٔ داربو. تابع کران‌دار $f(x)$ هرچه باشد، برای آن همیشه داریم:

$$I_* = \lim_{\lambda \to 0} s, \quad I^* = \lim_{\lambda \to 0} S$$

اثبات را، مثلا، برای مجموع بالایی می‌آوریم.

قبل ازهمه، برای $\varepsilon > 0$ (که ازقبل‌مفروض است)، چنان تقسیمی برای بازهٔ $[a, b]$ انتخاب می‌کنیم که، برای مجموع بالایی S' نظیر آن، داشته باشیم:

$$S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (۹)$$

امکان این انتخاب وجود دارد، زیرا I^*، برای مجموعهٔ مجموع‌های بالایی، مرز پایینی است. فرض کنیم، این تقسیم‌بندی، شامل m' نقطهٔ تقسیم (درونی) باشد.

حالا فرض می‌کنیم:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2m'\Omega}$$

که درآن، Ω عبارت است از نوسان تابع $f(x)$، در تمامی بازهٔ $[a, b]$. علاوه برآن، تقسیم غیرمشخص بازه را، در نظر می‌گیریم که، برای همهٔ Δx_iهای آن، داشته باشیم: $\Delta x_i < \delta$؛ ومجموع S را، متناظر با آن می‌گیریم.

برای این‌که، تفاضل بین S و I^* را برآورد کنیم، یک تقسیم‌بندی سوم بازه را، وارد می‌کنیم، که از الحاق نقطه‌های دو تقسیم اول به‌دست‌آمده باشد. اگرمجموع بالایی نظیر این‌تقسیم‌بندی‌سوم‌را، S''بگیریم، بنابرویژگی اول‌مجموع داربو [۲۹۶]؛ $S'' \leqslant S'$، به‌نحوی‌که به‌طور مسلم [(۹)] را ببینید]:

$$S'' < I^* + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (۱۰)$$

ازطرف دیگر، بنابریادداشت شمارهٔ ۲۹۶، تفاضل $S - S''$، ازحاصل‌ضرب Ω درمجموع درازاهای Δx_i، مربوط به‌بازه‌هایی ازتقسیم دوم، که در درون آن‌ها، نقطه‌های تقسیم اول قرار دارند، تجاوز نمی‌کند. ولی تعداد این بازه‌ها، بیشتر از m' نیست و درازای‌هرکدام ازآن‌ها، کمتر از δ است، به‌نحوی‌که

$$S - S'' < m'\Omega\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

ازآن‌جا، درارتباط با (۱۰)

$$S < I^* + \varepsilon$$

وچون، ازطرف دیگر، $S \geqslant I^*$، بنابراین، تنها با شرط $\Delta x_i < \delta$

$$0 \leqslant S - I^* < \varepsilon$$

به‌طوری‌که، درواقع، $S \to I^*$.

ازاین قضیه، بلافاصله نتیجه می‌شودکه همیشه

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = I^* - I_*$$

این رابطه، امکان می‌دهدکه، معیار وجود انتگرال را، به صورت زیر، بیان‌کنیم [با **۲۹۷** مقایسه کنید].

برای وجود انتگرال معین، لازم و کافی است‌که انتگرال‌های پایینی و بالایی‌دار بو، با هم برابر باشند.

$$I_* = I^*$$

اگر این شرط برقرارباشد، مقدارمشترك دوانتگرال دار بو، مقدار انتگرال معین رابه‌دست می‌دهد.

شکل جدید شرط، نسبت به‌شکل قبلی آن، امتیازهایی دارد. برای این‌که،ازبرابری انتگرال‌های دار بو مطمئن شویم،کافی است روشن‌کنیم‌که نابرابری

$$S - s < \varepsilon$$

برای هر ε دلخواه دست‌کم برای یك زوج مجموع‌های s و S ، صادق است. در واقع، بنا بر (۵)، آن‌وقت

$$0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$$

ازآن‌جا، به‌دلیل دلخواه بودن ε، برابری مطلوب به‌دست می‌آید.

به‌سادگی معلوم می‌شودکه چگونه می‌توان، شرط انتگرال‌پذیری راکـه در شمارهٔ قبل آوردیم [۳] را بیینید]، ساده‌ترکرد.

§۲. ویژگی‌های انتگرال‌های معین

۳۰۲. انتگرال روی بازهٔ جهت‌دار. تا این‌جا، ضمـن صحبت از «انتگرال معین، در بازهٔ از a تا b»، همیشه فرض می‌کردیم: $a < b$. حالا، می‌خواهیم، از این محدودیت، صرف‌نظرکنیم.

برای این منظور، قبل از هرکار، مفهوم بازهٔ جهت‌دار، یا بازهٔ توجیه شده، راروشن می‌کنیم. منظور از بازهٔ جهت‌دار $[a, b]$ (که در آن می‌تواند $a<b$ یا $a>b$، باشد)، مجموعهٔ مقدارهایی از x است که در نابرابری‌های

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{یا} \quad a \geqslant x \geqslant b$$

صدق کنند و از a به b منظم یامرتب شده باشند، یعنی، درحالت $a<b$، به‌ترتیب‌صعودی و، درحالت $a>b$، به ترتیب نزولی منظم شده باشند، بنابراین، بین بازهٔ $[a, b]$ با بازهٔ $[b, a]$، تفاوت قایل می‌شویم: بسته به نوع تشکیل آن‌ها (مثل مجموعه‌های عددی)، در جهت خود، با یکدیگر فرق دارند.

به‌این‌ترتیب، تعریف انتگرال‌معین ــ که در **۲۹۵** آمده است ــ مربوط به‌بازهٔ توجیه‌شدهٔ $[a, b]$ می‌شود، منتهی تنها درحالت $a<b$.

به تعریف انتگرال، دربازهٔ جهت‌دار $[a, b]$، برمی‌گردیم، با فرض $a>b$. دراین حالت، می‌توان، به‌طور معمول، با قراردادن نقطه‌های تقسیم درجهت از a به b، بازه را تقسیم کرد:

$$x_0 = a > x_1 > x_2 > \cdots > x_i > x_{i+1} > \cdots > x_n = b$$

با انتخاب نقطهٔ ξ_i در هر بازهٔ جزئی $[x_i, x_{i+1}]$، به‌طوری‌که $x_i \geqslant \xi_i \geqslant x_{i+1}$، مجموع انتگرالی زیررا تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

که درآن، این‌بار، $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < 0$. بالاخره، حد این مجموع، وقتی $\lambda = \max |\Delta x_i| \to 0$، ما را، به‌مفهوم انتگرال می‌رساند.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

اگر برای بازه‌های $[a, b]$ و $[b, a]$ ($a<b$ یا $a>b$)، یك نوع نقطه‌های تقسیم و یك نوع ξ_i راانتخاب کنیم، مجموع‌های‌انتگرالی نظیر آن‌ها، تنها درعلامت فرق‌خواهند داشت. ازاین‌جا، با عبور به‌حد، این گزاره به‌دست می‌آید:

۱°. اگر $f(x)$، در بازهٔ $[b, a]$ انتگرال‌پذیر باشد، دربازهٔ $[a, b]$ هم، انتگرال‌پذیر خواهد بود و، ضمناً، داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

می‌شد این برابری را، برای انتگرال معین $\int_a^b$ به‌ازای $b<a$ گرفت، با این فرض که انتگرال $\int_b^a$ وجود دارد.

یادآوری می‌کنیم که، بنابر تعریف، فرض می‌شود:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

۳۰۳. ویژگی‌هایی که با تساوی بیان می‌شوند. ویژگی‌های بعدی انتگرال‌های معین را، که با تساوی بیان می‌شوند، می‌آوریم*.

۲°. اگر تابع $f(x)$، در بزرگترین بازه از بازه‌های $[a, b]$، $[a, c]$ و $[c, b]$، انتگرال‌پذیر باشد،** در دو بازهٔ دیگرهم انتگرال‌پذیر است و، وضع استقرار نقطه‌های a، b و c به‌هرترتیبی باشد، تساوی زیر برقرار است:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم: $a<c<b$ و تابع، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر است. این مطلب که، تابع در بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ انتگرال‌پذیر است، از **۲۹۹، III** نتیجه می‌شود.

تقسیم‌بندی بازهٔ $[a, b]$ را، به‌بخش‌ها، درنظرمی‌گیریم، ضمناً، نقطهٔ c را، یکی از نقطه‌های تقسیم به‌حساب می‌آوریم. مجموع‌های انتگرالی را تشکیل می‌دهیم، خواهیم داشت (مفهوم علامت‌ها، روشن است):

$$\sum_a^b f(\xi)\Delta x = \sum_a^c f(\xi)\Delta x + \sum_c^b f(\xi)\Delta x$$

که با عبور به‌حد، به‌ازای $\lambda \to 0$، به‌همان تساوی مطلوب می‌رسیم.

حالت‌های دیگر وضع نقطه‌های a، b و c هم، به‌همین حالت تبدیل می‌شوند. مثلا فرض کنیم: $b<a<c$ و تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[c, b]$ انتگرال‌پذیر می‌گیریم. (و یا در بازهٔ

---

*) در این‌جا، وبعداً، اگرصحبت برسر انتگرال $\int_a^b$ باشد، اگر قید دیگری نداشته باشیم، امکان هر دو حالت $a<b$ و $a>b$ را به‌حساب می‌آوریم.

**) می‌توانستیم فرض کنیم، تابع $f(x)$، در هرکدام از دو بازهٔ کوچکتر انتگرال‌پذیراست و، درآن صورت، ثابت کنیم که دو بازهٔ بزرگترهم، انتگرال‌پذیر خواهد بود.

$[b, c]$، که باتوجه به ۱°، فرقی نمی‌کند). دراین حالت، بنابرآن‌چه ثابت کردیم، خواهیم داشت:

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$$

ازآن‌جا، با انتقال انتگرال‌های اول و دوم، ازیك طرف تساوی به‌طرف دیگر، و جابه‌جا کردن حدها (براساس ویژگی ۱°)، به‌همان رابطهٔ سابق می‌رسیم.

۳°. اگر $f(x)$، دربازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیرباشد، آن‌گاه $kf(x)$ هم $(k = \text{const.})$، در این بازه، انتگرال‌پذیر خواهد بود. ضمناً

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

۴°. اگر تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشند، آن‌گاه $f(x)\pm g(x)$ هم، در این بازه، انتگرال‌پذیر خواهد بود. ضمناً

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

درهردوحالت، استدلال، شبیه هم، و با آغاز ازمجموع‌های انتگرالی وعبور به‌حد، انجام می‌گیرد. این استدلال را، مثلا، درمورد حکم ۴°، انجام می‌دهیم.

بازهٔ $[a, b]$ را، به‌طورغیرمشخص، به‌بخش‌ها تقسیم می‌کنیم ومجموع‌های انتگرالی را، برای هرسه انتگرال، تشکیل می‌دهیم، ضمناً، نقطه‌های ξ_i را برای همهٔ بازه‌های جزئی به‌دلخواه، ولی، برای همهٔ مجموع‌های انتگرالی، یکسان انتخاب می‌کنیم. دراین صورت خواهیم داشت:

$$\sum[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum g(\xi_i)\Delta x_i$$

حالا، λ را به‌سمت صفر میل می‌دهیم. چون، هردوحد سمت راست وجود دارند، بنابراین، حد سمت چپ نیز وجود داردکه انتگرال‌پذیری تابع‌های $f(x)\pm g(x)$ را ثابت می‌کند. با عبور به‌حد، این تساوی، به‌رابطهٔ مطلوب، منجر می‌شود.

یادداشت. به‌این نکته توجه‌کنیم که، برای اثبات دوحکم اخیر، نیازی به‌گزاره‌های ۲۹۹، I و II، نداریم وانتگرال‌پذیری تابع‌های $kf(x)$ و $f(x)\pm g(x)$ را، می‌توان، مستقیماً و با عبور به‌حد، ثابت‌کرد.

۳۰۴. ویژگی‌هایی‌که با نابرابری بیان می‌شوند. تا این‌جا، به‌ویژگی‌هایی از انتگرال‌ها پرداختیم، که با برابری بیان می‌شدند؛ حالا، به‌آن ویژگی‌هایی می‌پردازیم که

با نابرابری بیان می‌شوند.

۵°. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر وغیرمنفی و $a<b$، باشد، در آن صورت

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

که اثبات آن، روشن است.

اثبات نتیجهٔ دقیق‌تر زیر، دشوارتر است:

اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر، مثبت $a<b$، باشد، آن وقت

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

اثبات. را به‌طریق برهان خلف می‌دهیم. فرض کنیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

آن‌گاه، وقتی $\lambda \to 0$، مجموع بالایی داربو هم، به‌سمت صفر میل می‌کند [۲۹۷، ۷)]. با اختیار $\varepsilon_1 > 0$ غیرمشخص، می‌توانیم این مجموع را کوچکتر از $\varepsilon_1(b-a)$ قرار دهیم. ضمناً، لااقل یکی از مرزهای بالایی M_1، کمتر از ε_1 می‌شود، به‌زبان دیگر، در $[a, b]$، چنان بخش $[a_1, b_1]$ پیدا می‌شود که، در محدودهٔ آن، داشته باشیم: $f(x)<\varepsilon_1$.

چون، ضمناً

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = 0^*$$

می‌توان، به‌ترتیب مشابهی، از $[a_1, b_1]$، بخش $[a_2, b_2]$ را جدا کرد که درمحدودهٔ آن: $f(x)<\varepsilon_2$، و در آن، ε_2، عدد دلخواه و مثبتی کوچکتر از ε_1 است وغیره.

با انتخاب دنبالهٔ عددهای مثبت $\varepsilon_k \to 0$، می‌توان چنان دنبالهٔ تودرتوی $[a_k, b_k]$

---

*) در واقع، با توجه به ۲°، $\int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{b_1} + \int_{b_1}^b$ و چون $\int_a^{a_1} \geqslant 0$ و $\int_{b_1}^b \geqslant 0$، بنابراین

$$0 \leqslant \int_{a_1}^{b_1} \leqslant \int_a^b = 0$$

را معین کرد (و، اگر بخواهیم، از نظر درازا، نزولی تا صفر) که اگر داشته باشیم $a_k \leqslant x \leqslant b_k$ $(k = ۱, ۲, ۳, \ldots)$، نابرابری $۰ < f(x) < \varepsilon_k$ برقرار باشد.

در این‌صورت، بنابر پیش قضیهٔ شمارهٔ ۳۸، نقطهٔ مشترک c، بین همهٔ این بازه‌ها وجود دارد، که برای آن، باید داشته باشیم:

$$۰ < f(c) < \varepsilon_k \qquad (k = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

که ممکن نیست، زیرا $\varepsilon_k \to ۰$، و قضیه ثابت می‌شود.

از این‌جا (و از ۴°)، نتیجهٔ سادهٔ زیر پیدا می‌شود:

۶°. اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، دربازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشند، و همیشه‌داشته باشیم: $f(x) \leqslant g(x)$ [ویا $f(x) < g(x)$]، درآن‌صورت، بافرض $a < b$، خواهیم‌داشت:

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx \left[\text{یا } \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx\right]$$

که برای اثبات آن، کافی است از ویژگی قبل، برای تفاضل $g(x) - f(x)$ استفاده کنیم.

ویژگی زیرهم، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

۷°. فرض کنیم، تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$ و با شرط $a < b$، انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه، نابرابری زیر درست است:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

وجود انتگرال اخیر را، می‌توان از ۲۹۹، I نتیجه گرفت. سپس، ویژگی ۶° را، در مورد این تابع‌ها به‌کار می‌بریم:

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

ولی، اگر از مجموع‌های انتگرالی آغاز و، سپس، عبور کنیم، نابرابری، مستقیماً، به‌دست می‌آید:

$$|\sum f(\xi_i)\Delta x_i| \leqslant \sum |f(\xi_i)| \cdot \Delta x_i^*$$

۸°. اگر $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$ و $a < b$، انتگرال‌پذیر، و اگر در تمامی این بازه، نابرابری

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

برقرار باشد، آن‌گاه

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

می‌توان ویژگی ۶° را، در مورد تابع‌های m، $f(x)$ و M به‌کار برد، ولی‌ساده‌تر

---

*) چون $a < b$، پس $\Delta x_i > ۰$.

این است که، مستقیماً، و از نابرابری‌های مسلم زیر استفاده کنیم:

$$m\cdot\sum\Delta x_i\leqslant\sum f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\leqslant M\cdot\sum\Delta x_i$$

و سپس، به‌حد عبور کنیم.

به‌این‌رابطه‌ها، که‌ثابت کردیم، می‌توان شکل راحت‌ترتساوی‌را داد و، درعین‌حال، از قید $a<b$ هم آزاد شد.

۹°. **قضیهٔ مربوط به‌مقدار میانگین.** $f(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$ (a می‌تواندکوچکتر یا بزرگتر از b باشد)، انتگرال‌پذیر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، برای تمامی طول این بازه داشته باشیم: $m\leqslant f(x)\leqslant M$. آن‌وقت

$$\int_b^a f(x)dx=\mu(b-a)$$

که در آن داریم: $m<\mu<M$.

اثبات. در حالت $a<b$، بنابر ویژگی ۸°، داریم:

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$$

از آن‌جا

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant M$$

که با قراردادن

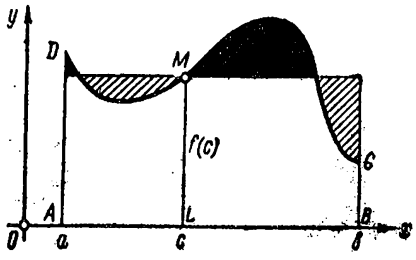
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\mu$$

برابری مطلوب، به‌دست می‌آید.

درحالت $a>b$، همین‌بحث را برای $\int_b^a$ انجام می‌دهیم و، سپس، با جابه‌جاکردن حدها، به‌رابطهٔ قبلی می‌رسیم.

وقتی که تابع $f(x)$، پیوسته باشد، ایـن برابری، صورت خاص و ساده‌تری پیدا می‌کند. در واقع، اگر m و M را، کوچکترین و بزرگترین مقدارتابع بگیریم (که بنابر قضیهٔ ویرشتراس ۸۵، وجـود دارند)، آن‌وقت، مقدار μ ــ بنابر قضیهٔ بولزانو ــ کوشی [۸۲] ــ به‌وسیلهٔ تابع $f(x)$، در یك نقطهٔ c از بازهٔ $[a, b]$، بیان می‌شود. به‌این‌ترتیب:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$$



شکل ۵

که در آن، c در بازهٔ $[a, b]$ واقع است.

معنای هندسی رابطهٔ اخیر، روشن است. شکل منحنی‌الخط $ABCD$ (شکل ۵)، واقع در زیر منحنی $y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم. مساحت این شکل (که با انتگرال معین بیان می‌شود)، برابر است با مساحت مستطیلی با همان قاعده و با عرض متوسط LM به‌عنوان ارتفاع.

۱۰°. **تعمیم قضیهٔ مربوط به مقدار میانگین.** فرض کنیم: ۱) تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشند، ۲) $m\leqslant f(x)\leqslant M$، ۳) $g(x)$ در تمامی بازه علامت عوض نکند: $g(x)\geqslant 0$ [یا $g(x)\leqslant 0$]. آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$$

که در آن، $m\leqslant\mu\leqslant M$*.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم $g(x)\geqslant 0$ و $a<b$. آن‌وقت داریم:

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$$

از این نابرابری، براساس ویژگی‌های ۶° و ۳°، نتیجه می‌گیریم:

$$m\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

که با توجه به فرض‌های مربوط به تابع $f(x)$، بنابر ۵° داریم:

$$\int_a^b g(x)dx\geqslant 0$$

اگر این انتگرال برابر صفر باشد، آن‌گاه از نابرابری قبلی روشن می‌شود که، همراه با آن، داریم:

---

*) خود وجود انتگرال $f(x)g(x)$، از شمارهٔ ۲۹۹، II نتیجه می‌شود. ضمناً، می‌شد به‌جای انتگرال‌پذیری تابع $f(x)$، مستقیماً، انتگرال‌پذیری حاصل‌ضرب $f(x)g(x)$ را فرض گرفت.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

و حکم قضیه روشن است. اگر هم، این انتگرال بزرگتر از صفر باشد، درآن‌صورت، همهٔ بخش‌های نابرابری مضاعف فوق را برآن تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$$

و به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

از حالت $a<b$ هم، می‌توان به‌سادگی، به‌حالت $a>b$ عبور کرد، همان‌طور که‌از فرض $g(x)\geqslant 0$ به‌فرض $g(x)\leqslant 0$ عبور کردیم، جا به‌جا کردن حدها، یا تعویض علامت $g(x)$، برابری‌ها را، به‌هم نمی‌زند.

اگر $f(x)$ پیوسته باشد، رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

که درآن، c در $[a, b]$ واقع است.

۳۰۵. انتگرال معین، به‌عنوان تابعی از حد بالایی. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a,b]$ (a می‌تواند کوچکتر یـا بزرگتر از b باشد)، انتگرال‌پذیر باشد، در آن‌صورت [۲۹۹، III]، این تابع، در بازهٔ $[a, x]$ هم، انتگرال‌پذیر است، که درآن، x مقدار دلخواهی‌از $[a, b]$ است. اگر در انتگرال معین، به‌جای b، متغیر x را قراردهیم، عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt^* \qquad (1)$$

که مسلماً تابعی از x است. این تابع، دارای ویژگی‌های زیر است:

۱۱°. اگر تابع $f(x)$، در $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشد، در آن‌صورت، $\Phi(x)$ تابعی پیوسته از x، در همان بازه، خواهد بود.

اثبات. نمو دلخواه $\Delta x = h$ را به x می‌دهیم (فقط به‌نحوی کـه $x+h$ از حدود

---

*) متغیر تابع زیر انتگرال را با t نشان داده‌ایم تا باحد بالایی x مخلوط نشود. روشن‌است که تغییر نام متغیر زیر انتگرال، اثری در مقدار انتگرال ندارد.

بازهٔ مورد نظر، تجاوز نکند)، برای تابع (۱)، مقدار جدیدی به‌دست می‌آید:

$$\Phi(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)dt=\int_a^x+\int_x^{x+h}$$

[۲° را ببینید]، به‌نحوی که

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$$

قضیهٔ مربوط به‌میانگین ۹° را، برای این تابع به‌کار می‌بریم:

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\mu h \qquad (۲)$$

که در آن، μ بین مرزهای m' و M' تابع $f(x)$، در بازهٔ $[x, x+h]$ واقع است و، در نتیجه، به‌طور بدیهی، بین کران‌های (ثابت) m و M در بازهٔ اصلی $[a, b]$ قرار می‌گیرد*.

حالا، اگر h را به‌سمت صفر میل دهیم، به‌روشنی، خواهیم داشت:

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)\to 0 \quad \text{یا} \quad \Phi(x+h)\to\Phi(x)$$

که پیوستگی تابع $\Phi(x)$ را ثابت می‌کند.

۱۲°. اگر تابع $f(t)$، در نقطهٔ $t=x$، پیوسته باشد، آن‌گاه، مشتق تابع $\Phi(x)$ در این نقطه، برابر $f(x)$ است.

$$\Phi'(x)=f(x)$$

اثبات. در واقع، از (۲) داریم:

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\mu \qquad (m'\leqslant\mu\leqslant M')$$

ولی، بنا به پیوستگی تابع $f(t)$ به‌ازای $t=x$، از روی $\varepsilon>0$ دلخواه، چنان $\delta>0$ پیدا می‌شود که وقتی $|h|<\delta$ باشد، برای همهٔ مقدارهای t در بازهٔ $[x, x+h]$

$$f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon$$

در چنین حالتی، نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$f(x)-\varepsilon\leqslant m'\leqslant\mu\leqslant M'\leqslant f(x)+\varepsilon$$

به‌طوری که

---

*) یادآوری می‌کنیم که تابع مورد انتگرال‌گیری، کران‌دار است [۲۹۵].

$$|\mu - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

حالا دیگر واضح است که

$$\Phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \mu = f(x)$$

به نتیجه‌ای رسیدیم، که مفهومی بی‌اندازه اساسی و عملی دارد: اگر تابع $f(x)$، در تمامی بازهٔ $[a, b]$، پیوسته باشد، در آن‌صورت، انتگرال‌پذیر خواهد بود [۲۹۸، I] و حکم قبل را، در مورد هر نقطهٔ دلخواه x از این بازه، می‌توان به‌کار برد؛ مشتق انتگرال (۱)، نسبت به‌حد بالای متغیر x، درهمه‌جا، برابرمقدار $f(x)$ ــ تابع زیرعلامت انتگرال به‌ازای این حد ــ است.

به‌زبان دیگر، برای تابع پیوستهٔ $f(x)$، همیشه تابع اولیه وجود دارد؛ نمونهٔ آن، عبارت است از انتگرال معین (۱)، با حد بالایی متغیر.

به‌این ترتیب، سرانجام، توانستیم گزاره‌ای راثابت کنیم که در **۲۶۴** هم، دربارهٔ آن صحبت کرده بودیم.

به‌خصوص، حالامی‌توانیم، تابع‌های EوF لژاندررا[۲۹۳]، به‌صورت انتگرال‌های معین، بنویسیم:

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}, \qquad E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\, d\theta$$

با توجه به‌آن‌چه ثابت شد، این‌ها، به‌ترتیب، تابع‌های اولیهٔ تابع‌های زیر هستند:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \qquad \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

و ضمناً، به‌ازای $\varphi = 0$ برابر صفر می‌شوند.

یادداشت. حکمی را کـه در این شماره ثابت کردیم، می‌توان به سادگی، در مورد انتگرال با حد پایینی هم به‌کار برد، زیرا (۱°)

$$\int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt$$

که مشتق آن، نسبت به x، به‌روشنی، برابر $f(x)$ ــ است (اگر x، نقطهٔ پیوستگی باشد).

۳۰۶. قضیهٔ دوم مربوط به‌مقدار میانگین. در پایان، قضیهٔ دیگری را می‌آوریم که به‌انتگرال حاصل‌ضرب دو تابع مربوط می‌شود:

$$I=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

این قضیه، به‌شکل‌های مختلفی قابل طرح است، از اثبات گزارهٔ زیر آغاز می‌کنیم.

۱۳°. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a,b]$ $(a<b)$، به طور یکنوا نزولی (ولو به‌مفهوم عام آن) و غیرمنفی، و $g(x)$ انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx \qquad (۳)$$

که درآن، ξ، نقطه‌ای از بازهٔ مفروض است.

بازهٔ $[a,b]$ را، به کمک نقطه‌های x_i $(i=0,1,\dots,n)$، به‌طور دلخواه، به بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم، انتگرال I را می‌توان، این‌طور، نشان داد:

$$I=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]g(x)\,dx=\sigma+\rho$$

اگر L را مرز بالایی تابع $|g(x)|$ و (طبق معمول)، ω_i را نوسان تابع $f(x)$، در بازهٔ iام $[x_i,x_{i+1}]$ به‌درازای Δx_i، نشان دهیم، روشن است که

$$|\rho|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)-f(x_i)|\cdot|g(x)|\,dx\leqslant L\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$$

از این‌جا، با توجه به‌انتگرال‌پذیری $f(x)$ [۲۹۸، III]، روشن است که وقتی $\lambda=\max\Delta x_i\to 0$، آن‌وقت $\sigma\to 0$، به‌نحوی که

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sigma$$

حالا، تابع زیررا بررسی می‌کنیم:

$$G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$$

و به‌کمک آن، مجموع σ را، این‌طور می‌نویسیم:

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[G(x_{i+1})-G(x_i)]$$

ویا بالاخره، با بازکردن کروشه و تغییر گروه‌بندی جمله‌ها،

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n-1}G(x_i)[f(x_{i-1})-f(x_i)]+G(b)f(x_{n-1})$$

تابع پیوستهٔ $G(x)$[۳۰۵، ۱۱°]، با تغییر x در بازهٔ $[a, b]$، هم کمترین مقدار m و هم بزرگترین مقدار M را دارد [۸۵]، زیرا همهٔ جمله‌های

$$f(x_{i-1})-f(x_i)(i=1, 2, \dots, n-1) \text{ و } f(x_{n-1})$$

بنا برشرط‌های تابع $f(x)$، نامنفی هستند، بنا براین، باعوض‌کردن مقدارهای G، به‌ترتیب، با m و M، دوعدد

$$mf(a) \text{ و } Mf(a)$$

را به‌دست می‌آوریم که مجموع σ، بین آن‌ها قرار دارد، روشن است که انتگرال I هم، به‌عنوان حد این مجموع، بین همین عددها واقع است ویا، به‌زبان دیگر

$$I=\mu f(a)$$

که در آن داریم: $m\leqslant\mu\leqslant M$، ولی، با توجه به‌پیوستگی تابع $G(x)$، مقدار ξ را در بازهٔ $[a, b]$ می‌توان چنان پیداکرد که داشته باشیم: $\mu=G(\xi)$[۸۲]. آن‌گاه

$$I=f(a)\cdot G(\xi)$$

که با رابطهٔ (۳) هم‌ارز است.

به‌همین‌ترتیب، اگرتابع $f(x)$ غیرمنفی، به‌طور یکنوا صعودی باشد، آن‌گاه‌رابطهٔ

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

برقرار است، که در آن $a\leqslant\xi\leqslant b$. این رابطه‌ها را، معمولاً، **رابطه‌های بونه** (O. Bonnet) می‌نامند.

۱۴°. اگرتنها، فرض یکنوائی تابع $f(x)$ را نگه‌داریم وغیرمنفی‌بودن آن را درنظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int_{(a\leqslant\xi\leqslant b)}^{\xi} g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx \qquad (۴)$$

فرض می‌کنیم، مثلا، تابع $f(x)$، نزولی یکنوا باشد؛ دراین‌صورت، روشن‌است که تفاضل $f(x)-f(b)\geqslant 0$. اگر درمورد این تابع، از رابطهٔ (۳) استفاده‌کنیم، بعد از تبدیل‌های ساده، (۴) به‌دست می‌آید.

قضیه‌ای‌که ثابت کردیم، به‌قضیهٔ دوم مقدار میانگین معروف است [با ۳۰۴، ۱۰° مقایسه کنید].

ملاحظهٔ زیر، به‌ما امکان می‌دهد که، تا حدی، به‌آن صورت کلی‌تری بدهیم. اگر مقدارهای $f(x)$ را در نقطه‌های a و b عوض کنیم و، به‌جای آن‌ها، عددهای A و B را، با شرط‌های زیر، درنظر بگیریم:

(اگر f نزولی باشد) $A\geqslant f(a+0)$ و $B\leqslant f(b-0)$

(اگر f صعودی باشد) $A\leqslant f(a+0)$ و $B\geqslant f(b-0)$

در آن صورت، نه‌تنها مقدار انتگرال I عوض نمی‌شود، بلکه یکنوائی تابع $f(x)$ هم حفظ می‌شود، به‌نحوی‌که، با توجه به (۴)، می‌توان حکم کرد:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=A\int_a^{\xi} g(x)\,dx+B\int_{\xi}^b g(x)\,dx \qquad (۵)$$

و به‌خصوص

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a+0)\int_a^{\xi} g(x)\,dx+f(b-0)\int_{\xi}^b g(x)\,dx \qquad (۵^*)$$

دراین‌جا هم، مثل قبل، ξ معرف عددی از بازهٔ $[a,b]$ است، ولی، به طور کلی، به‌عددهای A و B بستگی دارد.

§۳. محاسبه و تبدیل انتگرال‌های معین

۳۰۷. محاسبه به‌کمک مجموع‌های انتگرالی. چندمثال از محاسبهٔ انتگرال‌های معین به‌عنوان حد مجموع‌های انتگرالی و طبق تعریفی‌که برای آن کردیم، می‌آوریم. با توجه به‌این نکته‌که، انتگرال‌تابع پیوسته وجود دارد، می‌توانیم برای محاسبهٔ آن، هم تقسیم‌بندی بازه وهم نقطهٔ ξ را، با درنظر گرفتن بعضی ملاحظه‌ها، ساده‌تر انتخاب کنیم.

۱) $\int_a^b x^k\,dx$ (a و b، عددهای حقیقی دلخواه و k، عددی طبیعی است).

ابتدا، انتگرال $\int_0^a x^k dx$ ($a\neq 0$) را محاسبه می‌کنیم. بازهٔ $[0,a]$ را، به‌دو بخش برابر تقسیم می‌کنیم. و در هر بازهٔ جزئی، تابع x^k را به‌ازای انتهای سمت راست آن، اگر $a>0$، و به‌ازای انتهای سمت چپ آن، اگر $a<0$، محاسبه می‌کنیم. آن‌وقت، به‌مجموع انتگرالی زیر می‌رسیم:

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}a\right)^k\cdot\frac{a}{n}=a^{k+1}\cdot\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

واگر مثال ۱۴) شمارهٔ ۳۳ را درنظر بگیریم:

$$\int_0^a a^k\,dx=\lim_{x\to\infty}\sigma_n=\frac{a_{k+1}}{k+1}$$

وازاین‌جا، بدون دشواری، رابطهٔ کلی هم به‌دست می‌آید:

$$\int_a^b x^k\,dx=\int_0^b-\int_0^a=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

۲) $\int_a^b x^\mu dx$ ($0<a<b$ و μ، عددی حقیقی ودلخواه).

این بار، بازهٔ $[a, b]$ را به‌بخش‌های نابرابر تقسیم می‌کنیم وبین a و b، درست $(n-1)$ بازهٔ واسطه قرار می‌دهیم. به‌بیان دیگر، با فرض

$$q=q_n=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

عددهای

$$a, aq, \ldots, aq^i, \ldots, aq^n=b$$

را درنظرمی‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که، به‌ازای $n\to\infty$، نسبت $q=q_n\to 1$، وهمهٔ تفاضل‌های $aq^{i+1}-aq^i$، که کمتر از مقدار $b(q-1)$ هستند، به‌سمت صفرمیل می‌کنند.

با محاسبهٔ تابع برای انتهاهای سمت‌چپ، داریم:

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n-1}(aq^i)^\mu(aq^{i+1}-aq^i)=a^{\mu+1}(q-1)\sum_{i=1}^{n-1}(q^{\mu+1})^i$$

با فرض $\mu\neq-1$، به‌دست می‌آید:

$$\sigma_n=a^{\mu+1}(q-1)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1}-1}{q^{\mu+1}-1}=(b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1}$$

وبا استفاده ازحد معلوم [مثال ۵)، (c)، ۷۷]، نتیجه می‌شود:

$$\int_a^b x^\mu\,dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = (b^{\mu+1}-a^{\mu+1})\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{\mu+1}-1} = \frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{\mu+1}$$

درحالت $\mu = -1$ هم داریم:

$$\sigma_n = n(q_n - 1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right)$$

و براساس نتیجهٔ معلوم دیگری [همان شماره، (b)]

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \ln b - \ln a$$

۳) $\int_a^b \sin x\,dx$. با تقسیم بازهٔ $[a, b]$ به n بخش برابر، فرض می‌کنیم $h = \frac{b-a}{n}$. تابع $\sin x$ را، درحالت $a<b$، برای انتهاهای سمت راست و، درحالت $a>b$، برای انتهاهای سمت‌چپ، محاسبه می‌کنیم. آن‌وقت

$$\sigma_n = h\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih)$$

مجموع سمت راست را ساده می‌کنیم. با ضرب و تقسیم آن بر $2\sin\frac{h}{2}$ و، سپس، تبدیل همهٔ جمله‌ها، به‌صورت تفاضل کسینوس‌ها، به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih) = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n} 2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\left(a+\overline{i-\tfrac{1}{2}}h\right) - \cos\left(a+\overline{i+\tfrac{1}{2}}h\right)\right] =$$

$$= \frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right) - \cos\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}} \qquad (1)$$

به‌این ترتیب

$$\sigma_n=\frac{\frac{h}{۲}}{\sin\frac{h}{۲}}\left[\cos\left(a+\frac{۱}{۲}h\right)-\cos\left(b+\frac{۱}{۲}h\right)\right]$$

چون $h\to ۰$ به‌ازای $n\to\infty$، بنابراین

$$\int_a^b \sin x\,dx=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{h}{۲}}{\sin\frac{h}{۲}}\left[\cos\left(a+\frac{۱}{۲}h\right)-\cos\left(b+\frac{۱}{۲}h\right)\right]=\cos a-\cos b$$

به‌همین ترتیب و با آغاز از رابطهٔ مقدماتی

$$\sum_{i=۱}^{n}\cos(a+ih)=\frac{\sin\left(a+\overline{n+\frac{۱}{۲}}h\right)-\sin\left(a+\frac{۱}{۲}h\right)^{*}}{۲\sin\frac{h}{۲}} \qquad (۲)$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$\int_a^b \cos x\,dx=\sin b-\sin a$$

۴) از مثال‌های عادی می‌گذریم و به انتگرال زیر می‌پردازیم:

$$\int_۰^{\pi}\ln(۱-۲r\cos x+r^{۲})\,dx$$

که با نام پواسون (S. D. Poisson) بستگی دارد. چون

$$(۱-|r|)^{۲}\leqslant ۱-۲r\cos x+r^{۲}$$

بنابراین، با فرض $|r|\neq ۱$، تابع زیر انتگرال پیوسته است و انتگرال وجود دارد.
با تقسیم بازهٔ $[۰\,،\pi]$، به n بخش برابر، داریم:

$$\sigma_n=\frac{\pi}{n}\sum_{k=۱}^{n}\ln\left(۱-۲r\cos k\frac{\pi}{n}+r^{۲}\right)=$$

---

*) که از (۱)، با عوض‌کردن a به $a+\frac{\pi}{۲}$ به‌دست می‌آید.

$$=\frac{\pi}{n}\ln\left[(1+r)^{2}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2r\cos k+r^{2}\right)\right]$$

که در آن، $\prod$ علامت حاصل‌ضرب است. از طرف دیگر، تجزیهٔ زیر را، از جبر می‌دانیم*:

$$z^{2n}-1=(z^{2}-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2z\cos k\frac{\pi}{n}+z^{2}\right)$$

با استفاده از این اتحاد، به‌ازای $z=r$، σ_n را، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\sigma_n=\frac{\pi}{n}\ln\left\{\frac{r+1}{r-1}(r^{2n}-1)\right\}$$

حالا فرض می‌کنیم $|r|<1$، آن‌وقت $r^{2n}\to 0$ و

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^{2})dx=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0$$

اگر هم $|r|>1$، آن‌گاه، با نوشتن σ_n به‌صورت

$$\sigma_n=\frac{\pi}{n}\ln\left\{\frac{r+1}{r-1}\cdot\frac{r^{2n}-1}{r^{2n}}\right\}+2\pi\ln|r|$$

داریم:

---

*) با در نظر گرفتن ریشه‌های $2n$ام واحد، $1-z^{2n}$ را می‌توان، به‌صورت عامل‌های خطی تجزیه کرد،

$$z^{2n}-1=\prod_{k=-n}^{n-1}\left(z-\cos k\frac{\pi}{n}+i\sin k\frac{\pi}{n}\right)$$

که در آن، i واحد موهومی است.
اگر عامل‌های $z=\pm 1$ (نظیر $k=-n$ و $k=0$) را جدا کنیم و عامل‌های مزدوج را، با هم بنویسیم، در آن‌صورت، نتیجه می‌گیریم که $1-z^{2n}$ برابر است با

$$(z^{2}-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-\cos k\frac{\pi}{n}-i\sin k\frac{\pi}{n}\right)\left(z-\cos k\frac{\pi}{n}+i\sin k\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=(z^{2}-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-2z\cos k\frac{\pi}{n}+z^{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)dx = 2\pi \ln|r|$$

خواننده ملاحظه می‌کند که محاسبهٔ انتگرال معین، به‌طور مستقیم و به‌عنوان حد مجموع، حتی در حالت‌های ساده هم، مستلزم تلاش فوق‌العاده‌ای است و، به‌همین مناسبت، به‌ندرت از آن استفاده می‌شود. راه‌های عملی‌تر را در شمارهٔ بعد، خواهیم دید.

۳۰۸. رابطهٔ اصلی محاسبهٔ انتگرالی. در **۳۰۵** دیدیم که برای تابع $f(x)$، که در بازهٔ $[a, b]$ معین است، انتگرال

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

همان تابع اولیه است. اگر $F(x)$، یك تابع اولیهٔ غیرمشخص برای تابع $f(x)$ باشد (و مثلاً با روش‌های بندهای ۱ تا ۴ فصل قبل به‌دست آمده باشد)، آن‌گاه [**۲۶۳**]

$$\Phi(x) = F(x)+C$$

مقدار C را، می‌توان به‌سادگی و با قرار دادن $x=a$، پیدا کرد، زیرا $\Phi(a)=0$ خواهیم داشت:

$$0 = \Phi(a) = F(a)+C \Rightarrow C = -F(a)$$

و بالاخره

$$\Phi(x) = F(x)-F(a)$$

و در حالت خاص $a=b$، نتیجه می‌شود:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad (A)$$

و این، رابطهٔ اصلی محاسبهٔ انتگرال است*.

به‌این‌ترتیب، مقدار انتگرال معین، با تفاضل دو مقدار یکی از تابع اولیه‌ها، به‌ازای $x=b$ و به‌ازای $x=a$، بیان می‌شود.

---

*) این رابطه را، رابطهٔ نیوتون ـ لایب‌نیتس گویند. خواننده می‌بیند که این بحث، کاملاً شبیه بحثی است که در **۲۶۴**، برای محاسبهٔ تابع $P(x)$ و مساحت P انجام دادیم. خود رابطهٔ (A) را، می‌شد از مقایسهٔ نتیجه‌های شمارهٔ **۲۶۴** و **۲۹۴** به‌دست آورد.

اگر قضیهٔ مربوط به‌میانگین [۳۰۴، ۹°] را برای انتگرال به‌کار بریم، و به‌یاد بیاوریم که $f(x)=F'(x)$، آن‌گاه، نتیجه می‌شود:

$$F(b)-F(a)=f(c)\cdot(b-a)=F'(c)\cdot(b-a) \quad (a\leqslant c\leqslant b)$$

خواننده، دراین رابطه همان رابطهٔ لاگرانژ [۱۱۲]، برای تابع $F(x)$، را می‌بیند. به‌این‌ترتیب، به‌کمك رابطهٔ اصلی (A)، بستگی بین قضیه‌های میانگین، در محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، پیدا می‌شود.

رابطهٔ (A)، وسیلهٔ ساده و ثمربخشی، برای محاسبهٔ انتگرال معین از روی انتگرال نامعین $f(x)$، به‌دست می‌دهد. می‌دانیم که برای طبقه‌هایی از تابع‌ها، می‌توانیم، تابع اولیه را، به‌صورت متناهی و برحسب تابع‌های مقدماتی، بیان کنیم. در این حالت‌ها، انتگرال معین، مستقیماً و از روی این رابطهٔ اصلی، محاسبه می‌شود. فقط یادآوری می‌کنیم که تفاضل سمت‌راست را، معمولاً، بانماد $f(x)\Big|_a^b$، نشان‌می‌دهند ورابطه‌را، به‌این‌صورت می‌نویسند:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b \qquad (A^*)$$

مثلاً، می‌توانیم بلافاصله، به‌دست آوریم:

۱) $$\int_a^b x^\mu dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Big|_a^b=\frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu\neq -1)$$

۲) $$\int_a^b \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_a^b=\ln b-\ln a \quad (a>0,\ b>0)$$

۳) $$\int_a^b \sin x dx=-\cos x\Big|_a^b=\cos a-\cos b,$$

$$\int_a^b \cos x dx=\sin x\Big|_a^b=\sin b-\sin a$$

نتیجه‌هایی که، در شمارهٔ قبل، نه‌چندان ساده، به‌دست آمده بودند [مثال‌های ۱)، ۲) و ۳) را ببینید]*.

---

*) مثال ۴) را، نمی‌توان به همین سادگی به‌نتیجه رسانید، زیرا انتگرال نامعین آن، قابل بیان به‌صورت متناهی نیست.

۳۰۹. مثال‌ها. مثال‌های دیگری، برای استفاده از رابطهٔ (A) می‌آوریم.

۴) (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (m \neq n)$$

(b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

[۲۶۷، ۱۷ و ۱۸) را ببینید]. و به‌همین ترتیب

(c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$$

(d) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ +\pi & (n = m) \end{cases}$$

۵) مقدار هر یك از این انتگرال‌ها را پیدا کنید:

(a) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,dx$$

(b) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$$

راهنمایی. (a). ازرابطهٔ (۲)، باگذاشتن $a = 0$، $h = 2x$ و $n = m - 1$، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \cos 2ix = \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}$$

که دیگر می‌توان از جمله‌های جداگانه، به‌کمك رابطهٔ (A)، انتگرال گیری کرد:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(b) از رابطهٔ (۱)، با فرض $a=-x$ و $h=۲x$، داریم:

$$\sum_{m=۱}^{n} sin(۲m-۱)x=\frac{۱-cos ۲nx}{۲sinx}=\frac{sin^{۲}nx}{sinx}$$

از آن‌جا، اگر از نتیجهٔ قبلی استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{sinnx}{sinx}\right)^{۲}dx=n\frac{\pi}{۲}$$

۶) با فرض $۰<\alpha<۱$، $۰<\beta<۱$، این انتگرال را محاسبه کنید:

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{۱-۲\alpha x+\alpha^{۲}}\cdot\sqrt{۱-۲\beta x+\beta^{۲}}}$$

اگر در رابطهٔ [۲۸۳، (۶°)]

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^{۲}+bx+c}}=\frac{۱}{\sqrt{a}}\ln\left|ax+\frac{b}{۲}+\sqrt{a}\sqrt{ax^{۲}+bx+c}\right|+C$$

این اتحاد را برقرار کنیم:

$$ax^{۲}+bx+c=(۱-۲\alpha x+\alpha^{۲})(۱-۲\beta x+\beta^{۲})$$

آن گاه، با مشتق گیری، داریم:

$$ax+\frac{b}{۲}=-\alpha(۱-۲\beta x+\beta^{۲})-\beta(۱-۲\alpha x+\alpha^{۲})$$

ازاین‌جا، به‌سادگی نتیجه می‌شود که، به ازای $x=۱$، عبارت جلو علامت لگاریتم، برابر مقدار

$$-\alpha(۱-\beta)^{۲}-\beta(۱-\alpha)^{۲}+۲\sqrt{\alpha\beta}(۱-\alpha)(۱-\beta)=$$
$$=-[\sqrt{\alpha}(۱-\beta)-\sqrt{\beta}(۱-\alpha)]^{۲}=-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^{۲}(۱+\sqrt{\alpha\beta})^{۲}$$

و به‌ازای $x=-۱$، برابرمقدار

$$-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^{۲}(۱-\sqrt{\alpha\beta})^{۲}$$

می‌شود. به‌این‌ترتیب، سرانجام، برای انتگرال مطلوب، عبارت سادهٔ

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}$$

به‌دست می‌آید، که تنها به‌حاصل‌ضرب $\alpha\beta$، بستگی دارد*.

یادآوری می‌کنیم که، برای به‌دست‌آوردن رابطهٔ اصلی، عملاً، ضرورتی نداشت که تابع $F(x)$ را، در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$، تابع اولیهٔ $f(x)$ بگیریم. با تکیه برنتیجهٔ شمارهٔ ۱۳۱، کافی بود، آن را برای بازهٔ باز (a, b) در نظر بگیریم و، تنها، شرط کنیم که تابع $F(x)$ در دو انتهای بازه، پیوستگی خود را حفظ کند.

بنابراین، حق داشتیم، مثلاً، بنویسیم [۲۶۸]:

$$۷)\quad \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{\pi a^2}{2}$$

هرچند، به‌ازای $x=\pm a$، مسألهٔ مربوط به‌مشتق تابع اولیه‌ای که پیدا کردیم، بازهم به‌بررسی نیاز دارد.

برای محاسبهٔ انتگرال زیر، باکمی دشواری روبه‌رو می‌شویم:

$$۸)\quad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx\quad (0<r<1)$$

دلیل این دشواری آن است که، تابع اولیه‌ای را که در ۲۸۸، ۱۳) پیدا کرده‌ایم:

$$F(x)=2\arctg\left(\frac{1+r}{1-r}\tg\frac{x}{2}\right)$$

به‌ازای $x=\pm\pi$ دارای معنا نیست. لکن به‌روشنی، حدهای زیر وجود دارد:

$$\lim_{x\to\pi+0}F(x)=-\pi,\qquad \lim_{x\to\pi-0}F(x)=\pi$$

واگر، طبق معمول، $F(-\pi)$ و $F(\pi)$ را، برابر همین حدها، بگیریم، آن‌گاه، تابع $F(x)$، نه‌تنها معین، بلکه در دو انتهای بازه، پیوسته هم خواهد بود. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=F(\pi)-F(-\pi)=2\pi$$

---

*) ما، این نتیجه را به‌ازای $\alpha\neq\beta$ به‌دست آوردیم، ولی به‌سادگی می‌توان دید که، به‌ازای $\alpha=\beta$ هم، درست است.

۹) به‌طریق مشابهی، انتگرال زیرهم، محاسبه می‌شود:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\sin x\cos x + C\sin^2 x} \quad (AC-B^2>0)$$

قبلا [۲۸۸، ۱۰)]، عبارت تابع اولیه را به‌دست آوردیم:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{C\,tg\,x+B}{\sqrt{AC-B^2}}\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

از آن‌جا

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\cos x\sin x + C\sin^2 x} = F(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

ضمناً علامت‌های $0+\frac{\pi}{2}-$ و $0-\frac{\pi}{2}$ نشان‌می‌دهد که‌باید‌ازمقدارهای‌حدی‌استفاده‌کرد.

۱۰) اگر برای محاسبهٔ انتگرال

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$$

از تابع اولیهٔ زیر آغاز کنیم:

$$-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$$

به‌ازای هردو مقدار $x=0$ و $x=1$، مقدار ۰ برای انتگرال به‌دست می‌آید، که یک معماست (انتگرال تابع مثبت، نمی‌تواند، برابر مقدار صفر شود).

اشتباه ناشی ازآن است‌که، این عبارت، به‌ازای $x=\sqrt{2-\sqrt{3}}=x_0$، دچار یک جهش می‌شود. اگرانتگرال را، جداگانه، از ۰ تا x_0 و، سپس، از x_0 تا ۱، محاسبه‌کنیم، به‌نتیجهٔ درست زیرمی‌رسیم:

$$\int_0^1 = \Big|_0^{x_0-0} + \Big|_{x_0+0}^1 = \frac{\pi}{2}$$

۱۱) انتگرال‌های زیر، به‌سادگی، به‌کمک تابع اولیه، محاسبه می‌شوند:

$$\int_{۱}^{۲}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{۱}^{۲}=\ln ۲$$

$$\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{۱+x^{۲}}=\operatorname{arc\,tg} x\Big|_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۴}$$

اگر به‌یاد بیاوریم که، مجموع‌های انتگرالی، به‌سمت آن‌ها میل می‌کنند، آن‌گاه، می‌توان مثلاً، این رابطه‌های حدی را به‌دست آورد:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n}\right)=\ln ۲$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n^{۲}+۱}+\frac{۱}{n^{۲}+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n^{۲}}\right)\cdot n=\frac{\pi}{۴}$$

۳۱۰. نتیجه‌های دیگری از رابطهٔ اصلی. حالا، رابطهٔ اصلی (A) را، با فرض‌های کلی‌تری، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم، تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر، و تابع $F(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، پیوسته باشد. ضمناً، $F(x)$ دارای مشتق $f(x)$:

$$F'(x)=f(x) \qquad (۳)$$

در همهٔ بازهٔ (a, b)، و یا، در همه‌جا به‌جز تعداد محدودی از نقطه‌ها، باشد.

بازهٔ $[a, b]$ را، به‌طریقی دلخواه، به‌وسیلهٔ نقطه‌های زیر، به بخش‌ها، تقسیم می‌کنیم:

$$x_{۰}=a<x_{۱}<x_{۲}<\cdots<x_{i}<x_{i+۱}<\cdots<x_{n}=b$$

(تنها این نکته را مراقبت می‌کنیم که، اگر نقطه‌هایی وجود دارد که در آن‌جا، رابطهٔ (۳) برقرار نیست، نقطه‌های تقسیم ما، شامل آن‌ها باشد). معلوم است که خواهیم داشت:

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=۱}^{n-۱}[F(x_{i+۱})-F(x_{i})]$$

درمورد هرکدام از این تفاضل‌ها ــ که جلو علامت جمع قرار گرفته‌اند ــ دستور نموهای محدود را به‌کار می‌بریم: همهٔ شرط‌هایی که برای چنین استفاده‌ای لازم‌اند، وجود دارد. نتیجه می‌گیریم:

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=۰}^{n-۱}F'(\xi_{i})(x_{i+۱}-x_{i})$$

که در آن، ξ_i، مقدار معینی از x (هرچند، برای ما نامعلوم) بین x_i و $x_{i+۱}$ است. چون برای این مقدار داریم: $F'(\xi_i)=f(\xi_i)$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

دوسمت راست، مجموع انتگرالی σ را برای تابع $f(x)$ به‌دست آوردیم. فرض کرده بودیم که، برای مجموع σ، به‌ازای $\lambda \to 0$، حدمعینی، مستقل از انتخاب ξ_i، وجود دارد. بنابراین، درحالت خاص، مجموع ما هم (با انتخابی که برای عددها کردیم)، با حفظ مقدار ثابت، به‌سمت انتگرال میل می‌کند و، ازآن‌جا، نتیجه می‌شود:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

در شمارهٔ پیش، به‌کمك رابطهٔ اصلی، انتگرال معین را محاسبه کردیم ولی، این رابطه، درجهت دیگری هم، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. اگر دررابطهٔ اصلی، b را به x و $f(x)$ را به $F'(x)$ تبدیل کنیم، می‌توان آن را، به‌این صورت نوشت:

$$F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)\,dt$$

به‌این ترتیب، به‌کمك روند حدی (چون، انتگرال معین، یك‌حد است)، می‌توان ازروی مشتق مفروض $F'(x)$، تابع اولیهٔ $F(x)$ را «به‌دست آورد».

ضمناً، این مطلب، با توجه به این فرض است که، مشتق نه‌تنها کران‌دار، بلکه طبق تعریف ریمانی، انتگرال‌پذیر باشد (که البته، همیشه تحقق‌پذیر نیست).

۳۱۱. رابطه‌های تبدیل. دیدیم که رابطهٔ اصلی، با وجود شرط‌های مناسب، مقدار انتگرال معین را، بلافاصله به‌دست می‌دهد. ازطرف دیگر، به‌کمك همین رابطهٔ اصلی، می‌توان، ازرابطه‌های تبدیل گوناگونی که درنظریهٔ انتگرال‌های نامعین وجود داشت، برای تبدیل انتگرال‌های معین هم استفاده کرد، یعنی محاسبهٔ انتگرال معینی را، به‌انتگرال معین دیگری (که معمولا ساده‌تر است)، منجر کرد.

قبل ازهمه، به‌رابطهٔ انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء

$$\int udv=uv-\int vdu$$

وتعمیم آن [۲۷۰، (۳) و (۵)] و، همچنین، سایررابطه‌های تبدیل [۲۷۱، (۶)؛ ۲۸۰؛ ۲۸۷]، که برهمان اساس تنظیم شده‌اند، نظرداریم. شکل کلی آن‌ها، چنین است:

$$\int f(x)dx=\varphi(x)-\int g(x)\,dx \qquad (۴)$$

که اگر حوزهٔ کاربرد آن را در بازهٔ $[a, b]$ بگیریم، در انتگرال‌های معین، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,dx \qquad (۵)$$

ضمناً، تابع‌های f و g را، پیوسته به‌حساب می‌آوریم.

برای اثبات، انتگرال آخر رابطهٔ (۴) را، با $\Phi(x)$، نشان می‌دهیم. آن‌وقت

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\varphi(x) - \Phi(x)\Big]_a^b = \varphi(x)\Big|_a^b - \Phi(x)\Big|_a^b$$

وچون، درعین‌حال، داریم:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b$$

به‌همان رابطهٔ مورد نیاز، می‌رسیم.

درحالت خاص، رابطهٔ انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (۶)$$

ورابطهٔ تعمیم داده شده، چنین می‌شود:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \dots + (-1)^n u^{(n)}v]\Big|_a^b +$$

$$+ (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx \qquad (۷)$$

ضمناً، مثل سابق، تابع‌های u و v وهمهٔ مشتق‌های موردنیاز آن‌ها را، پیوسته می‌گیریم.

دستور (۵)، که رابطهٔ بین عددها را معین می‌کند، اساساً، ساده‌تر از دستور (۴) است که رابطه‌ای بین تابع‌هاست.

۳۱۲. مثال‌ها. ۱) این انتگرال‌ها را (به‌ازای عدد طبیعی m) محاسبه کنید:

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx,\quad J'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، داریم:

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1}x\,d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{m-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx$$

جملهٔ اول برابر صفر می‌شود. اگر به‌جای $\cos^2 x$ قرار دهیم: $\sin^2 x - 1$، داریم:

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m$$

و از آن‌جا، به‌این رابطهٔ کاهشی می‌رسیم:

$$J_m = \frac{m-1}{m}J_{m-2}$$

که، درنتیجه، J_m سرانجام به J_0 یا J_1 منجر می‌شود. به‌ازای $m = 2n$ داریم:

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

و در حالت $m = 2n+1$:

$$J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$$

به‌همین ترتیب، مقدار J'_m هم به‌دست می‌آید.

برای این که، رابطه‌ها را، ساده‌تر بنویسیم، از نماد $m!!$* استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (\text{برای } m \text{ زوج}) \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & (\text{برای } m \text{ فرد}) \end{cases} \qquad (۸)$$

---

*) یادآوری می‌کنیم که، منظور از $m!!$، حاصل‌ضرب عددهای طبیعی است که از m تجاوز نکنند و، ضمناً، فقط زوج یا فقط فرد باشند.

۲) رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

$$(a)\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} cos^{m}x\,cos(m+۲)x\,dx = ۰$$

$$(b)\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} cos^{m}x\,sin(m+۲)x\,dx = \frac{۱}{m+۱}$$

$$(c)\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} sin^{m}x\,cos(m+۲)x\,dx = \frac{sin\frac{m\pi}{۲}}{m+۱}$$

$$(d)\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} sin^{m}x\,sin(m+۲)\,x\,dx = \frac{cos\frac{m\pi}{۲}}{m+۱}$$

(که در آن‌ها، m عدد مثبت دلخواهی است).

انتگرال

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} {}^{m+۲}cos\,x\,cos(m+۲)x\,dx$$

را درنظر می‌گیریم و، درمورد آن، دوبار از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء استفاده‌می‌کنیم

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} cos^{m+۲}x\,cos(m+۲)\,x\,dx =$$

$$= \frac{۱}{m+۲}[cos^{m+۲}x\,sin(m+۲)x - cos^{m+۱}x\,sin\,x\,cos(m+۲)x]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{۲}} +$$

$$+ \frac{۱}{m+۲}\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} [-(m+۱)cos^{m}x\,sin^{۲}x + cos^{m+۲}x]\,cos(m+۲)x\,dx$$

جملهٔ اول سمت راست تساوی، برابر صفرمی‌شود. در زیرعلامت انتگرال، با عوض‌کردن $sin^{۲}x$ به $cos^{۲}x - ۱$، به‌برابری زیرمی‌رسیم:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^{m+2}x cos(m+2)x dx =$$

$$= -\frac{m+1}{m+2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^{m}x cos(m+2)x dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^{m+2}x cos(m+2)x dx$$

که از آن‌جا، (a) نتیجه می‌شود.

در مورد سایر برابری‌ها هم، می‌توان به‌طریق مشابهی، عمل کرد.

۳) اگر n، عددی طبیعی باشد. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$K_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^{n}x sinnx dx, \qquad L_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^{n}x cosnx dx$$

با انتگرال گیری جزء‌به‌جزء، خواهیم داشت:

$$K_n = \frac{1}{n} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^{n-1}x sinx cosnx dx$$

اگر به‌دو طرف تساوی، K_n را اضافه کنیم، بعداز ساده‌کردن عبارت زیر انتگرال سمت راست، به‌سادگی، نتیجه می‌شود:

$$2K_n = \frac{1}{n} + K_{n-1}$$

یا

$$K_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + K_{n-1}\right)$$

و از روی این رابطهٔ بازگشتی، به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$K_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right)$$

و به‌طرز مشابهی

$$L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

۴) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$H_{k,m}=\int_{0}^{1}x^{k}.\ln^{m}x\,dx$$

که در آن، $k>0$ و m عددی طبیعی است.

از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء استفاده می‌کنیم [با ۲۷۱، ۵) مقایسه کنید]:

$$\int_{0}^{1}x^{k}\ln^{m}x\,dx=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln^{m}x\Big|_{+0}^{1}-\frac{m}{k+1}\int_{0}^{1}x^{k}\ln^{m-1}x\,dx$$

که منجر به‌رابطهٔ بازگشتی زیر می‌شود:

$$H_{k,m}=-\frac{m}{k+1}H_{k,m-1}$$

و از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$H_{k,m}=(-1)^{m}\frac{m!}{(k+1)^{m+1}}$$

ویژگی این مثال در آن است که، هم تابع زیر انتگرال و هم مقداری که خارج از انتگرال قرار گرفته است، در نقطهٔ $x=0$، باید به‌عنوان مقدارهای حدی، به‌ازای $x\to+0$، در نظر گرفته شوند.

۵) اگر p و q عددهای طبیعی باشند، از روی رابطهٔ III شمارهٔ ۲۸۰ داریم:

$$\int(1-x)^{p}x^{q}dx=\frac{(1-x)^{p}x^{q+1}}{p+q+1}+\frac{p}{p+q+1}\int(1-x)^{p-1}x^{q}dx$$

که اگر از آن، برای انتگرال معین در بازهٔ ۰ تا ۱، استفاده کنیم، نتیجه می‌دهد:

$$\int_{0}^{1}(1-x)^{p}x^{q}dx=\frac{p}{p+q+1}\int_{0}^{1}(1-x)^{p-1}x^{q}dx$$

اگر این رابطه را، به‌طور متوالی، به‌کار بریم، حاصل می‌شود:

$$\int_{0}^{1}(1-x)^{p}x^{q}dx=\frac{p(p-1)\cdots1}{(p+q+1)(p+q)\cdots(q+2)}\int_{0}^{1}x^{q}dx$$

و بالاخره

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

۶) اگر در رابطه‌های IV شمارهٔ **۲۸۷**، به‌ازای عددهای طبیعی μ و ν، به‌انتگرال معین عبورکنیم، با استفاده از نتیجهٔ مثال ۱)، می‌توان رابطهٔ کلی زیر را به‌دست آورد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\nu x \sin^\mu x dx = \begin{cases} \dfrac{(\nu-1)!!(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{(برای } \mu \text{ و } \nu \text{ زوج)} \\ \dfrac{(\nu-1)!!(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} & \text{(برای همهٔ حالت‌های دیگر)} \end{cases}$$

۳۱۳. رابطهٔ تغییر متغیر در انتگرال‌های معین. همان رابطهٔ اصلی (A)، به‌ما مکان می‌دهد که از قاعدهٔ تغییر متغیر، برای انتگرال معین هم، استفاده کنیم.

فرض کنیم، بخواهیم انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را محاسبه کنیم، کـه در آن، $f(x)$، تابعی پیوسته در بازهٔ $[a, b]$ است. $x=\varphi(t)$ می‌گیریـم. فرض می‌کنیم $\varphi(t)$، بـا این شرط‌ها سازگار باشد:

۱) $\varphi(t)$، تابعی است معین و پیوسته، در یك بازهٔ $[\alpha, \beta]$، و وقتی در بازهٔ $[\alpha, \beta]$ تغییر می‌کند، $\varphi(t)$ از محدودهٔ $[a, b]$ تجاوز نمی‌کند*؛

۲) $\varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$؛

۳) در $[\alpha, \beta]$، مشتق پیوستهٔ $\varphi'(t)$ وجود دارد.

آن‌وقت، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (۹)$$

با توجه به‌فرض پیوستگی تابع‌های زیر انتگرال‌گیری، نه‌تنها این‌انتگرال‌های‌معین وجود دارند، بلکه انتگرال نامعین آن‌ها هم وجود دارد و، در هر دو حالت، می‌توان از رابطهٔ اصلی‌استفاده‌کرد. ولی، اگر $F(x)$ یکی ازتابع‌های اولیهٔ $f(x)dx$ باشد، آن‌گاه، معلوم است کـه تابع $\Phi(t)=F(\varphi(t))$، تابع اولیهٔ $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ می‌شود [با **۲۶۸**

*) ممکن است تابع $f(x)$ در بازهٔ $[A, B]$ کـه وسیع‌تر از بازهٔ $[a, b]$ است، معین و پیوسته باشد، آن‌وقت، کافی است خواسته شود تا مقدارهای $\varphi(t)$ از محدودهٔ بازهٔ $[A, B]$ تجاوز نکنند.

مقایسه کنید]. به‌این ترتیب، به‌طور هم‌زمان، داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

و

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(b) - F(a)$$

که از آن‌جا، درستی رابطهٔ (۹) ثابت می‌شود.

یادداشت. ویژگی مهمی از رابطهٔ (۹) را یادآوری کنیم. اگر برای محاسبهٔ انتگرال نامعین، به‌کمک تغییر متغیر، وقتی که تابع مطلوب را برحسب متغیر t به‌دست می‌آوریم، ناچار بودیم به‌متغیر قدیمی x برگردیم، در این‌جا اجباری به‌این‌کار نداریم. عددی که از انتگرال‌های معین (۹) به‌دست می‌آید، با عدد حاصل از دیگری، یکی است.

۳۱۴. مثال‌ها. ۱) انتگرال معین $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ را، با تبدیل $x = a\sin t$ محاسبه کنید. در این‌جا، نقش α و β به‌عهدهٔ ۰ و $\frac{\pi}{2}$ است. داریم:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

۲) به‌طور کلی، برای عدد طبیعی n، با همان تبدیل به‌دست می‌آید:

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

[(۸) را ببینید] و به‌همین ترتیب

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{2n-1}{2}} dx = a^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

(۳ $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx$.

تبدیل: $x=a\sec t$، محدوده‌های a و $2a$ ازمتغیر x را به ۰ و $\frac{\pi}{3}$ از متغیر t تبدیل می‌کند. داریم:

$$\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^2 t\,cost\,dt=\frac{1}{a^2}\,\frac{sin^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}$$

۴) انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

تبدیل $x=\pi-t$ (که درآن، t از π تا ۰ تغییر می‌کند) به‌برابری زیر منتهی می‌شود:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

یا

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

با انتقال انتگرال آخری (که درآن، می‌توان به‌جای t، دوباره x نوشت) به‌سمت چپ، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$$

با مثال ۱۱) در پایین مقایسه کنید، که درآن‌جا، همین مثال را تعمیم داده‌ایم.

۵) این انتگرال را محاسبه کنید: $J=\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

تغییرمتغیر $x=tg\varphi$ (که درآن، φ از ۰ تا $\frac{\pi}{4}$ تغییر می‌کند)، انتگرال مفروض‌را، به‌انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+tg\varphi)d\varphi$ می‌رساند. ولی

$$۱+tg\varphi=\frac{\sqrt{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\varphi\right)}{\cos\varphi}$$

به‌طوری که

$$J=\frac{\pi}{۸}\ln ۲+\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\varphi\right)-\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\ln\cos\varphi d\varphi$$

چون، هر دو انتگرال برابرند (مثلاً دومی با تبدیل $\varphi=\frac{\pi}{۴}-\psi$ به‌اولی منجر می‌شود؛ ضمناً ψ از $\frac{\pi}{۴}$ تا ۰ تغییر می‌کند)، سرانجام

$$J=\frac{\pi}{۸}\ln ۲$$

یادآوری می‌کنیم که انتگرال $\int_{۰}^{۱}\frac{\arctg x}{۱+x}dx$ هم، همان‌مقدار راداراد، که به‌کمك انتگرال جزء به‌جزء، به‌سادگی، محاسبه می‌شود.

۶) ثابت کنید

$$\int_{۰}^{۱}\frac{\arctg x}{x}dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{t}{\sin t}dt$$

راهنمائی. از تغییر متغیر $x=tg\frac{t}{۲}$ استفاده کنید.

۷) انتگرال‌های زیر را به‌یکدیگر تبدیل کنید:

$$\int_{۰}^{\pi}(x+\sqrt{x^{۲}-۱۰}\cos\varphi)^{n}d\varphi=\int_{۰}^{\pi}\frac{d\theta}{(x-\sqrt{x^{۲}-۱۰}\cos\theta)^{n+۱}}$$

$x>۱$ و n را عددی طبیعی در نظر بگیرید.

این برابری را، می‌توان از راه تغییر متغیر و از روی رابطهٔ زیر، به‌دست آورد:

$$(x+\sqrt{x^{۲}-۱۰}\cos\varphi)(x-\sqrt{x^{۲}-۱۰}\cos\theta)=۱$$

از آن‌جا

$$\cos\varphi=\frac{-\sqrt{x^2-1}+x\cos\theta}{x-\sqrt{x^2-1}\cdot\cos\theta}$$

ضمناً، عبارت سمت راست، ازلحاظ قدرمطلق، ازواحد تجاوز نمی‌کند، هر θ از بازهٔ $[0,\pi]$، به‌طور یك ارزشی، متناظر با یك φ ازهمان بازه است به‌ازای $\theta=0$ یا $\theta=\pi$، همچنین به‌ازای $\varphi=0$ یا $\varphi=\pi$، داریم:

$$\sin\varphi d\varphi=\frac{\sin\theta d\theta}{(x-\sqrt{x^2-1}\cdot\cos\theta)^2}$$

وچون

$$\sin\varphi=\frac{\sin\theta}{x-\sqrt{x^2-1}\cdot\cos\theta}$$

پس

$$d\varphi=\frac{d\theta}{x-\sqrt{x^2-1}\cdot\cos\theta}$$

به‌طوری‌که سرانجام

$$(x+\sqrt{x^2-1}\cdot\cos\varphi)^n\,d\varphi=\frac{d\theta}{(x-\sqrt{x^2-1}\cdot\cos\theta)^{n+1}}$$

وازآن‌جا، تساوی مطلوب به‌دست می‌آید.

[یادآوری می‌کنیم که، هردوانتگرال (باتقریب ضریب π) معرف nامین‌چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$ هستند، ۱۱۸، ۶)].

۸) برای تابع دلخواه $f(x)$ که، در بازهٔ $[0,a]$ $(a>0)$، پیوسته است، همواره داریم:

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-t)\,dt$$

(تبدیل $x=a-t$، $a\geqslant t\geqslant 0$). درحالت خاص، از آن‌جاکه $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$، برای هرتابع دلخواه و پیوستهٔ $F(u)$ خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} F(\sin x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} F(\cos x)\,dx$$

۹) تابع $f(x)$ را، در بازهٔ متقارن $[-a, a]$ $(a>0)$، پیوسته فرض می‌کنیم. آن‌وقت، درحالت تابع‌های زوج داریم [۹۹: ۲۵)]:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

و درحالت تابع‌های فرد:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

درهردوحالت، $\int_{-a}^{a}$ به‌صورت مجموع انتگرال‌های $\int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a}$ درمی‌آیدودرمورد انتگرال اول، تبدیل $x = -t$ را به‌کار می‌بریم.

۱۰) تابع پیوسته ومتناوب $f(x)$ را، بادورهٔ تناوب ω، درنظر می‌گیریم، به‌طوری که به‌ازای هرمقدار دلخواه x داشته باشیم: $f(x+\omega) = f(x)$ درچنین صورتی، مقدار انتگرال‌های معین این تابع، در هر بازهٔ دلخواهی که به درازی ω باشد، به‌انتخاب بازه، بستگی نخواهد داشت:

$$\int_{a}^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_{0}^{\omega} f(x)\,dx$$

برای اثبات، انتگرال سمت‌چپ را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\int_{a}^{a+\omega} = \int_{a}^{0} + \int_{0}^{\omega} + \int_{\omega}^{a+\omega}$$

اگر از تبدیل $x = t+\omega$ استفاده کنیم، متوجه می‌شویم که انتگرال‌های اول و سوم سمت راست تساوی، تنها درعلامت، با یکدیگر متفاوت‌اند.

۱۱) ثابت کنید که

$$\int_{0}^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

که در آن، $f(x)$، تابع دلخواه پیوسته‌ای در بازهٔ $[۱ ،۰]$ است.

راهنمائی. از تبدیل $x=\pi-t$ استفاده کنید.

۱۲) ثابت کنید که

$$\int_{۰}^{۲\pi}\varphi(a\cos\theta+b\sin\theta)d\theta=۲\int_{۰}^{\pi}\varphi(\sqrt{a^۲+b^۲}\cos\lambda)d\lambda$$

که در آن، $\varphi(u)$، تابعی دلخواه و پیوسته، برای $|u|\leqslant\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.

زاویهٔ α را، با این شرطها، درنظر می‌گیریم:

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

داریم:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^۲+b^۲}.\cos(\theta-\alpha)$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\int_{۰}^{۲\pi}\varphi(a\cos\theta+b\sin\theta)d\theta=\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi}\varphi(\sqrt{a^۲+b^۲}.\cos(\theta-\alpha))\,d\theta$$

ویا، اگرفرض کنیم $\lambda=\alpha-\theta$، و از ۹) استفاده کنیم:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\sqrt{a^۲+b^۲}.\cos\lambda)d\lambda=۲\int_{۰}^{\pi}\varphi(\sqrt{a^۲+b^۲}.\cos\lambda)d\lambda$$

۱۳) ثابت کنید که

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}g(\sin۲u)\cos u du=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}g(\cos^۲v)\cos v dv$$

که در آن، $g(z)$، تابع دلخواه پیوسته‌ای از z، در بازهٔ $[۱ ،۰]$ است.

انتگرال اول را به‌صورت مجموع انتگرال‌های $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}+\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}$ می‌نویسیم؛

اگر تبدیل $u=\frac{\pi}{۲}-u'$ را انجام دهیم، انتگرال دوم سمت راست هم، در بازهٔ $\left[۰,\frac{\pi}{۴}\right]$

قرار می‌گیرد و نتیجه می‌شود:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} g(\sin 2u).(\cos u+\sin u)du$$

حالا، با توجه به‌رابطهٔ زیر، تغییر متغیر می‌دهیم:

$$\sin 2u=\cos^2 v$$

به‌روشنی معلوم می‌شود که، صعود u از ۰ تا $\frac{\pi}{4}$، نظیر نزول v از $\frac{\pi}{2}$ تا ۰ است. دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\cos 2u\,du=-\sin v\cos v\,dv$$

که اگر در نظر بگیریم:

$$\cos 2u=\sqrt{1-\sin^2 2u}=\sqrt{1-\cos^4 v}=\sin v\sqrt{1+\cos^2 v}$$

و

$$1+\cos^2 v=1+2\sin u\cos u=(\sin u+\cos u)^2$$

بالاخره

$$(\sin u+\cos u)du=-\cos v\,dv$$

دیگر، برای به‌دست آوردن نتیجهٔ موردنظر، اشکالی باقی نمی‌ماند.

۱۴) در خاتمه، به‌انتگرال پواسون برمی‌گردیم:

$$I(r)=\int_{0}^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx$$

[با ۳۰۷، ۴) مقایسه کنید]. می‌دانیم که، به‌ازای $|r|\neq 1$، تابع زیرعلامت انتگرال، پیوسته است و انتگرال وجود دارد. دوباره این انتگرال را محاسبه می‌کنیم و، این‌بار، با روش ظریفی که در آن، نقش اساسی به‌عهدهٔ تغییر متغیر است.

قبلاً، توجه می‌کنیم که از برابری معلوم

$$(1-|r|)^2\leqslant 1-2r\cos x+r^2\leqslant(1+|r|)^2$$

با لگاریتم گرفتن و، سپس، انتگرال‌گیری از ۰ تا π (به‌ازای $|r|<1$)، نتیجه‌می‌گیریم:

$$۲\pi \ln(۱-|r|) \leqslant I(r) \leqslant ۲\pi \ln(۱+|r|)$$

از این‌جا روشن است که اگر r به‌سمت صفر میل کند، $I(r)$ هم به‌سمت صفر میل می‌کند.

حالا، انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I(-r)=\int_{۰}^{\pi} \ln(۱+۲r\cos x+r^{۲})dx$$

اگر، در این‌انتگرال، $x=\pi-t$ بگذاریم؛ ضمناً، t از π تا ۰ تغییر کند، معلوم‌می‌شود که

$$I(-r)=\int_{\pi}^{۰} \ln(۱+۲r\cos(\pi-t)+r^{۲})d(\pi-t)=$$

$$=\int_{۰}^{\pi} \ln(۱-۲r\cos t+r^{۲})dt=I(r)$$

در چنین حالتی

$$۲I(r)=I(r)+I(-r)=$$

$$=\int_{۰}^{\pi} \ln(۱-۲r\cos x+r^{۲})(۱+۲r\cos x+r^{۲})dx$$

یا

$$۲I(r)=\int_{۰}^{\pi} \ln(۱-۲r^{۲}\cos ۲x+r^{۴})dx$$

با فرض $x=\frac{t}{۲}$ (که در آن‌جا، t از ۰ تا ۲π تغییر می‌کند)، نتیجه می‌شود:

$$۲I(r)=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi} \ln(۱-۲r^{۲}\cos t+r^{۴})dt=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\pi}+\frac{۱}{۲}\int_{\pi}^{۲\pi}$$

از این دو انتگرال، می‌توان آخری را با تبدیل $t=۲\pi-u$ (که در آن، u از π تا ۰ تغییر می‌کند)، به‌اولی‌منجر کرد، به‌طوری‌که داشته باشیم:

$$۲I(r)=I(r^{۲})$$

از آن‌جا

$$I(r)=\frac{1}{2}I(r^2)$$

اگر در این‌جا، r را به r^2 وغیره تبدیل کنیم، به‌سادگی، به‌رابطهٔ کلی زیر می‌رسیم:

$$I(r)=\frac{1}{2^n}I(r^{2^n}) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

حالا فرض می‌کنیم $|r|<1$، به‌طوری‌که به‌ازای $n\to\infty$ داشته باشیم: $r^{2^n}\to 0$. چون (بنابر یادداشت قبلی) در این‌جا، $I(r^{2^n})\to 0$، پس، بـه طور اتحادی، باید داشته باشیم:

$$I(r)=0 \quad (\text{به‌ازای } |r|<1)$$

حالا دیگر، به‌سادگی، می‌توان این انتگرال را، به‌ازای $|r|>1$ هم محاسبه کرد. در واقع

$$1-2r\cos x+r^2=r^2\left(1-2\cdot\frac{1}{r}\cos x+\frac{1}{r^2}\right)$$

و

$$\ln(1-2r\cos x+r^2)=2\ln|r|+\ln\left(1-2\frac{1}{r}\cos x+\frac{1}{r^2}\right)$$

به‌طوری‌که در انتگرال‌گیری از 0 تا π خواهیم داشت:

$$I(r)=2\pi\ln|r|+I\left(\frac{1}{r}\right)$$

ولی، بنابر حالت اول، $I\left(\frac{1}{r}\right)=0$. در نتیجه، به‌ازای $|r|>1$، داریم:

$$I(r)=2\pi\ln|r|$$

و این، همان نتیجه‌ای است که در ۳۰۷ هم به‌دست آوردیم.

۳۱۵. رابطهٔ گوس. تبدیل لاندن. به‌عنوان مثال دیگری از تغییر متغیر، بـه رابطهٔ معروف گوس می‌پردازیم که برای تبدیل انتگرال زیر، به‌کار می‌رود:

$$G=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}} \qquad (a>b>0)$$

فرض می کنیم:

$$\sin\varphi=\frac{۲a\sin\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^{۲}\theta}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که اگر θ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر کند، φ هم درهمان محدوده تغییر می‌کند. دیفرانسیل می گیریم:

$$\cos\varphi d\varphi=۲a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^{۲}\theta}{[(a+b)+(a-b)\sin^{۲}\theta]^{۲}}\cos\theta d\theta$$

ولی

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{(a+b)^{۲}-(a-b)^{۲}\sin^{۲}\theta}}{(a+b)+(a-b)\sin^{۲}\theta}\cos\theta$$

به‌طوری که

$$d\varphi=۲a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^{۲}\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^{۲}\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^{۲}-(a-b)^{۲}\sin^{۲}\theta}}$$

از طرف دیگر

$$\sqrt{a^{۲}\cos^{۲}\varphi+b^{۲}\sin^{۲}\varphi}=a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^{۲}\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^{۲}\theta}$$

و بالاخره

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^{۲}\cos^{۲}\varphi+b^{۲}\sin^{۲}\varphi}}=\frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}\cos^{۲}\theta+ab\sin^{۲}\theta}}$$

اگر فرض کنیم $a_{۱}=\frac{a+b}{۲}$ و $b_{۱}=\sqrt{ab}$، خواهیم داشت:

$$G=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^{۲}\cos^{۲}\varphi+b^{۲}\sin^{۲}\varphi}}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{d\theta}{\sqrt{a_{۱}^{۲}\cos^{۲}\theta+b_{۱}^{۲}\sin^{۲}\theta}}$$

و این، رابطهٔ گوس است.

اگر این رابطه را، پشت سرهم به‌کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$G=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2\cos^2\varphi+b_n^2\sin^2\varphi}},\ (n=1,2,\ldots)$$

که درآن، a_n و b_n از رابطه‌های بازگشتی زیر، تعیین می‌شوند:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

می‌دانیم [۳۵، ۴]، که این واریانت‌ها، به سمت حد مشترك $\mu=\mu(a,b)$ میل می‌کنند، که ما آن را «واسطهٔ حسابی ـ هندسی» عددهای a و b نام دادیم. اگر در نامساوی‌های

$$\frac{\pi}{2a_n}<G<\frac{\pi}{2b_n}$$

که به‌سادگی به‌دست می‌آیند؛ به‌سمت حد عبور کنیم، به‌دست می‌آید:

$$G=\frac{\pi}{2\mu(a,b)}\Rightarrow\mu(a,b)=\frac{\pi}{2G}$$

به‌این ترتیب، هرکدام ازعددهای G و μ، برحسب‌دیگری به‌طورساده قابل بیان‌اند. فرض کنیم‌که بخواهیم انتگرال زیر را محاسبه‌کنیم:

$$G=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$$

در این‌جا $a=\sqrt{2}$ و $b=1$؛ واریانت‌های a_n و b_n به سرعت به‌سمت μ میل می‌کنند: a_4 و b_4، هر دو به‌تقریب برابر با عدد ۱/۱۹۸۱۴۰ می‌شوند و، می‌توان، μ را برابر با همین عدد گرفت. آن‌وقت، به‌طور تقریبی، نتیجه می‌شود:

$$G=\frac{\pi}{2\mu}=1/3110288$$

برعکس، انتگرال G، به‌انتگرال بیضوی کامل* نوع اول، تبدیل می‌شود:

---

*) انتگرال‌های $F(k,\varphi)$ و $E(k,\varphi)$ لژاندر [۲۹۳، ۳۰۵]، به‌ازای $\varphi=\frac{\pi}{2}$، کامل نامیده می‌شوند. در این حالت، معمولاً ضمن نوشتن، از آوند دوم چشم می‌پوشند و می‌نویسند: $\mathbf{K}(k)$ و $\mathbf{E}(k)$. برای انتگرال‌های کامل، جدول‌های خاصی وجود دارد.

$$G=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}=\frac{1}{a}\mathbf{K}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right)$$

و به‌سادگی، می‌تواند از روی جدول‌ها محاسبه شود. ازاین‌جا، μ به‌دست می‌آید.

حالا، انتگرال کامل بیضوی نوع اول را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{K}(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

این انتگرال، به‌ازای مقدار دلخواه مدول k، از G به‌ازای

$$a=1,\ b=\sqrt{1-k^2}=k'$$

به‌دست می‌آید. اگر بخواهیم از رابطهٔ گوس استفاده کنیم، قبل از همه، محاسبه می‌کنیم:

$$a_1=\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}=\frac{1+k'}{2},\quad b_1=\sqrt{k'}$$

$$k_1=\frac{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}{a_1}=\frac{1-k'}{1+k'}\quad \frac{1}{a_1}=1+k_1$$

به‌نحوی که

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=(1+k_1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\theta}}$$

یا

$$\mathbf{K}(k)=(1+k_1)\mathbf{K}(k_1)$$

این رابطه، که با رابطهٔ گوس هم‌ارز است، عملاً پیش از گوس وجود داشت و حالت خاصی از به‌اصطلاح تبدیل لاندن (Landen) را نشان می‌دهد.

اگر از این رابطه، پشت سرهم استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{K}(k)=(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)\cdot\mathbf{K}(k_n)$$

که درآن، واریانت k_n را می‌توان، به‌شیوهٔ استقرائی، به‌دست آورد:

$$k_n=\frac{1-\sqrt{1+k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}}$$

به‌طوری‌که شرط‌های

$$0<k_n<1,\quad k_n<k_{n-1}^2$$

موجب می‌شوند که، به ازای $n\to\infty$، مقدار k_n به سرعت به سمت صفر میل کند. در عین حال

$$0<\mathbf{K}(k_n)-\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}-\frac{\pi}{2}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}d\varphi<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{\sqrt{1-k_n^2}}$$

از آن‌جا

$$\mathbf{K}(k_n)\to\frac{\pi}{2}\quad(n\to\infty\text{ به‌ازای})$$

و سرانجام

$$\mathbf{K}(k)=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)\qquad(10)$$

بر همین اساس، روش تقریبی محاسبهٔ انتگرال $\mathbf{K}(k)$ بنیان گرفته است، که برای n به‌قدر کافی بزرگ، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{K}(k)\doteq\frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)$$

۳۱۶. نتیجهٔ دیگری از رابطهٔ تغییر متغیر. حالا نتیجهٔ دیگری از رابطهٔ (۹) را می‌آوریم.

ابتدا، فرض پیوستگی تابع $f(x)$ را کنار می‌گذاریم (که خود، بسیار مهم‌است) و، تنها، فرض می‌کنیم که تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر باشد. درعوض، برای تابع $\varphi(t)$ فرض می‌گیریم که به‌ازای تغییر t از α تا β، از مقدار $a=\varphi(\alpha)$ تا $b=\varphi(\beta)$، با تغییری یکنوا، عبور کند.

محض مشخص بودن فرض می‌کنیم: $a<b$ و $\alpha<\beta$، یعنی تابع $f(x)$، به‌طور یکنوا، صعودی است. بازهٔ $[\alpha, \beta]$ را، به‌طریقی دلخواه، به‌کمك نقطه‌های

$$t_0=\alpha<t_1<t_2<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_n=\beta$$

به‌بخش‌ها، تقسیم می‌کنیم. اگر داشته باشیم: $x_i=\varphi(t_i)\ (i=0, 1, 2, \ldots, n)$، ضمناً، خواهیم داشت:

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

اگر بزرگترین مقدار از بین درازاهای $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$ (که با λ نشان می‌دهیم)، به‌سمت صفر میل کند، با توجه به‌پیوستگی تابع $x=\varphi(t)$، همین وضع در مورد بزرگترین مقدار $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\varphi(t_{i+1})$ هم، برقرار خواهد بود [۸۷ را ببینید].

حالا، عدد دلخواه τ_i را، برای هر یك از بازه‌های $[t_i, t_{i+1}]$ اختیار می‌کنیم و مجموع انتگرالی را، برای انتگرال دوم (۹)، تشکیل می‌دهیم:

$$\sigma=\sum_i f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

فرض می‌کنیم: $\xi_i=\varphi(\tau_i)$، به‌طوری که $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$. اگر در مورد تابع $\varphi(t)$، رابطهٔ نموهای محدود را، در بازهٔ $[t_i, t_{i+1}]$ به‌کار بریم، نتیجه می‌شود:

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)=\varphi'(\bar{\tau}_i)\Delta t_i$$

که در آن، $t_i<\bar{\tau}_i<t_{i+1}$، ولی $\bar{\tau}_i$ (که برای ما نامعلوم است)، در حالت کلی، از مقدار دلخواه τ_i متمایز است؛ ضمناً، مجموع انتگرالی، برای انتگرال اول (۹):

$$\bar{\sigma}=\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

را می‌توان، حالا، به‌این‌صورت نوشت:

$$\bar{\sigma}=\sum_i f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\bar{\tau}_i)\Delta t_i$$

وقتی‌که $\lambda\to 0$، این مجموع، به‌روشنی، دارای حدخود، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ است. برای این که نشان دهیم، مجموع σ هم به‌سمت همان حد میل می‌کند، کافی است ثابت کنیم، تفاضل $\bar{\sigma}-\sigma$ به‌سمت صفر میل می‌کند.

عدد غیرمشخص $\varepsilon>0$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به‌پیوستگی (یکنواخت) تابع

$\varphi'(t)$، می‌توان عدد $\delta>0$ را چنان پیدا کرد که، به‌ازای $\lambda<\delta$، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$|\varphi'(\tau_i)-\varphi'(\bar{\tau}_i)|<\varepsilon$$

[۸۷، نتیجه را ببینید]. آن‌وقت

$$|\sigma-\bar{\sigma}|\leqslant\sum_i|f(\varphi(\tau_i))|\varphi'(\tau_i)-\varphi'(\bar{\tau}_i)|\Delta t_i<L(\beta-\alpha)\varepsilon$$

به‌شرطی که مرز بالائی $|f(x)|$ را با L نشان دهیم و به‌جای $\sum\Delta t_i$، $\beta-\alpha$ قراردهیم.

اکنون روشن است که، وقتی $\lambda\to 0$، مجموع σ به سمت حد $\int_a^b f(x)dx$ میل می‌کند و این، به‌معنای آن است که $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ وجوددارد ورابطهٔ (۹) برقرار است. اثبات، به‌پایان می‌رسد.

یادداشت. به‌خصوص تاکید می‌کنیم که، براساس آن‌چه ثابت کردیم، می‌توان رابطه‌های ساده، و غالباً مفیدی را که در تمرین‌های ۸)، ۹) و ۱۰) شمارهٔ **۳۱۴** به‌دست آوردیم، برای حالت تابع دلخواه وانتگرال‌پذیر $f(x)$، تعمیم داد.

§۴. بعضی کاربردهای انتگرال معین

۳۱۷. رابطهٔ والیس. ازرابطهٔ (۸) شمارهٔ **۳۱۲**، می‌توان به‌سادگی، رابطهٔ معروف والیس (j. Wallis) را نتیجه گرفت.

با فرض $0<x<\frac{\pi}{2}$، این نابرابری را داریم:

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x$$

ازاین نابرابری‌ها، در فاصلهٔ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$، انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}xdx$$

ازاین‌جا، بنابر (۸)، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

یا

$$\frac{۱}{۲n+۱}\left[\frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!}\right]^۲<\frac{\pi}{۲}<\left[\frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!}\right]^۲\frac{۱}{۲n}$$

چون، برای تفاضل دومقداری که در دوطرف قرار گرفته‌اند، داریم:

$$\frac{۱}{۲n(۲n+۱)}\left[\frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!}\right]^۲<\frac{۱}{۲n}\cdot\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین، این تفاضل، به‌روشنی به‌ازای $n\to\infty$، به‌سمت صفرمیل می‌کند، یعنی $\frac{\pi}{۲}$ حد مشترك آن‌هاست و به‌این ترتیب

$$\frac{\pi}{۲}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!}\right]^۲\frac{۱}{۲n+۱}$$

یا

$$\frac{\pi}{۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲\cdot۲\cdot۴\cdot۴\cdots۲n\cdot۲n}{۳\cdot۳\cdot۵\cdot۵\cdots(۲n-۱)(۲n-۱)(۲n+۱)}$$

وهمین، رابطهٔ والیس است. این رابطه، ازنظر تاریخی، نخستین رابطه‌ای است که عدد π را به‌صورت حد واریانت‌های گویا ــ که به‌طور ساده‌ای قابل محاسبه‌اند ــ نشان می‌دهد. در بررسی‌های نظری، هنوز هم، ازهمین رابطه استفاده می‌شود [مثلا، ۴۰۶ را ببینید]، ولی برای محاسبهٔ تقریبی مقدار π، روشی وجود دارد که، نسبت به‌رابطهٔ والیس، به‌مراتب سریع‌تر به‌نتیجه می‌رسد [۴۱۰].

۳۱۸. رابطهٔ تیلور با جملهٔ متمم. در رابطهٔ تعمیم داده شدهٔ انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء (۷)[۳۱۱]، فرض می‌کنیم: $v=(b-x)^n$. آن‌وقت

$$v'=-n(b-x)^{n-۱},\ v''=n(n-۱)(b-x)^{n-۲},\ \ldots,$$

$$v^{(n)}=(-۱)^n n(n-۱)\cdots ۲\cdot۱,\quad v^{(n+۱)}=۰$$

به‌ازای $x=b$، همه تابع‌های v، v'، v''، ...، $v^{(n-۱)}$، برابرصفر می‌شوند. اگر برای u، u'، u''، ...، از نمایش $f(x)$، $f'(x)$، $f''(x)$، ... استفاده کنیم، می‌توان (۷) را، به‌این صورت نوشت:

$$۰=(-۱)^n[n!f(b)-n!f(a)-n!f'(a)(b-a)-\frac{n!}{۲!}f''(a)(b-a)^۲-\cdots$$

$$\dots - f^{(n)}(a)(b-a)^n] + (-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx$$

ازاین‌جا، رابطهٔ تیلور، با جملهٔ متمم به‌صورت انتگرال معین، به‌دست می‌آید:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx$$

اگر به‌علامت‌های شماره‌های **۱۲۴ — ۱۲۶** برگردیم و، دراین‌جا، b را به x و a را به x_0 تبدیل کنیم:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

عبارت جدید جملهٔ متمم، برخلاف عبارتی که در **۱۲۴** و **۱۲۶** دیده‌ایم، شامل هیچ‌گونه عددهای نامعلوم نیست.

اگر بخواهیم، می‌توانیم ازاین عبارت، شکل آشنای جملهٔ متمم را درآوریم. مثلا، با استفاده ازاین‌که، عامل $(x-t)^n$ تابع زیرانتگرال، تغییر علامت نمی‌دهد، می‌توان، درمورد انتگرال آخری، قضیهٔ میانگین [۳۰۴، ۱۰°] را به‌کاربرد:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\int_{x_0}^x (x-t)^n dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

که درآن، c، در بازهٔ $[x_0, x]$ واقع است. به‌این ترتیب، دوباره، به‌شکل لاگرانژ از جملهٔ متمم می‌رسیم.

۳۱۹. متعالی (غیرجبری) بودن عدد e. همان رابطهٔ (۷) شمارهٔ **۳۱۱**، می‌تواند سرآغازی برای اثبات قضیهٔ معروف هرمیت، دربارهٔ عدد e، باشد.

همهٔ عددهای حقیقی (و همچنین، به‌طورکلی، عددهای مختلط هم) به‌دوگروه جبری

و غیرجبری (متعالی)، تقسیم می‌شوند. عددی را جبری گویند که بتواند ریشهٔ یك معادلهٔ جبری با ضریب‌های گویا باشد (روشن است که، بدون لطمه‌زدن به کلیت مساله، می‌توان ضریب‌های معادله را، صحیح فرض کرد)؛ و اگر عددی، غیر از عددهای جبری باشد، متعالی یا غیرجبری نامیده می‌شود.

هرعدد گویا و یا هرعدد گنگی که به‌وسیلهٔ ریشهٔ یك‌عدد گویا بیان‌شده باشد، مثال‌هایی از عددهای جبری هستند: عدد $\frac{۱۱}{۱۷}$، ریشهٔ معادلهٔ $۱۷x+۱۱=۰$ وعدد $\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۲}}$، ریشهٔ معادلهٔ $x^۶-۳x^۴+۳x^۲-۳=۰$ است وغیره.

هرمیت ثابت کرد که، e یك عدد غیرجبری است*. اثبات این حکم را می‌آوریم.

فرض کنیم، e، ریشهٔ معادلهٔ زیر باشد:

$$c_۰+c_۱e+c_۲e^۲+\cdots+c_me^m=۰ \qquad (۱)$$

که در آن، همهٔ ضریب‌های $c_۰$، $c_۱$، $c_۲$، ...، c_m، عددهایی صحیح هستند.

در رابطهٔ (۷) شمارهٔ ۳۱۱، $u=f(x)$ را چند جمله‌ای غیرمشخص درجهٔ n و $v=(-۱)^{n+۱}.e^{-x}$ می‌گیریم، دراین صورت، اگر $a=۰$ فرض شود، این رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_۰^b f(x)e^{-x}\,dx=-e^{-x}[f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)]\Big|_۰^b$$

زیرا داریم: $f^{(n+۱)}(x)=۰$. برای سهولت کار، فرض می‌کنیم:

$$f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)=F(x)$$

ازاین‌جا، داریم:

$$e^bF(۰)=F(b)+e^b\int_۰^b f(x)e^{-x}dx$$

اگردراین‌جا، به‌ترتیب، m، ...، ۱، ۰، $b=۰$ بگیریم، سپس، برابری‌های حاصل را، به‌ترتیب، در $c_۰$، $c_۱$، $c_۲$، ...، c_m ضرب وآن‌ها را باهم جمع کنیم، با توجه به (۱)، به‌این نتیجه می‌رسیم:

---

*) به‌دنبال هرمیت، لیندمان (F. Lindemann)، غیرجبری‌بودن عدد π را ثابت کرد که، برای نخستین‌بار، ثابت شد که، مسألهٔ معروف وقدیمی تربیع دایره، قابل‌حل نیست.

$$0 = c_0F(0)+c_1F(1)+\cdots+c_mF(m)+\sum_{i=0}^{m}c_ie^i\int_0^i f(x)e^{-x}dx \qquad (۲)$$

و به‌خاطر بیاوریم که،این برابری، باید برای هرتابع دلخواه $f(x)$ برقرار باشد. حالا، نشان می‌دهیم که، این چندجمله‌ای را، می‌توان طوری انتخاب کرد که برابری (۲) را غیرممکن کند، که درنتیجه، قضیه ثابت می‌شود.

برای این منظور، فرض می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-m)^p$$

که در آن، p عددی اول، بزرگتر از m و $|c_0|$ است. مشتق مرتبهٔ pام و مرتبه‌های بالاتر این چندجمله‌ای، دارای ضریب‌های صحیح و، ضمناً، بخش‌پذیر بر p است؛ این مطلب، مستقیماً، ازاین‌جا ناشی می‌شود که حاصل‌ضرب p عدد صحیح متوالی، بر $p!$ بخش‌پذیر است. بنابراین، همهٔ این‌مشتق‌ها، به‌ازای مقدارهای‌صحیح x، برابر با مقدارهای‌صحیحی می‌شوندکه، ضمناً، مضربی از p هستند. ازآن‌جاکه، چندجمله‌ای $f(x)$ و $(p-1)$ مشتق اولیهٔ آن، به‌ازای $x=0,1,2,\ldots,m$ برابر صفرمی‌شوند، بنابراین $F(1)$،$F(2)$،...،$F(m)$، عددهائی صحیح و مضرب p هستند.

ولی درمورد $F(0)$، وضع به‌گونه‌ای دیگر است. به‌ازای $x=0$، چندجمله‌ای $f(x)$ و تنها $(p-2)$ مشتق اولیهٔ آن، برابر صفر می‌شود، به‌طوری‌که

$$F(0)=f^{(p-1)}(0)+f^{(p)}(0)+\cdots$$

همان‌طورکه دیدیم، همهٔ جمله‌های جمع، باآغاز از دومی، عددهای صحیحی ازمضرب p هستند، ولی $f^{(p-1)}(x)=(-1)^p m!$، وهمراه با آن، $F(0)$، بر p بخش‌پذیر نیست. با توجه به‌شرطی که برای p داشتیم، c_0 بر p بخش‌پذیر نیست و، بنابراین، نخستین مجموع سمت راست برابری (۲)، عددی است صحیح وبخش‌ناپذیر بر p و، در نتیجه، روشن است‌که نمی‌تواند برابر صفر باشد.

حالا، به‌دومین مجموع (۲) می‌پردازیم. در بازهٔ $[0,m]$، به‌روشنی داریم:

$$|f(x)|<\frac{1}{(p-1)!}m^{p-1}.m^p.m^p\cdots=\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

بنابراین:

$$\left|\int_0^i f(x)e^{-x}dx\right|<\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\int_0^i e^{-x}dx<\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

واگر مجموع $|c_1|+|c_2|+\dots+|c_m|$ را به C نشان دهیم:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x)e^{-x}dx\right| < Ce^m \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} = Ce^m m^m \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!}$$

ولی می‌دانیم که عامل آخری، به‌ازای $p \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند [۳۵، ۱)]، به‌طوری که، مجموع دوم (۲)، برای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ p، ازلحاظ قدرمطلق، کمتر از مجموع اول می‌شود؛ وطبیعی است که، درچنین حالتی، نمی‌تواند مجموع آن‌ها، برابرصفرشود. تناقض آشکار است.

۳۲۰. چندجمله‌ای‌های لژاندر. این مساله‌راطرح‌می‌کنیم: مطلوب است‌چندجمله‌ای $X_n(x)$ از درجهٔ n، به‌نحوی که، برای هرچندجمله‌ای $Q(x)$، با درجهٔ کمتر از n، این تساوی برقرار باشد:

$$\int_a^b X_n(x)\cdot Q(x)dx = 0 \qquad (۳)$$

که درآن، عددهای a و b، دلخواه، ولی تثبیت شده‌اند.

هرچندجمله‌ای $X_n(x)$ ازدرجهٔ n رامی‌توان مانندمشتق مرتبهٔ nام ازیك‌چندجمله‌ای $R(x)$، از درجهٔ $2n$، گرفت، که طبعاً، $R(x)$ را می‌توان با nبار متوالی‌انتگرال گیری‌از $X_n(x)$ به‌دست آورد. اگر درهرانتگرال گیری، مقدار ثابت آن را، طوری انتخاب کنیم که به‌ازای $x=0$، نتیجهٔ انتگرال برابرصفرشود، آن‌وقت، برای چندجمله‌ای $R(x)$، این شرط‌ها، برقرار خواهد بود:

$$R(a)=0,\ R'(a)=0,\ \dots,\ R^{(n-1)}(a)=0 \qquad (۴)$$

به‌این ترتیب، مساله، منجر به‌پیدا کردن چنان چندجمله‌ای $R(x)$ ازدرجهٔ $2n$می‌شود که داشته باشیم:

$$\int_a^b R^{(n)}(x)Q(x)dx = 0 \qquad (۵)$$

برای هرچندجمله‌ای دلخواه $Q(x)$ از درجهٔ کمتر از n، برابری‌های (۴) هم برقراراست. اگر از روی رابطهٔ (۷) شمارهٔ ۳۱۱، درآن، n را به $n-1$ تبدیل کنیم:

$$\int_a^b R^{(n)}(x)Q(x)dx = [Q(x)R^{(n-1)}(x) - Q'(x)R^{(n-2)}(x) + \dots \pm$$

$$\pm Q^{(n-1)}(x)R(x)]\Big|_a^b \mp \int_a^b Q^{(n)}(x)R(x)dx$$

اگر (۴) را درنظر بگیریم‌وتوجه‌کنیم‌که $Q^{(n)}(x)\equiv 0$، آن‌گاه، شرط (۵)، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$Q(b)R^{(n-1)}(b)-Q'(b)R^{(n-2)}(b)+\cdots\pm Q^{(n-1)}(b)R(b)=0 \quad (۶)$$

با توجه به‌این‌که، چندجمله‌ای $Q(x)$ از درجهٔ $(n-1)$، به‌کلی غیرمشخص است، می‌توان مقدارهای $Q(b)$، $Q'(b)$، ...، $Q^{(n-1)}(b)$، یعنی خود این چندجمله‌ای و مشتق‌های متوالی آن به‌ازای $x=b$، را، همچون عددهایی غیرمشخص در نظر گرفت. آن‌وقت، شرط (۶)، با شرط‌های زیر، هم‌ارز می‌شود:

$$R(b)=0,\ R'(b)=0,\ \ldots,\ R^{(n-1)}(b)=0 \quad (۷)$$

از(۴)و(۷) روشن‌می‌شودکه‌هم a و هم b، ریشه‌های‌تکراری‌مرتبهٔn، ازچندجمله‌ای $R(x)$ هستند، درنتیجه، باحاصل‌ضرب $(x-a)^n(x-b)^n$، تنها درضریب عددی‌می‌تواند فرق داشته باشد، یعنی

$$X_n(x)=c_n\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n]$$

اگر به‌خصوص، $a=-1$ و $b=+1$ اختیار کنیم، به‌چند جمله‌ای معروف لژاندر می‌رسیم:

$$X_n(x)=c_n\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

در ۱۱۸، ۶) شرط کردیم‌که اگر c_n را، در چندجمله‌ای لژاندر، این‌طور انتخاب کنیم:

$$c_n=\frac{1}{2^n\cdot n!}=\frac{1}{(2n!!)}$$

آن‌را با $P_n(x)$ نشان‌دهیم. برای‌این‌چندجمله‌ای‌داریم: $P_n(1)=1$ و $P_n(-1)=(-1)^n$. معمولاً، فرض می‌شود: $P_0(x)=1$. همهٔ جمله‌های P_n، از نظرفرد یا زوج بودن، با n یکسان هستند.

روشن است‌که، بزرگترین ضریب، چنین است:

$$\frac{۲n(۲n-۱)\cdots(n+۱)}{(۲n)!!}=\frac{(۲n-۱)!!}{n!}$$

بنابه‌خود تعریف چندجمله‌ای لژاندر، برای هرچندجمله‌ای دلخواه $Q(x)$، با درجهٔ کمتر از n، همیشه داریم:

$$\int_{-۱}^{۱} P_n(x)Q(x)dx=۰ \qquad (۸)$$

درحالت خاص، اگر m و n را، دوعدد غیرمنفی صحیح بگیریم، داریم:

$$\int_{-۱}^{۱} P_n(x)P_m(x)dx=۰ \qquad (۹)$$

مقدار انتگرال $\int_{-۱}^{۱} P_n^۲(x)dx$ را پیدا می‌کنیم. این انتگرال، تنها در ضریب $c_n=\frac{۱}{(۲n!!)^۲}$، با انتگرال زیر فرق دارد:

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{d^n(x^۲-۱)^n}{dx^n}\cdot\frac{d^n(x^۲-۱)^n}{dx^n}dx$$

اگر درمورد آخری، بازهم، رابطهٔ (۷) شمارهٔ **۳۱۱** را به‌کار بریم، با تبدیل n به $n-۱$ وفرض

$$u=\frac{d^n(x^۲-۱)^n}{dx^n},\ v=(x^۲-۱)^n$$

به‌انتگرال زیر، منجرمی‌شود:

$$(-۱)^n\int_{-۱}^{۱}\frac{d^{۲n}(x^۲-۱)^n}{dx^{۲n}}\cdot(x^۲-۱)^n dx=۲۰(۲n)!\int_{۰}^{۱}(۱-x^۲)^n\,dx$$

(همهٔ جمله‌های خارج انتگرال، ازبین می‌روند، زیرا تابع v ومشتق‌های آن، تا خودمرتبهٔ $(n-۱)$ام، به‌ازای $x=\pm۱$، برابرصفرمی‌شود). دراین‌جا، بافرض $x=\sin t$ [با **۳۱۴**، ۲) مقایسه‌کنید] داریم:

$$۲۰(۲n)!\cdot\frac{(۲n)!!}{(۲n+۱)!!}=\frac{۲}{۲n+۱}(۲n!!)^۲$$

به‌نحوی که بالاخره

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (10)$$

درپایان، بااستفاده ازویژگی چندجمله‌ای لژاندر، یك رابطهٔ بازگشتی‌می‌آوریم، که سه چندجمله‌ای ازاین نوع را، به‌هم مربوط می‌کند.

قبلاً یادآوری می‌کنیم که x^n رامی‌توان به‌صورت تابع همگن خطی، نسبت به P_0، P_1، ...، P_n، بـا ضریب‌هایی ثابت، نشان داد. دراین صورت، همین حکم، درمورد چندجمله‌ای درجهٔ n دلخواه هم درست است. بنابراین

$$xP_n = a_0P_{n+1} + a_1P_n + a_2P_{n-1} + a_3P_{n-2} + \cdots$$

که‌در آن، a_0، a_1، a_2، a_3، ...، ضریب‌های ثابتی هستند. به‌سادگی، معلوم می‌شود که

$$a_3 = a_4 = \cdots = 0$$

مثلاً، برای آن‌که a_3 را تعیین‌کنیم، هردوطرف این‌ن برابری را در X_{n-2} ضرب و از ۱ — تا ۱، انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-1}^{1} P_n \cdot xP_{n-2}\,dx = a_0\int_{-1}^{1} P_{n+1}P_{n-2}\,dx + a_1\int_{-1}^{1} P_nP_{n-2}dx +$$

$$+ a_2\int_{-1}^{1} P_{n-1}P_{n-2}dx + a_3\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2dx + \cdots$$

با توجه به (۸) و (۹)، همهٔ انتگرال‌ها، به‌جزیکی، برابرصفرند وداریم:

$$a_3\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2dx = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

ضریب a_1 هم برابرصفراست، زیرا سمت‌چپ تساوی، اصلاً شامل x^n نیست. برای‌تعیین a_0، ضریب‌های x_{n+1} را، در دوطرف تساوی، برابر می‌گیریم:

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = a_0\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \Rightarrow a_0 = \frac{n+1}{2n+1}$$

بالاخره، برای پیداکردن a_2، دوطرف تساوی را، به‌ازای $x = 1$، برابر می‌گیریم:

$$1 = a_0 + a_2 \Rightarrow a_2 = 1 - a_0 = \frac{n}{2n+1}$$

که در نتیجه، سرانجام، خواهیم داشت:

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0 \qquad (11)$$

و همین، رابطهٔ بازگشتی مطلوب است. اگر از $P_0=1$ و $P_1=x$ آغاز کنیم، به کمك این رابطهٔ بازگشتی، می‌توان، چندجمله‌ای‌های لژاندر را به‌دست‌آورد:

$$P_2=\frac{3x^2-1}{2},\ P_3=\frac{5x^3-3x}{2},\ P_4=\frac{35x^4-30x^2+3}{8},\ \ldots$$

۳۲۱. نابرابری انتگرالی. در شماره‌های **۱۳۳** و **۱۳۴**، یك رشته نابرابری، برای مجموع‌ها، آوردیم. اکنون نشان می‌دهیم که می‌توان، نابرابرهای مشابهی، برای انتگرال‌ها هم، برقرار کرد. همهٔ تابع‌های $p(x)$، $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ را، که دراین‌جا با آن‌ها سروکار داریم، انتگرال‌پذیر به‌حساب می‌آوریم*.

۱) نابرابری (۴) شمارهٔ **۱۳۳** را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$e^{\frac{\sum p_i \ln a_i}{\sum p_i}} \leqslant \frac{\sum p_i a_i}{\sum p_i} \qquad (12)$$

تابع‌های مثبت $p(x)$ و $\varphi(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$، درنظر می‌گیریم. بازه را، با نقطه‌های

$$x_0=a<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

به بخش‌های به‌درازای $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ تقسیم می‌کنیم. حالا، در نابرابری (۱۲) فرض می‌کنیم: $p_i=p(x_i).\Delta x_i$ و $a_i=\varphi(x_i)$. خواهیم داشت:

$$e^{\frac{\sum p(x_i).\ln\varphi(x_i).\Delta x_i}{\sum p(x_i).\Delta x_i}} \leqslant \frac{\sum p(x_i)\varphi(x_i).\Delta x_i}{\sum p(x_i).\Delta x_i}$$

همهٔ مجموع‌ها، که به صورت مجموع‌های انتگرالی هستند، به‌ازای $\Delta x_i \to 0$، به‌سمت انتگرال‌های نظیر میل می‌کنند. به‌این ترتیب، درحد، به‌نابرابری انتگرالی، مشابه (۱۲)، می‌رسیم:

$$e^{\frac{\int_a^b p(x)\ln\varphi(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}} \leqslant \frac{\int_a^b p(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

---

*) با این شرط، سایر تابع‌هایی هم، که به‌آن‌ها برخورد می‌کنیم، انتگرال‌پذیر می‌شوند. برای تأیید این مطلب، کافی است. به‌شمارهٔ **۲۹۹**، II وشمارهٔ **۳۰۰**، ۴) استناد کنید.

در حالت خاص $p(x)=1$، به‌دست می‌آید:

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln \varphi(x)dx} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)dx$$

عبارت سمت‌راست را «میانگین‌حسابی» مقدارهای تابع $\varphi(x)$ در بازهٔ $[a, b]$، وعبارت سمت چپ را، «میانگین هندسی» آن‌ها می‌نامند.

۲) حالا، نابرابری‌های مشابه نابرابری‌های کوشی ـ هولدر و مینکووسکی [۱۳۳، (۵) و (۷)] را می‌آوریم:

$$\sum a_i b_i \leqslant \{\sum a_i^k\}^{\frac{1}{k}} \cdot \{\sum b_i^{k'}\}^{\frac{1}{k'}} \qquad (۱۳)$$

و

$$\{\sum (a_i+b_i)^k\}^{\frac{1}{k}} \leqslant \{\sum a_i^k\}^{\frac{1}{k}} + \{\sum b_i^k\}^{\frac{1}{k}} \qquad (۱۴)$$

$$\left(k,k'>1,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right)$$

تابع‌های مثبت $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$، در نظر می‌گیریم. مثل قبل، با تقسیم این بازه، به‌وسیلهٔ نقطه‌های x_i فرض می‌کنیم، در (۱۳)

$$a_i=\varphi(x_i)\cdot\Delta x_i^{\frac{1}{k}}, \quad b_i=\psi(x_i)\cdot\Delta x_i^{\frac{1}{k'}}$$

و در (۱۴)

$$a_i=\varphi(x_i)\cdot\Delta x_i^{\frac{1}{k}}, \quad b_i=\psi(x_i)\cdot\Delta x_i^{\frac{1}{k}}$$

خواهیم داشت:

$$\sum \varphi(x_i)\psi(x_i)\Delta x_i \leqslant \{\sum [\varphi(x_i)]^k \Delta x_i\}^{\frac{1}{k}} \cdot \{\sum [\psi(x_i)]^{k'} \cdot \Delta x_i\}^{\frac{1}{k'}}$$

و

$$\{\sum [\varphi(x_i)+\psi(x_i)]^k \cdot \Delta x_i\}^{\frac{1}{k}} \leqslant \{\sum [\varphi(x_i)]^k \cdot \Delta x_i\}^{\frac{1}{k}} + \{\sum [\psi(x_i)]^k \cdot \Delta x_i\}^{\frac{1}{k}}$$

که اگر، به‌ازای $\Delta x_i \to 0$، به‌سمت حد عبور کنیم، بالاخره، حاصل می‌شود:

$$\int_a^b \varphi.\psi dx \leqslant \left\{\int_a^b \varphi^k dx\right\}^{\frac{1}{k}}.\left\{\int_a^b \psi^{k'} dx\right\}^{\frac{1}{k'}} \qquad (۱۳^*)$$

و

$$\left\{\int_a^b [\varphi+\psi]^k dx\right\}^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\{\int_a^b \varphi^k dx\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\int_a^b \psi^k dx\right\}^{\frac{1}{k}} \qquad (۱۴^*)$$

حالت خاص این نابرابری‌ها، به‌ازای $k = k' = ۲$، چنین می‌شود:

$$\int_a^b \varphi.\psi dx \leqslant \sqrt{\int_a^b \varphi^۲ dx}.\sqrt{\int_a^b \psi^۲ dx} \qquad (۱۳')$$

و

$$\sqrt{\int_a^b [\varphi+\psi]^۲ dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b \varphi^۲ dx} + \sqrt{\int_a^b \psi^۲ dx} \qquad (۱۴')$$

که نخستین آن‌ها، به و. یا. بوینا کوفسکی تعلق دارد؛ و دومی، به‌سادگی، با مربع کردن، به‌اولی تبدیل می‌شود.

۳) بالاخره، نابرابری ین‌سن [۱۴۴، (۱۲*)] را مطرح می‌کنیم.

$$f\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \leqslant \frac{\sum p_i . f(x_i)}{\sum p_i} \qquad (۱۵)$$

در این‌جا، تابع $f(x)$، از یك بازهٔ $\mathfrak{D}$ برآمده است که نقطه‌های x_i به‌آن تعلق دارند؛ و p_iها، عددهایی مثبت‌اند. فرض کنیم، در یك بازهٔ $[a, b]$، تابع $\varphi(x)$، با مقدارهای واقع در $\mathfrak{D}$، و تابع مثبت $p(x)$ مفروض باشند. x_i، معرف نقطه‌های تقسیم بازهٔ $[a, b]$ است؛ x_i سابق واقع در (۱۵) را به $\varphi(x_i)$ و p_i را به $p(x_i).\Delta x_i$ تبدیل می‌کنیم. اگر، مثل قبل، از مجموع‌های انتگرالی، به‌خود انتگرال‌ها عبور کنیم، نابرابری انتگرالی ین‌سن به‌دست می‌آید:

$$f\left[\frac{\int_a^b p(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right] \leqslant \frac{\int_a^b p(x)f(\varphi(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

§۵. محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌ها

۳۲۲. طرح مساله. رابطه‌های مستطیل‌ها و ذوزنقه‌ها. با فرض پیوسته بودن تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، می‌خواهیم، انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را محاسبه کنیم. قبلاً هم، در §۳، نمونه‌های زیادی از این گونه انتگرال‌ها را محاسبه کردیم: گاهی به‌کمك تابع اولیه (اگر، به‌صورتی متناهی، قابل بیان بود) و گاهی، بدون استفاده از تابع اولیه، و غالباً با روش‌های ابتکاری و ظریف. ولی، باید توجه کنیم که، همهٔ این‌ها، طبقهٔ نسبتاً محدودی از انتگرال‌ها را، در بر می‌گیرند؛ و در بیرون این محدوده، باید از روش‌های مختلف محاسبهٔ تقریبی استفاده کرد.

در این بند، با ساده‌ترین این روش‌ها آشنا می‌شویم. در این روش‌ها، مقدار تقریبی انتگرال را، از روی تعدادی از مقدارهای تابع زیر انتگرال ـ که به‌ازای یك رشته مقدارهای (معمولاً هم فاصله) متغیر مستقل به‌دست آمده‌اند، محاسبه می‌کنند.

نخستین رابطه‌ها را، از راه ملاحظه‌های هندسی، پیدا می‌کنیم: با تعبیر انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$، به عنوان مساحت یك شکل محدود به منحنی $y=f(x)$ [۲۹۴] ـ طبق مسالهٔ مربوط به‌تعیین این مساحت ـ راهی برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال معین پیدا می‌کنیم.

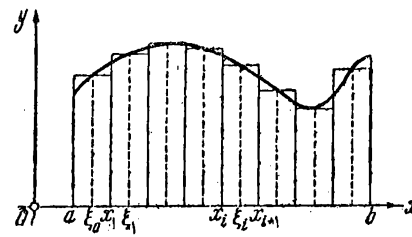
قبل از همه، از روشی استفاده می‌کنیم که از خود مفهوم انتگرال سرچشمه می‌گیرد. می‌توان تمامی شکل واقع بر صفحه را (شکل ۶)، مثلاً، به‌نوارهای به‌پهنای $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$* تقسیم و سپس، هر نوار را، به‌تقریب، برابر با مستطیلی گرفت که ارتفاع آن، یکی از عرض‌های این نوار باشد. در نتیجه، به‌رابطهٔ تقریبی زیر می‌رسیم:

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{n}[f(\xi_0)+f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_{n-1})]$$

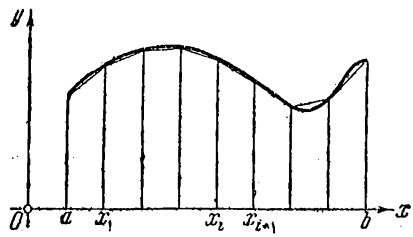
که در آن، $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$. در این‌جا، به‌جای مساحت مطلوب شکل منحنی‌الخط، مساحتی را در نظر گرفته‌ایم که، از مستطیل‌های پله‌ای شکل تشکیل شده است (و یا، می‌توان گفت که، به جای انتگرال معین، مجموع انتگرالی را در نظر گرفته‌ایم). این رابطهٔ تقریبی، به‌رابطه مستطیل‌ها، معروف است.

---

*) همان علامت‌های شمارهٔ ۲۹۴ را، در این‌جا هم، به‌کار می‌بریم.



شکل ۶



شکل ۷

در عمل، معمولاً $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+\frac{1}{2}}$ می‌گیرند. اگر عرض متوسط نظیر را $f(\xi_i) = f(x_{i+\frac{1}{2}})$ یا $y_{i+\frac{1}{2}}$ بنامیم، آن‌وقت، رابطهٔ فوق، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{n-\frac{1}{2}}\right) \qquad (1)$$

از این به‌بعد، هر جا از رابطهٔ مستطیل‌ها صحبت کنیم، منظورمان، همین رابطه است.

ملاحظه‌های هندسی، به‌طور طبیعی، ما را به‌رابطهٔ تقریبی دیگری هم می‌رسانند: به‌جای منحنی مفروض، خط شکسته‌ای محاط در آن‌را، درنظر می‌گیریم، که رأس‌های آن، در نقطه‌های (x_i, y_i) قرار گرفته باشند [$y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$]. آن‌وقت، به‌جای شکل منحنی‌الخط، شکل دیگری خواهیم داشت که از یك رشته ذوزنقه تشکیل شده است (شکل ۷). اگر مثل حالت قبل، فرض کنیم که بازهٔ $[a, b]$، به‌فاصله‌های برابر، تقسیم شده است، مساحت‌های این ذوزنقه‌ها، چنین می‌شوند:

$$\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_0+y_1}{2},\quad \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_1+y_2}{2},\ \ldots,\ \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_{n-1}+y_n}{2}$$

که با جمع کردن آن‌ها، به‌رابطهٔ تقریبی جدیدی می‌رسیم:

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) \qquad (2)$$

این رابطه هم، همان رابطهٔ ذوزنقه‌هاست.

می‌توان ثابت کرد که، وقتی n تا بی‌نهایت ترقی کند، خطای حاصل از رابطهٔ مستطیل‌ها و رابطهٔ ذوزنقه‌ها، بی‌نهایت نزول می‌کند. بنابراین می‌توانیم با انتخاب به‌قدر

کافی بزرگ n، مقدار انتگرال معین مفروض را، به‌کمك هرکدام از این رابطه‌ها، با هر تقریب دلخواهی، پیدا کنیم.

به‌عنوان مثال، انتگرال معین زیر را (که مقدار آن برای ما معلوم است)، در نظر می‌گیریم:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0/785398\ldots$$

و در مورد آن، هر دو رابطهٔ تقریبی را، با اختیار $n=10$، و یا در نظر گرفتن چهاررقم اعشار، به‌کار می‌بریم.

از روی رابطهٔ مستطیل‌ها داریم:

$x_{\frac{1}{2}} = 0/05$,	$y_{\frac{1}{2}} = 0/9975$
$x_{\frac{3}{2}} = 0/15$,	$y_{\frac{3}{2}} = 0/9780$
$x_{\frac{5}{2}} = 0/25$,	$y_{\frac{5}{2}} = 0/9412$
$x_{\frac{7}{2}} = 0/35$,	$y_{\frac{7}{2}} = 0/8909$
$x_{\frac{9}{2}} = 0/45$,	$y_{\frac{9}{2}} = 0/8316$
$x_{\frac{11}{2}} = 0/55$,	$y_{\frac{11}{2}} = 0/7678$
$x_{\frac{13}{2}} = 0/65$,	$y_{\frac{13}{2}} = 0/7030$
$x_{\frac{15}{2}} = 0/75$,	$y_{\frac{15}{2}} = 0/6400$
$x_{\frac{17}{2}} = 0/85$,	$y_{\frac{17}{2}} = 0/5806$
$x_{\frac{19}{2}} = 0/95$,	$y_{\frac{19}{2}} = 0/5256$
مجموع	$7/8562$

$$\frac{7/8562}{10} = 0/78562$$

و از رابطهٔ ذوزنقه‌ها:

$x_0 = ۰/۰$, $y_0 = ۱/۰۰۰۰$

$x_1 = ۰/۱$, $y_1 = ۰/۹۹۰۱$

$x_2 = ۰/۲$, $y_2 = ۰/۹۶۱۵$

$x_3 = ۰/۳$, $y_3 = ۰/۹۱۷۴$

$x_4 = ۰/۴$, $y_4 = ۰/۸۶۲۱$

$x_5 = ۰/۵$, $y_5 = ۰/۸۰۰۰$

$x_6 = ۰/۶$, $y_6 = ۰/۷۳۵۳$

$x_7 = ۰/۷$, $y_7 = ۰/۶۷۱۱$

$x_8 = ۰/۸$, $y_8 = ۰/۶۰۹۸$

$x_9 = ۰/۹$, $y_9 = ۰/۵۵۲۵$

$x_{10} = ۱/۰$, $y_{10} = ۰/۵۰۰۰$

مجموع: ۱/۵۰۰۰

مجموع: ۷/۰۹۹۸

$$\frac{۱}{۱۰}\left(\frac{۱/۵۰۰}{۲} + ۷/۰۹۹۸\right) =$$

$$= ۰/۷۸۴۹۸$$

هر دو نتیجهٔ تقریبی، با درجهٔ تقریب کم و بیش یکسانی به‌دست آمده‌اند و بامقدار واقعی (از این یا آن طرف)، کمتر از ۰/۰۰۰۵ اختلاف دارند.

خواننده متوجه این مطلب شده است که، خطا را به‌این جهت، توانستیم پیدا کنیم که مقدار واقعی انتگرال را، ازقبل، می‌دانستیم. برای این‌که، در حالت کلی، رابطه‌های مناسبی برای محاسبهٔ تقریبی داشته باشیم، باید رابطهٔ مناسبی برای برآورد خطا پیدا کنیم که، نه‌تنها بتواند مقدار خطا را برای n مفروض برآورد کند، بلکه به‌کمك آن، بتوان n را طوری انتخاب کرد تا میزان تقریب موردنظر، تأمین‌شود. درشمارهٔ **۳۲۵**، به‌این‌مطلب خواهیم پرداخت.

۳۲۳. واسطه‌یابی پارابولیك (سهمی‌وار). برای‌محاسبهٔ تقریبی انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، می‌توان‌ازاین‌راه‌عمل کرد که $f(x)$ را با چندجمله‌ای نزدیك به‌آن، عوض کنیم: اگر چندجمله‌ای

$$y = P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k \qquad (۳)$$

را «نزدیك» به $f(x)$ بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \int_a^b P_k(x)dx$$

به‌زبان دیگرمی‌توان گفت‌که، در این جا، برای محاسبهٔ مساحت موردنظر، «منحنی»

$y=f(x)$ را با «سهمی درجهٔ kام» (۳) عوض می‌کنیم و، به‌همین مناسبت، این‌روش را، واسطه‌یابی پارابولیک می‌نامند.

خود انتخاب چندجمله‌ای واسطه‌ای $P_k(x)$ را، معمولاً، به‌این‌ترتیب انجام می‌دهند: در بازهٔ $[a, b]$، $k+1$ مقدار ξ_0، ξ_1، ...، ξ_k از متغیر مستقل را در نظر می‌گیرند و چندجمله‌ای $P_k(x)$ را، طوری انتخاب می‌کنند که مقدار آن، به‌ازای هریك ازاین مقدارهای x، با مقدار تابع $f(x)$، یکی باشد. می‌دانیم [۱۲۸] که، به‌این‌ترتیب، چندجمله‌ای $P_k(x)$ به‌طور یك ارزشی معین می‌شود وعبارت آن را، می‌توان از رابطهٔ واسطه‌یابی لاگرانژ، به‌دست آورد:

$$P_k(x)=\frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_k)}{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2)\cdots(\xi_0-\xi_k)}f(\xi_0)+$$
$$+\frac{(x-\xi_0)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_k)}{(\xi_1-\xi_0)(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_k)}f(\xi_1)+$$
$$+\cdots+\frac{(x-\xi_0)(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_{k-1})}{(\xi_k-\xi_0)(\xi_k-\xi_1)\cdots(\xi_k-\xi_{k-1})}f(\xi_k)$$

به‌ازای انتگرال گیری، یك عبارت خطی، نسبت به‌مقدارهای $f(\xi_0)$، ...، $f(\xi_k)$ به‌دست می‌آید، که ضریب‌های آن، وابسته به‌این مقدارها نیستند. با محاسبهٔ ضریب‌ها، می‌توان ازآن‌ها، برای هر تابع دلخواه $f(x)$، در بازهٔ مفروض $[a, b]$، استفاده کرد.

درحالت خاص $k=0$، تابع $f(x)$، به‌مقدار ثابت $f(\xi_0)$ تبدیل می‌شود که، در آن‌جا، ξ_0 نقطه‌ای غیرمشخص از بازهٔ $[a, b]$، و مثلاً، نقطه میانی آن $\xi_0=\frac{a+b}{2}$ است. درآن‌صورت، به‌تقریب داریم:

$$\int_a^b f(x)dx\doteq(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (۴)$$

از نظر هندسی، دراین‌جا، به‌جای مساحت شکل منحنی‌الخط، مساحت مستطیلی با ارتفاعی برابر میانگین عرض‌های آن، به‌حساب می‌آید.

به‌ازای $k=1$، تابع $f(x)$، با تابع خطی $P_1(x)$ عوض می‌شود، که به‌ازای $x=\xi_0$ و $x=\xi_1$، همان مقدار $f(x)$ را دارد. اگر $\xi_0=a$ و $\xi_1=b$ بگیریم، آن‌گاه

$$P_1(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b) \qquad (۵)$$

و به‌سادگی، می‌توان محاسبه کرد:

$$\int_a^b P_1(x)\,dx=(b-a)\frac{f(a)-f(b)}{2}$$

به‌این‌ترتیب، در این‌جا، به‌تقریب، داریم:

$$\int_a^b f(x)dx\doteq(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (6)$$

در این‌جا، به‌جای مساحت شکل منحنی‌الخط، مساحت ذوزنقه در نظر گرفته شده است: به‌جای منحنی، وتری را در نظر گرفته‌ایم، که دو انتهای آن را به‌هم وصل می‌کند.

نتیجهٔ بهتر را، می‌توان با انتخاب $k=2$ به‌دست آورد: $\xi_0=a$، $\xi_1=\frac{a+b}{2}$، $\xi_2=b$ می‌گیریم. آن‌وقت، چندجمله‌ای $P_2(x)$، به‌این صورت خواهد بود:

$$P_2(x)=\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}f(a)+$$

$$+\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+$$

$$+\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}f(b) \qquad (7)$$

به‌سادگی، می‌توانیم محاسبه کنیم:

$$\int_a^b\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}dx=$$

$$=\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b\left[(x-b)+\frac{b-a}{2}\right](x-b)\,dx=$$

$$= \frac{۲}{(b-a)^۲}\left[\frac{(x-b)^۳}{۳} + \frac{b-a}{۲}\cdot\frac{(x-b)^۲}{۲}\right]\Bigg|_a^b = \frac{b-a}{۶}$$

و به‌همین ترتیب

$$\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{۲}-a\right)\left(\frac{a+b}{۲}-b\right)}\,dx = ۴\,\frac{b-a}{۶},$$

$$\int_a^b \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{۲}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{۲}\right)}dx = \frac{b-a}{۶}$$

و به‌این ترتیب، به‌رابطهٔ تقریبی زیر می‌رسیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{۶}\left[f(a) + ۴f\left(\frac{a+b}{۲}\right) + f(b)\right] \qquad (۸)$$

دراین‌جا، درواقع، مساحت زیرمنحنی مفروض، با مساحت شکل محدود به سهمی معمولی (با محور قائم)، که برنقطه‌های دوانتها ونقطهٔ وسط منحنی گذشته است، عوض‌شده است.

هرقدر، درجهٔ k ازچندجمله‌ای مورد انتگرال‌گیری را، بزرگتر کنیم، یعنی، هرقدر سهمی (۳) را، از تعداد بیشتری از نقطه‌های منحنی مفروض بگذرانیم، به‌نتیجهٔ دقیق‌تری می‌رسیم. ولی راه‌حل عملی‌تری وجود دارد، که از ترکیب واسطه‌یابی پارابولیك و خرد-کردن بازه، به‌دست می‌آید.

۳۲۴. خردکردن بازهٔ انتگرال‌گیری. برای محاسبهٔ انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$، می‌توان این‌طور عمل کرد. ابتدا، بازهٔ $[a, b]$ را، به n قسمت برابر تقسیم می‌کنیم:

$$[x_۰, x_۱], [x_۱, x_۲], \cdots, [x_{n-۱}, x_n] \qquad (x_۰ = a, x_n = b)$$

درنتیجه، انتگرال مطلوب، به‌صورت مجموع زیر درمی‌آید:

$$\int_{۰}^{x_۱} f(x)\,dx + \int_{x_۱}^{x_۲} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-۱}}^{x_n} f(x)\,dx \qquad (۹)$$

حالا، در هرکدام از این بازه‌ها، از واسطه‌یابی پارابولیك استفاده می‌کنیم، یعنی،

انتگرال‌های (۹) را، با یکی از رابطه‌های تقریبی (۴)، (۶)، (۸)، ... محاسبه می‌کنیم.

به‌سادگی دیده می‌شود که، با آغاز از رابطهٔ (۴) یا (۶)، دوباره از این طریق، به‌همان رابطهٔ مستطیل‌ها یا ذوزنقه‌های (۱) و (۲) می‌رسیم.

حالا، رابطهٔ (۸) را، درمورد انتگرال‌های (۹) به‌کار می‌بریم. ضمناً، محض اختصار، مثل قبل فرض می‌کنیم:

$$f(x_i)=y_i,\ \frac{x_i+x_{i+1}}{2}=x_{i+\frac{1}{2}},\ f(x_{i+\frac{1}{2}})=y_{i+\frac{1}{2}}$$

در نتیجه

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}(y_0+4y_{\frac{1}{2}}+y_1),$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}(y_1+4y_{\frac{3}{2}}+y_2),$$

. . . . . .

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}(y_{n-1}+4y_{n-\frac{1}{2}}+y_n)$$

بالاخره، اگر این رابطه‌ها را با هم جمع کنیم، به‌رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}[(y_0+y_n)+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})+$$
$$+4(y_{\frac{3}{2}}+y_{\frac{5}{2}}+\cdots+y_{n-\frac{1}{2}})] \qquad (10)$$

که به‌رابطهٔ سیمپسون (Th. Simpson) موسوم است: برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های معین، بیشتر از این رابطه استفاده می‌شود تا رابطهٔ مستطیل‌ها یا ذوزنقه‌ها، زیرا، با صرف همان مقدار انرژی، معمولاً ما را به‌نتیجهٔ بهتری می‌رساند.

برای این که مقایسه‌ای شده باشد، همان انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ را، دوباره، منتهی از روی رابطهٔ سیمپسون محاسبه می‌کنیم. $n=2$ می‌گیریم، به‌نحوی، حتی نسبت به‌قبل، با تعداد عرض‌های کمتری سروکار داریم (در محاسبه‌ها، تا پنج رقم اعشار را درنظر می‌گیریم):

$$x_0=0;\quad x_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4};\qquad x_1=\frac{1}{2};\qquad x_{\frac{3}{2}}=\frac{3}{4};\qquad x_2=1$$

$$y_0=1;4y_{\frac{1}{2}}=3/76471;\quad 2y_1=1/6;\quad 4y_{\frac{3}{2}}=2/56;\quad y_2=0/5$$

$$\frac{1}{12}(1+3/76471+1/6+2/56+0/5)=0/78539\ldots$$

که هر پنج رقم اعشار آن، با مقدار واقعی انتگرال تطبیق می‌کند.

روشن است که، در ارتباط با رابطهٔ (۱۰) نیز، باید همان ملاحظه‌های آخر شمارهٔ **۳۲۲** را تکرار کرد. ما هم‌اکنون، به‌برآوردخطای حاصل ازرابطه‌های تقریبی، می‌پردازیم.

۳۲۵. جملهٔ متمم رابطهٔ مستطیل‌ها. از رابطهٔ (۴) آغاز می‌کنیم. فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، دارای مشتق‌های مرتبهٔ **اول** ومرتبهٔ دوم پیوسته باشد. اگر $f(x)$، را برحسب توان‌های دوجمله‌ای $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$، تا توان‌دوم آن، بسط دهیم [از روی رابطهٔ تیلور **۱۲۶**، (۱۳)]، برای همهٔ مقدارهای x، در $[a, b]$، خواهیم داشت:

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)$$

که در آن، ξ، بین x و $\frac{a+b}{2}$ قراردارد و وابسته به x است.

اگر، ازاین برابری، در فاصلهٔ از a تا b، انتگرال بگیریم، جملهٔ دوم سمت‌راست، ازبین می‌رود، زیرا

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0 \qquad (11)$$

و به‌دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

به‌نحوی که، جملهٔ متمم رابطهٔ (۴)ـ که با درنظرگرفتن آن، حاصل عبارت دقیق می‌شود ـ به‌صورت زیراست:

$$\rho=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

اگر کمترین و بیشترین مقدار تابع پیوستهٔ $f''(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$، به ترتیب، با m و M نشان دهیم [۸۵]، با توجه به‌این‌که، عامل دوم عبارت زیرانتگرال، تغییرعلامت نمی‌دهد، از روی تعمیم قضیهٔ میانگین [۳۰۴، ۱۰°]، می‌توانیم بنویسیم:

$$\rho=\frac{1}{2}\mu\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{(b-a)^3}{24}\mu$$

که در آن، μ بین m و M واقع است. از روی ویژگی معلوم تابع پیوسته [۸۲]، در $[a, b]$، چنان نقطهٔ ξ^* پیدا می‌شود که $\mu=f''(\xi^*)$ و بالاخره

$$\rho=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi^*) \qquad (۱۲)$$

یادداشت. طبیعی است که می‌شد، با بسط تابع $f(x)$ برحسب توان‌های $x-\frac{a+b}{2}$، بسط را درتوان اول این دوجمله‌ای قطع کرد، یعنی از رابطهٔ

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(\tilde{\xi})$$

استفاده کرد، ازاین‌جا، به‌برابری زیرمی‌رسیم:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\int_a^b f'(\tilde{\xi})\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

به‌طوری‌که، جملهٔ متمم، باانتگرال زیر، که‌فقط شامل مشتق‌اول $f'(x)$ است، بیان‌می‌شود:

$$\rho=\int_a^b f'(\tilde{\xi})\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

ولی، دراین‌جا، عامل دوم عبارت زیر انتگرال، در بازهٔ $[a, b]$، تغییر علامت می‌دهد و کاربرد تعمیم قضیهٔ میانگین، برای ساده‌کردن عبارت ρ، عملی نیست. درحالی که، با یك جملهٔ دیگر ازبسط تیلور، با توجه به‌برابری (۱۱)، استفاده ازاین قضیه را ممکن‌می‌سازد.

حالا، اگر بازهٔ $[a, b]$ را، به n بخش برابر تقسیم کنیم، برای هر بازهٔ جزئی $[x_i, x_{i+1}]$، رابطهٔ دقیق زیررا خواهیم داشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,dx=\frac{b-a}{n}f(x_{i+\frac{1}{2}})+\frac{(b-a)^3}{24n^3}f''(\xi^*)\quad(x_i\leqslant\xi^*\leqslant x_{i+1})$$

اگر این برابری‌ها را (به‌ازای: $n=0, 1, \dots, n-1$) جمع کنیم، با علامت‌های ساده، به‌دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{n}(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\cdots+y_{n-\frac{1}{2}})+R_n$$

که در آن، عبارت

$$R_n=\frac{(b-a)^3}{24n^3}\cdot\frac{f''(\xi_0^*)+f''(\xi_1^*)+\cdots+f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

جملهٔ متمم رابطهٔ مستطیل‌ها ـ(۱)ـ می‌باشد از آن‌جا که عبارت

$$\frac{f''(\xi_0^*)+\cdots+f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

بین m و M قرار دارد و، درنتیجه، یکی از مقدارهای $f''(x)$ است، سرانجام، داریم:

$$R_n=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b)\qquad(۱۳)$$

که با ترقی n، این جملهٔ متمم، تقریباً مثل $\frac{1}{n^2}$، نزول می‌کند.*

به‌عنوان نمونه، به‌محاسبهٔ انتگرال $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ ـ که در **۳۲۲** آوردیم، بازمی‌گردیم.

برای تابع زیرانتگرال $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ داریم: $f''(x)=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^2}$. این مشتق، در بازهٔ $[0, 1]$، علامت عوض می‌کند، ولی از لحاظ قدرمطلق، کمتر از ۲ می‌ماند. از این‌جا، بنابررابطهٔ (۱۳): $|R_{10}|<0/85.10^{-3}$. عرض‌ها را تا چهاررقم اعشار، با تقریب $0/00005$ حساب کرده‌ایم. این برآورد خطا را، از روی گردکردن عرض‌ها، به‌دست آورده‌ایم، ولی می‌توان به‌سادگی متوجه شد که: خطای واقعی کمتر ازاین مرزاست.

۳۲۶. جملهٔ متمم رابطهٔ ذوزنقه‌ها. به‌رابطهٔ (۶)، باهمان فرض‌هایی که برای تابع $f(x)$ داشتیم، توجه می‌کنیم. بااستفاده از رابطهٔ واسطه‌یابی لاگرانژ یاجملهٔ متمم [**۱۲۹**، (۷)]، می‌توانیم بنویسیم [(۵) را ببینید]:

---

*) به‌این دلیل می‌گوییم تقریباً، که ξ هم، با تغییر n می‌تواند تغییر کند. این مطلب را، باید بعد از این هم، به‌خاطر داشت.

$$f(x)=P_1(x)+\frac{1}{2}f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b)\quad(a<\tilde{\eta}<b)$$

اگر ازاین رابطه، در فاصلهٔ از a تا b، انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\frac{f(a)-f(b)}{2}+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b)\,dx$$

به‌طوری‌که، جملهٔ متمم رابطهٔ (۶)، چنین می‌شود:

$$\rho=\frac{1}{2}\int_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b)\,dx$$

اگر بحث را، مثل قبل، ادامه دهیم، با توجه به‌این‌که، دراین‌جا هم، عامل دوم تابع زیر انتگرال، تغییر علامت نمی‌دهد، داریم:

$$\rho=\frac{1}{2}f''(\eta^*)\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta^*)\quad(a\leqslant\eta^*\leqslant b)$$

و سرانجام، برای حالتی‌که بازه را به n بخش برابر تقسیم‌کرده باشیم:

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta)\qquad(a\leqslant\eta\leqslant b)\qquad(۱۴)$$

واین، همان جملهٔ متمم، برای رابطهٔ ذوزنقه‌های (۲) است. وقتی‌که n صعودی باشد، این جملهٔ متمم هم، مانند $\frac{1}{n^2}$ نزول می‌کند. می‌بینیم‌که خطای مربوط به‌رابطهٔ ذوزنقه‌ها،ازهمان مرتبهٔ خطای مربوط به‌رابطهٔ مستطیل‌هاست.

۳۲۷. جملهٔ متمم رابطهٔ سیمپسون. بالاخره، به رابطهٔ (۸) می‌رسیم. می‌توانستیم، شبیه بحث قبلی، دوباره رابطهٔ واسطه‌یابی لاگرانژ با جملهٔ متمم را [۱۲۹، (۷)]، مورد استفاده قرار دهیم وفرض‌کنیم [(۷) را ببینید]:

$$f(x)=P_2(x)+\frac{f'''(\tilde{\xi})}{3!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\quad(a<\tilde{\xi}<b)\qquad(۱۵)$$

ولی، دراین‌جا هم، با همان وضعی روبه‌رو هستیم‌که در شمارهٔ ۳۲۵ داشتیم (یادداشت‌را ببینید). ضمن انتگرال‌گیری از برابری (۱۵)، نمی‌توانیم عبارت انتگرالی برای جملهٔ متمم را، به‌کمک قضیهٔ مربوط به‌میانگین، ساده‌کنیم، زیرا عبارت به‌صورت $(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$، تابع‌زیرانتگرال، در بازهٔ $[a, b]$، تغییرعلامت می‌دهد.

به‌این مناسبت، به‌طریق دیگری عمل می‌کنیم.

عبارت

$$P_2(z)+K(z-a)\left(z-\frac{a+b}{2}\right)(z-b)$$

به‌ازای هرمقدار دلخواه K، درنقطه‌های a، $\frac{a+b}{2}$ و b، همان مقدارهای تابع $f(x)$ را دراین نقطه‌ها، اختیار می‌کند. عدد K را طوری انتخاب می‌کنیم تا مشتق این عبارت، به‌ازای $z=\frac{a+b}{2}$، برمشتق $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ منطبق باشد. به‌این ترتیب، به‌ازای این مقدار K، این عبارت، چیزی جز چندجمله‌ای واسطه‌یابی هرمیت [۱۳۰]، نظیر گره‌های سادهٔ a و b و گره مضاعف $\frac{a+b}{2}$ نیست. بااستفاده ازرابطهٔ‌هرمیت بـاجملهٔ متمم [۱۳۰، (۱۱)] ـ با فرض وجود مشتق‌های متوالی تاخود مرتبهٔ چهارم تابع $f(x)$ـ نتیجه می‌گیریم:

$$f(x)=P_2(x)+K(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)+$$

$$+\frac{f^{(4)}(\tilde{\xi})}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\quad(a<\tilde{\xi}<b)$$

حالا، ازاین برابری، در فاصلهٔ از a تا b، انتگرال می‌گیریم، نتیجه‌می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]+$$

$$+\frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(\tilde{\xi})(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx$$

زیرا

$$\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx=$$

$$=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(b-a)^2}{4}\right]dx=0$$

اگرمشتق $f^{(4)}(x)$، پیوسته فرض شود، مثل حالت قبل، جملهٔ متمم رابطهٔ (۸)، یعنی

$$\rho=\frac{۱}{۲۴}\int_a^b f^{(۴)}(\xi)(x-a)\left(x-\frac{a+b}{۲}\right)^۲(x-b)\,dx$$

را، با استفاده از این‌که، عامل دوم در عبارت زیر انتگرال تغییر علامت نمی‌دهد، می‌توان به این‌صورت درآورد:

$$\rho=\frac{۱}{۲۴}f^{(۴)}(\xi^*)\int_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{۲}\right)^۲(x-b)dx=$$

$$=\frac{۱}{۲۴}f^{(۴)}(\xi^*)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{۲}\right)^۲\left[\left(x-\frac{a+b}{۲}\right)^۲-\frac{(b-a)^۲}{۴}\right]dx=$$

$$=-\frac{(b-a)^۵}{۱۸۰\cdot۲^۴}f^{(۴)}(\xi^*)^*$$

و اگر بازهٔ $[a, b]$، به n بخش برابر، تقسیم شده باشد، آن وقت، برای رابطهٔ سیمپسون (۱۰)، جملهٔ متممی به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$R_n=-\frac{(b-a)^۵}{۱۸۰(۲n)^۴}f^{(۴)}(\xi)\qquad(a\leqslant\xi\leqslant b)\qquad(۱۶)$$

با ترقی n، این عبارت، تقریباً مثل $\frac{۱}{n^۴}$ تنزل می‌کند. به‌این‌ترتیب، رابطهٔ سیمپسون، حقیقتاً، مناسب‌تر از دو رابطهٔ قبلی است.

باز هم، به‌همان مثال $\int_۰^۱\frac{dx}{۱+x^۲}$ مراجعه می‌کنیم. توجه کنیم که تابع $f(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$، خود مشتق تابع $y=\operatorname{arc}tgx$ است، به‌طوری‌که، می‌توانیم از رابطهٔ آمادهٔ ۱۱۶، ۸) استفاده کنیم. طبق این رابطه

$$f^{(۴)}(x)=y^{(۵)}=۲۴\cos^۵y\sin۵\left(y+\frac{\pi}{۲}\right)=۲۴\cos^۵y\cos۵y$$

---

*) اگر $f(x)$، چند جمله‌ای باشد که درجهٔ آن از سه تجاوز نکند، معلوم است که ρ برابر صفر می‌شود. به‌این‌معنا، برای چنین چندجمله‌ای، رابطهٔ (۸)، دقیق خواهد بود (این را، به‌سادگی مستقیماً هم می‌توان فهمید).

این عبارت، ازلحاظ قدرمطلق، از ۲۴ تجاوزنمی‌کند، به‌نحوی‌که با توجه به‌رابطهٔ (۱۶) داریم:

$$|R_۲| < \frac{۱}{۱۹۲۰} < ۰/۰۰۰۶$$

به‌طوری‌که می‌بینیم، خطای واقعی، به‌طور قابل ملاحظه‌ای، از این مقدار کمتر است.

یادداشت. دراین مثال دیده می‌شود که، مرزخطایی‌که به‌وسیلهٔ رابطهٔ ما به‌دست‌آمد، به‌هیچ وجه، جور نیست. با کمال تأسف، برخورد به‌چنین نارسائی‌های عملی، در مورد رابطه‌های مفروض، به‌کرات پیش می‌آید.

با وجوداین، به‌کمك همین رابطه‌هاست‌که می‌توانیم خطای حاصل‌از محاسبهٔ‌تقریبی انتگرال‌های معین را برآوردکنیم. به‌مثال‌ها توجه‌کنید.

۳۲۸. مثال‌ها. ۱) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int_۱^۲ \frac{dx}{x} = \ln ۲$، تا ۰/۰۰۱ تقریب، با استفاده از رابطهٔ مستطیل‌ها.

چون برای تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ داریم: $۰ < f''(x) = \frac{۲}{x^۳} \leqslant ۲ \quad (۱ \leqslant x \leqslant ۲$ باشرط$)$،

با توجه به‌رابطهٔ (۱۳):

$$۰ < R_n < \frac{۱}{۱۲n^۲}$$

اگر $n = ۱۰$ بگیریم، جملهٔ متمم رابطهٔ ما، چنین می‌شود:

$$R_{۱۰} < \frac{۱}{۱۲۰۰} < ۰/۸۴ \times ۱۰^{-۳}$$

با گردکردن مقدار تابع، بازهم خطایی پیش می‌آید، باید توجه داشته باشیم‌که مرز این خطای جدید، از $۰/۱۶ \times ۱۰^{-۳}$ کمتر باشد. برای این‌منظور، کافی‌است مقدارهای‌تابع $\frac{۱}{x}$ را تا چهار رقم اعشار، یعنی تا ۰/۰۰۰۰۵ تقریب، محاسبه‌کنیم. داریم:

$$x_{\frac{1}{2}}=۱/۰۵ \quad y_{\frac{1}{2}}=۰/۹۵۲۴$$

$$x_{\frac{3}{2}}=۱/۱۵ \quad y_{\frac{3}{2}}=۰/۸۶۹۶$$

$$x_{\frac{5}{2}}=۱/۲۵ \quad y_{\frac{5}{2}}=۰/۸$$

$$x_{\frac{7}{2}}=۱/۳۵ \quad y_{\frac{7}{2}}=۰/۷۴۰۷$$

$$x_{\frac{9}{2}}=۱/۴۵ \quad y_{\frac{9}{2}}=۰/۶۸۹۷$$

$$x_{\frac{11}{2}}=۱/۵۵ \quad y_{\frac{11}{2}}=۰/۶۴۵۲$$

$$\frac{۶/۹۲۸۴}{۱۰}=۰/۶۹۲۸۴$$

$$x_{\frac{13}{2}}=۱/۶۵ \quad y_{\frac{13}{2}}=۰/۶۰۶۱$$

$$x_{\frac{15}{2}}=۱/۷۵ \quad y_{\frac{15}{2}}=۰/۵۷۱۴$$

$$x_{\frac{17}{2}}=۱/۸۵ \quad y_{\frac{17}{2}}=۰/۵۴۰۵$$

$$x_{\frac{19}{2}}=۱/۹۵ \quad y_{\frac{19}{2}}=۰/۵۱۲۸$$

۶/۹۲۸۴ : مجموع

با توجه به‌این که مقدار اصلاح برای هر عرض (و در نتیجه، برای واسطهٔ حسابی آن‌ها)، بین $\pm ۰/۰۰۰۰۵$ واقع است، و، همچنین، با توجه به‌برآورد جملهٔ متمم $R_{۱۰}$، معلوم می‌شود که $\ln ۲$، بین $۰/۶۹۲۸۴-۰/۰۰۰۰۵$ و $۰/۶۹۲۷۹=۰/۶۹۲۸۴+۰/۰۰۰۰۵+۰/۰۰۰۸۴$

$$۰/۶۹۳۷۳=۰/۶۹۲۸۴+۰/۰۰۰۰۵+۰/۰۰۰۸۴$$

و بنابراین، بین ۰/۶۹۲ و ۰/۶۹۴ قرارگرفته است. به‌این ترتیب:

$$\ln ۲=۰/۶۹۳\pm ۰/۰۰۱$$

۲) همین محاسبه را، از روی رابطهٔ ذوزنقه‌ها هم، انجام دهید.

در این حالت، بنابه رابطهٔ (۱۴):

$$R_n<۰; \quad |R_n|<\frac{۱}{۶n^۲}$$

در این‌جا هم، $n=۱۰$ را آزمایش می‌کنیم، با وجودی که، در این مورد داریم: $|R_{۱۰}|<\frac{۱}{۶۰۰}<۱/۷\times۱۰^{-۳}$. عرض‌ها (که با همان تقریب بالا محاسبه می‌شوند)، عبارت‌اند از:

$x_۰=۱/۰$ $y_۰=۱/۰۰۰۰$

$x_۱=۱/۱$ $y_۱=۰/۹۰۹۱$

$x_۲=۱/۲$ $y_۲=۰/۸۳۳۳$

$x_۳=۱/۳$ $y_۳=۰/۷۶۹۲$

$x_۴=۱/۴$ $y_۴=۰/۷۱۴۳$

$x_۵=۱/۵$ $y_۵=۰/۶۶۶۷$

$x_۶=۱/۶$ $y_۶=۰/۶۲۵۰$

$x_۷=۱/۷$ $y_۷=۰/۵۸۸۲$

$x_۸=۱/۸$ $y_۸=۰/۵۵۵۶$

$x_۹=۱/۹$ $y_۹=۰/۵۲۶۳$

$x_{۱۰}=۲/۰$ $y_{۱۰}=۰/۵۰۰۰$

مجموع: ۱/۵۰۰۰

مجموع: ۶/۱۸۷۷

$$\frac{۱}{۱۰}\left(\frac{۱/۵۰۰۰}{۲}+۶/۱۸۷۷\right)=۰/۶۹۳۷۷$$

با در نظر گرفتن همهٔ خطاهای احتمالی، $\ln ۲$، بین این عددها، قرار می‌گیرد:

$$۰/۶۹۲۰۲=۰/۶۹۳۷۷-۰/۰۰۰۵-۰/۰۰۱۷۰$$

و $$۰/۶۹۳۸۲=۰/۶۹۳۷۷+۰/۰۰۰۰۵$$

یعنی بین ۰/۶۹۲ و ۰/۶۹۴. بنابراین: $\ln ۲=۰/۶۹۳\pm۰/۰۰۱$.

۳) به‌کمک رابطهٔ سیمپسون. به‌کمک همان مقدارعرض‌ها، می‌توان به‌نتیجهٔ دقیق‌تری رسید، زیرا، مشتق چهارم تابع زیر انتگرال برابر $\frac{۲۴}{x^۵}$ است و، بنابراین، با توجه به‌رابطهٔ (۱۶):

$$R_n<۰ \quad و \quad |R_n|\leqslant\frac{۲۴}{۱۸۰(۲n)^۴}=\frac{۲}{۱۵(۲n)^۴}$$

به‌ازای $n=۵$ (دراین‌صورت، تعداد عرض‌ها، به‌اندازهٔ دوحالت قبل خواهدبود)، داریم: $|R_۵|<۱/۴\cdot۱۰^{-۵}$. محاسبه را با ۵ رقم، یعنی با تقریب ۰/۰۰۰۰۰۵، انجام می‌دهیم:

$x_1 = ۱/۱$	$y_{\frac{1}{2}} = ۰/۹۰۹۰۹$
$x_{\frac{3}{2}} = ۱/۳$	$y_{\frac{3}{2}} = ۰/۷۶۹۲۳$
$x_{\frac{5}{2}} = ۱/۵$	$y_{\frac{5}{2}} = ۰/۶۶۶۶۷$
$x_{\frac{7}{2}} = ۱/۷$	$y_{\frac{7}{2}} = ۰/۵۸۸۲۴$
$x_{\frac{9}{2}} = ۱/۹$	$y_{\frac{9}{2}} = ۰/۵۲۶۳۲$
	مجموع: ۳/۴۵۹۵۵
	× ۴
	۱۳/۸۳۸۲۰

$x_1 = ۱/۲$	$y_1 = ۰/۸۳۳۳۳$
$x_2 = ۱/۴$	$y_2 = ۰/۷۱۴۲۹$
$x_3 = ۱/۶$	$y_3 = ۰/۶۲۵۰۰$
$x_4 = ۱/۸$	$y_4 = ۰/۵۵۵۵۶$
	مجموع: ۲/۷۲۸۱۸
	× ۲
	۵/۴۵۶۳۶

$x_0 = ۱/۰$	$y_0 = ۱/۰۰۰۰۰$
$x_5 = ۲/۰$	$y_5 = ۰/۵۰۰۰۰$
	مجموع = ۱/۵۰۰۰۰

$$\frac{۱}{۳۰}(۱/۵۰۰۰۰ + ۵/۴۵۶۳۶ + ۱۳/۸۳۸۲۰) = ۰/۶۹۳۱۵۲$$

در نتیجه، $\ln ۲$، بین این مرزها قرار دارد:

$$۰/۶۹۳۱۳۳ = ۰/۶۹۳۱۵۲ - ۰/۰۰۰۰۰۵ - ۰/۰۰۰۰۱۴$$

و

$$۰/۶۹۳۱۵۷ = ۰/۶۹۳۱۵۲ + ۰/۰۰۰۰۰۵$$

به‌طوری‌که، مثلاً، می‌توان در نظر گرفت: $\ln ۲ = ۰/۶۹۳۱۵ \pm ۰/۰۰۰۰۲$.

در واقع، ... $\ln ۲ = ۰/۶۹۳۱۴۷۱۸$ و، بنابراین، خطای واقعی، کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۵ است. (با یادداشت آخر شمارهٔ قبل، مقایسه کنید).

۴) محاسبهٔ انتگرال کامل بیضوی نوع دوم*

$$E\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ x}\, dx$$

*) پاورقی شمارهٔ ۳۱۵ (صفحهٔ ۹۴۴) را ببینید.

را، با دقت تا ۰/۰۰۱ تقریب، از روی رابطهٔ سیمپسون، مطرح می کنیم.

برای تابع $f(x)=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}$، ضمن تغییر از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$، داریم: $|f^{(4)}|<12$*.

بنابراین [(۱۶) را ببینید]، با توجه به‌این‌که $\left(\frac{\pi}{2}\right)^5<10$:

$$|R_n|<\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180(2n)^4}\cdot 2<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(2n)^4}$$

$n=3$ می گیریم، به‌طوری‌که $|R_3|<0/00052$. آن‌وقت

$x_0=0(0^\circ)$ $\quad y_0=1/0000$

$x_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}(15^\circ)$ $\quad 4y_{\frac{1}{2}}=\sqrt{12+\sqrt{12}}=3/9324$

$x_1=\frac{\pi}{6}(30^\circ)$ $\quad 2y_1=\frac{\sqrt{14}}{2}=1/8708$

$x_{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{4}(45^\circ)$ $\quad 4y_{\frac{3}{2}}=\sqrt{12}=3/4641$ $\quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{15/4771}{18}=1/35063$

$x_2=\frac{\pi}{3}(60^\circ)$ $\quad 2y_2=\frac{\sqrt{10}}{2}=1/5811$

$x_{\frac{5}{2}}=\frac{5\pi}{12}(75^\circ)$ $\quad 4y_{\frac{5}{2}}=\sqrt{12-\sqrt{12}}=2/9216$

$x_3=\frac{\pi}{2}(90^\circ)$ $\quad y_3=\frac{\sqrt{2}}{2}=0/7071$

مجموع : $15/4771$

به‌نتیجهٔ حاصل، باید، علاوه بر خطای ناشی از R_3، خطای (غیرمنفی) ناشی از گرد کردن را هم، که از $\frac{0/00030\pi}{36}<0/00003$، اضافه کرد. به‌این‌ترتیب:

---

*) معلوم است که $y=f(x)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$، از اتحاد $y^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 x$، مشتق می گیریم. به سادگی می‌توان قدر مطلق مقدار مشتق‌های y'، y''، y''' و $y^{(4)}$ را از بالا برآورد کرد.

$$۱/۳۵۰۱۱ < E\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) < ۱/۳۵۱۱۸$$

و می‌توان نوشت: $E\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = ۱/۳۵۱ \pm ۰/۰۰۱$ (در واقع، همهٔ رقم‌های حاصل، درست هستند).

۵) انتگرال

$$W = \int_{۰}^{۱} e^{-x^۲} dx$$

را، با تقریب ۰/۰۰۰۱، به‌کمك رابطهٔ سیمپسون، محاسبه کنید.

اگر مشتق چهارم تابع زیر انتگرال را به‌دست آوریم، مستقیماً معلوم می‌شود که مقدار آن، از لحاظ قدر مطلق، از ۱۲، تجاوز نمی‌کند. بنابراین

$$|R_n| \leqslant \frac{۱۲}{۱۸۰(۲n)^۴}$$

کافی است $n = ۵$ بگیریم، زیرا دراین‌صورت $|R_۵| < ۰/۷ \times ۱۰^{-۵}$، داریم:

$x_۰ = ۰/۰$	$y_۰ = ۱/۰۰۰۰۰$	$x_{\frac{۱}{۲}} = ۰/۱$	$y_{\frac{۱}{۲}} = ۰/۹۹۰۰۵$
$x_۱ = ۰/۲$	$y_۱ = ۰/۹۶۰۷۹$	$x_{\frac{۳}{۲}} = ۰/۳$	$y_{\frac{۳}{۲}} = ۰/۹۱۳۹۳$
$x_۲ = ۰/۴$	$y_۲ = ۰/۸۵۲۱۴$	$x_{\frac{۵}{۲}} = ۰/۵$	$y_{\frac{۵}{۲}} = ۰/۷۷۶۸۰$
$x_۳ = ۰/۶$	$y_۳ = ۰/۶۹۷۶۸$	$x_{\frac{۷}{۲}} = ۰/۷$	$y_{\frac{۷}{۲}} = ۰/۶۱۲۶۳$
$x_۴ = ۰/۸$	$y_۴ = ۰/۵۲۷۲۹$	$x_{\frac{۹}{۲}} = ۰/۹$	$y_{\frac{۹}{۲}} = ۰/۴۴۴۸۶$
	مجموع: ۳/۰۳۷۹۰		مجموع: ۳/۷۴۰۲۷
	× ۲		× ۴
	۶/۰۷۵۸۰		۱۴/۹۶۱۰۸
$x_۵ = ۱/۰$	$y_۵ = ۰/۳۶۷۸۸$		
	مجموع: ۱/۳۶۷۸۸		

$$= \frac{۱/۳۶۷۸۸ + ۶/۰۷۵۸۰ + ۱۴/۹۶۱۰۸}{۳۰}$$

$$= ۰/۷۴۶۸۲۵$$

$$۰/۷۴۶۸۱۳ < W < ۰/۷۴۶۸۳۷$$

$$W = ۰/۷۴۶۸ \pm ۰/۰۰۰۰۵$$

(در این‌جا هم، هر شش رقم حاصل، درست‌اند).

۶) این انتگرال را محاسبه کنید:

$$G = \int_{۰}^{۱} \frac{\text{arc } tg x}{x} dx$$

[با ۳۱۴، ۶) مقایسه کنید]. از روی رابطهٔ سیمپسون، به‌ازای $n = ۵$، تا رقم پنجم اعشار، محاسبه می کنیم:

$$y_۰ = ۱$$

$$y_{\frac{۱}{۲}} = ۰/۹۹۶۶۸$$

$$y_۱ = ۰/۹۸۶۹۸$$

$$y_{\frac{۳}{۲}} = ۰/۹۷۱۵۲$$

$$y_۲ = ۰/۹۵۱۲۷$$

$$y_{\frac{۵}{۲}} = ۰/۹۲۷۳۰$$

$$y_۳ = ۰/۹۰۰۷۰$$

$$y_{\frac{۷}{۲}} = ۰/۸۷۲۴۶$$

$$y_۴ = ۰/۸۴۳۴۳$$

$$y_{\frac{۹}{۲}} = ۰/۸۱۴۲۴$$

$$y_۵ = ۰/۷۸۵۴۰$$

مجموع: ۱/۷۸۵۴۰

مجموع: ۳/۶۸۲۳۸ × ۲ = ۷/۳۶۴۷۶

مجموع: ۴/۵۸۲۲۰ × ۴ = ۱۸/۳۲۸۸۰

$$= \frac{۱/۷۸۵۴۰ + ۷/۳۶۴۷۶ + ۱۸/۳۲۸۸۰}{۳۰} = ۰/۹۱۵۹۶۵$$

در نتیجهٔ حاصل، همهٔ رقم‌ها، درست هستند. برآورد خطا، از روی رابطهٔ (۱۶)را، به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم.

مقدار G را، گاهی، ثابت کاتالان (E. Catalan) می‌نامند؛ [۲۴۰، ۶)، (a) را نیز ببینید].

یادداشت. جالب بودن سه مثال اخیر، از آن‌جهت است که، تابع اولیه‌های نظیر، به‌صورت‌متناهی، قابل بیان نیستند، به‌طوری که نمی‌توانستیم، از آن‌ها، برای‌محاسبهٔ انتگرال معین استفاده کرد.

برعکس، اگر این‌تابع اولیه‌ها را، به‌صورت انتگرال‌های معین، با حدبالائی‌متغیر،

در نظر بگیریم، آن‌وقت، می‌توان، مقداری از این انتگرال‌ها را، که متناظر با مقدارهای حد بالائی هستند، به‌دست آورد. به‌این ترتیب، به‌طور اصولی، این امکان پیدا می‌شود که برای تابع‌هایی که، تنها عبارت انتگرالی آن‌ها داده شده است، از نوع جدول‌هایی که برای تابع‌های مقدماتی می‌دانیم، تشکیل دهیم.

از همین راه می‌توان، برای همین گونه تابع‌ها، عبارت‌های تقریبی به‌دست آورد.

MATH75.IR

فصل دهم

کاربرد محاسبهٔ انتگرالی در هندسه، مکانیک و فیزیک

§۱. طول منحنی

۳۲۹. محاسبهٔ طول منحنی. منحنی پیوسته وسادهٔ $\overset{\frown}{AB}$ را، برصفحه، با معادلهٔ پارامتری

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant T) \tag{۱}$$

درنظر می‌گیریم. در جلد اول [۲۴۷]، مفهوم طول منحنی را، به‌عنوان مرز بالای S از محیطهای خطهای شکسته‌ای که درمنحنی محاط شده‌اند، تعریف کردیم:

$$S=\sup\{p\} \tag{۲}$$

اگر تابع (۱) را، دارای مشتق‌های پیوسته درنظر بگیریم، ثابت کردیم [۲۴۸] که، منحنی راستاپذیر است، یعنی، طول منحنی، متناهی است. علاوه برآن، اگر کمان متغیر $\overset{\frown}{AM}$ را درنظربگیریم، که درآن، M نقطهٔ دلخواهی از منحنی ونظیرمقدار پارامتر t باشد، ثابت کرده بودیم که طول

$$\overset{\frown}{AM}=s=s(t)$$

تابعی است مشتق‌پذیر از t، ومشتق آن، این‌طور بیان می‌شود:

$$s'(t)=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

ویا کوتاه‌تر

$$s'(t)=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2} \tag{۳}$$

[۲۴۸، (۱۰)] و، معلوم است، که $s'(t)$، پیوسته است.

با در اختیار داشتن مفهوم انتگرال، حالا می‌توانیم، به محاسبهٔ طول s، منحنی $\widehat{AB}$ بپردازیم. از روی رابطهٔ اصلی محاسبهٔ انتگرالی، فوراً، نتیجه می‌شود:

$$s(T)-s(t_0)=\int_{t_0}^{T} s'_t\,dt$$

یا

$$\widehat{AM}=S=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\int_{t_0}^{T}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \qquad (۴)$$

طول کمان متغیر AMـ که دربارهٔ آن، در بالا، صحبت کردیم ـ با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\widehat{AM}=s=s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt \qquad (۵)$$

ممکن‌است پیش آید که، برای نقطهٔ مبداء، در محاسبهٔ کمان‌ها، یك‌نقطهٔ دروني M_0 انتخاب شود. اگر t_0، مثل قبل، معرف ایـن نقطه باشد (دراین حالت، t_0، انتهای بـازهٔ تغییر t، نخواهد بـود)، آن وقت، روشن است که، رابطهٔ (۵)، مقدار کمان $\widehat{AM}$ را بـا علامت می‌دهد: اگر $t>t_0$ باشد (یعنی M درطرف مثبت M_0 قرارگیرد)، بـا علامت مثبت، و اگر $t<t_0$ باشد (یعنی نقطهٔ M درطرف منفی M_0 قرار گیرد)، با علامت منفی.

اگرمنحنی با معادلهٔ صریح، در مختصات قائم، داده شده باشد:

$$y=f(x)\ \ (x_0\leqslant x\leqslant X)$$

درآن صورت، می‌توان x را به‌عنوان پارامتر درنظرگرفت و از رابطهٔ (۴)، مانند حالت خاصی ازآن، نتیجه‌گرفت:

$$S=\int_{x_0}^{X}\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\int_{x_0}^{X}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad (۴a)$$

بالاخره، اگر معادلهٔ منحنی، به‌صورت قطبی داده شده باشد

$$r=g(\theta)\ \ (\theta_0\leqslant\theta\leqslant\Theta)$$

می‌توان آن را، به‌کمك دورابطهٔ

$$x=r\cos\theta=g(\theta)\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=g(\theta)\sin\theta$$

به‌صورت پارامتری درآورد، که θ، در آن، نقش پارامتر را به‌عهده دارد. دراین حالت

$$S=\int_{\theta_0}^{\Theta}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\,d\theta=\int_{\theta_0}^{\Theta}\sqrt{[g(\theta)]^2+[g'(\theta)]^2}\,d\theta \qquad (4b)$$

برای این دوحالت، به‌سادگی می‌توان، عبارت مقدار منحنی متغیر AM را نوشت. اگر M نظیر طول x، یا زاویهٔ قطبی θ باشد، داریم

$$\widehat{AM}=s=s(x)=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2_x}\,dx \qquad (5a)$$

یا

$$\widehat{AM}=s=s(\theta)=\int_{\theta_0}^{\Theta}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\,d\theta \qquad (5b)$$

۳۳۰. تعریف دیگری برای طول منحنی وروش دیگری برای محاسبهٔ آن. برای تعریف مفهوم طول منحنی ساده وپیوستهٔ (۱)، از برابری (۲)آغازمی‌کنیم. ثابت می‌کنیم که: درحالتی که منحنی بسته نباشد، طول S آن، نه‌تنها مرز بالای مجموعهٔ طول‌های $\{p\}$ـ خط شکستهٔ محاط در منحنیـ است، بلکه، به‌طور ساده، حد p است، وقتی‌که‌طول همهٔ ضلع‌های خط شکستهٔ (p) (یا دقیق‌تر طول λ^* بزرگترین این ضلع‌ها)، به‌سمت صفر میل کنند

$$S=\lim_{\lambda^*\to 0} p \qquad (6)$$

ضمناً، بهتراست ازاین مقدارهای پارامتر t

$$t_0<t_1<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_n=T \qquad (7)$$

آغازکنیم، که معرف موضع راس‌های خط شکسته برمنحنی هستند؛ و فرض‌کنیم که همهٔ نموهای $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$ (یادقیق‌تر، بزرگترین آن‌ها $\lambda=\max \Delta t_i$)، به‌سمت صفرمیل کنند. دو پیش قضیهٔ شمارهٔ **۲۴۵**، هم‌ارزی دوروند حدی را مشخص می‌کنند. بنابراین، باید رابطهٔ حدی زیررا ثابت‌کنیم:

$$S=\lim_{\lambda\to 0} p \qquad (6^*)$$

ابتدا، به‌این ویژگی مهم محیط p توجه می‌کنیم. اگراین محیط، نظیر ترتیبی مثل (۷)، از تقسیم بازهٔ $[t_0, T]$ باشد و، سپس، نقطهٔ تقسیم دیگری مثل $\bar{t}$ را با شرط

$$t_k<\bar{t}<t_{k+1}$$

درنظر بگیریم، آن‌گاه، محیط p، تنها می‌تواند بزرگتر شود و، ضمناً، اضافهٔ آن، از دو برابر مجموع نوسان‌های تابع‌های $\varphi(t)$ و $\psi(t)$، در بازهٔ $[t_k, t_{k+1}]$، تجاوز نمی‌کند. درواقع، با اضافه شدن نقطهٔ جدید $\bar{t}$، تنها یك‌جمله (طول یك ضلع)، در مجموع p تغییر می‌کند، یعنی جملهٔ

$$\sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2+[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)]^2} \qquad (8)$$

و به‌مجموع دو جمله (یعنی، طول دوضلع) زیر، تبدیل می‌شود:

$$\sqrt{[\varphi(\bar{t})-\varphi(t_k)]^2+[\psi(\bar{t})-\psi(t_k)]^2}+$$
$$+\sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(\bar{t})]^2+[\psi(t_{k+1})-\varphi(\bar{t})]^2} \qquad (9)$$

که در هرحال، ازجملهٔ (8)، کمتر نیست.

ازطرف دیگر، هرمجموع (9)، ازمجموع زیر تجاوز نمی‌کند:

$$|\varphi(\bar{t})-\varphi(t_k)|+|\psi(\bar{t})-\psi(t_k)|+$$
$$|\varphi(t_{k+1})-\varphi(\bar{t})|+|\psi(t_{k+1})-\psi(\bar{t})|$$

بنابراین، محیط p، بزرگتر می‌شود و، درعین‌حال، ازاین عدد تجاوز نمی‌کند، یعنی، این اضافه، از دو برابر مجموع نوسان‌های یاد شده، کوچکتر است.

در بحث‌های بعدی، به‌حالتی‌که S متناهی باشد، اکتفا می‌کنیم. برای عدد به قدر دلخواه کوچك $\varepsilon>0$، طبق تعریف مرز بالا، می‌توان، چنان تقسیمی از بازهٔ $[t_0, T]$ به‌وسیلهٔ نقطه‌های

$$t_0^*=t_0<t_1^*<t_2^*<\cdots<t_m^*=T \qquad (10)$$

پیدا کرد، که برای محیط متناظر آن، p^*، نابرابری زیررا داشته باشیم:

$$p^*>S-\frac{\varepsilon}{2} \qquad (11)$$

با توجه به‌پیوستگی یکنواخت تابع‌های $\varphi(t)$ و $\psi(t)$، عدد به‌قدر کافی کوچك $\delta>0$ وجود دارد که

$$|\varphi(t'')-\varphi(t')|<\frac{\varepsilon}{8m}, \quad |\psi(t'')-\psi(t')|<\frac{\varepsilon}{8m}$$

تنها وقتی برقرار باشند که داشته باشیم: $|t''-t'|<\delta$. بازهٔ $[t_0, T]$ را هم، با نقطه‌های (۷)، تنها با شرط $\lambda<\delta$ (یعنی همهٔ $\Delta x_i<\delta$)، به‌بخش‌ها، تقسیم می‌کنیم و مجموع نظیر را، تشکیل می‌دهیم:

حالا، نوع سومی از تقسیم بازهٔ $[t_0, T]$ را، به‌بخش‌ها، درنظر می‌گیریم. نقطه‌های تقسیم این نوع، عبارتند از: هم نقطه‌های t_i از (۷) و هم نقطه‌های t_k^* از (۱۰)؛ ومحیط نظیر آن را، p_0 می‌نامیم. چون، این تقسیم، از(۱۰) وبا اضافه‌کردن نقطه‌های جدیدحاصل شده است، باید داشته باشیم:

$$p_0 \geqslant p^* \qquad (۱۲)$$

ازطرف دیگر، همین تقسیم، از (۷) وبااضافه شدن نقطه‌های t_k^* به‌دست‌آمده است. با اضافه‌کردن هرنقطهٔ t_k^*، مقداری به p اضافه می‌شود که از دوبرابرمجموع نوسان‌های نظیر تابع‌های $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ بیشتر نیست، یعنی از $\frac{\varepsilon}{2m}$ کمتراست. ازآن‌جاکه، این‌روند، کمتر از mبار، تکرار می‌شود، p_0 به‌اندازه‌ای کمتر از $\frac{\varepsilon}{2}$، از p بیشترمی‌شود:

$$p_0<p+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (۱۳)$$

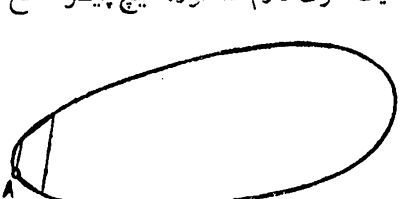
از نابرابری‌های (۱۳)، (۱۲) و (۱۱)، نتیجه می‌شود:

$$p>S-\varepsilon$$

به‌نحوی که‌داریم: $0<S-p<\varepsilon$، ازاین‌جا، حکم (*۶) و، درنتیجه، (۶) ثابت‌می‌شود.

ازآن‌جاکه، می‌توان برعکس، از (۶)، رابطهٔ(۲) را نتیجه گرفت، بنابراین، برابری (۶) را، می‌توان، همچون تعریف جدید طول منحنی ــ که با تعریف قبلی هم‌ارز است ــ نتیجه گرفت.

یادداشت. بدون‌هیچ‌زحمتی، می‌توان‌فهمیدکه، درحالت بسته‌بودن منحنی؛ نمی‌توان این‌تعریف را، بدون قید، پذیرفت. حتی با رعایت شرط لازم مذکور، هیچ‌چیز مانع از آن نیست که خط‌شکسته را به‌سمت‌یك‌نقطه بکشاند ومحیط آن‌را، به‌سمت‌صفرمیل دهد (شکل ۸). واقع امراین است‌که، در منحنی باز، تنها نزول همهٔ حلقه‌های خط شکستهٔ p تاصفر، اتصال تنگاتنگ آن‌ها را، برکمان‌های



شکل ۸

جزئی‌نظیر، تأمین‌می‌کند و، به همین مناسبت طبیعی است که حد محیط p آن، برابر با طول کمان مربوط باشد. درحالت منحنی بسته، این کیفیت وجود ندارد.

[توجه کنیم که، اگر به‌جای این‌که همهٔ ضلع‌های خط شکسته را به‌سمت صفر میل دهیم، قطرهای کمان‌های مربوط را به‌سمت صفر میل دهیم، درآن صورت، تعریف جدید، هم برای منحنی‌های باز وهم برای منحنی‌های بسته، درست خواهد بود.]

حالا ببینیم، چگونه می‌توان، از تعریف (۶)ـ ویا شبیه آن (*۶)ـ عبارت (۴) را، برای طول S منحنی، مستقیماً، به‌دست آورد. از عبارت آماده، برای محیط p خط‌شکسته، آغاز می‌کنیم [۲۴۸، (۷) را ببینید]:

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\overline{\tau}_i)]^2}\cdot\Delta t_i$$

که درآن، τ_i و $\overline{\tau}_i$، مقدارهایی از t، در بازهٔ $[t_i, t_{i+1}]$ هستند.

اگر درجملهٔ دوم زیر رادیکال، همه‌جا، $\overline{\tau}_i$ را به τ_i تبدیل کنیم، درآن صورت، عبارت تبدیل شدهٔ

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\cdot\Delta t_i$$

همان مجموع انتگرالی، برای انتگرال (۴) می‌شود. اگر λ به‌سمت صفرمیل کند، حد این مجموع، همان انتگرال خواهد شد.* برای این‌که نشان دهیم، محیط p خط‌شکسته هم، به‌سمت همان حد میل می‌کند، کافی است ثابت کنیم که تفاضل $p-\sigma$، به‌سمت صفر میل می‌کند.

برای این منظور، این تفاضل را برآورد می‌کنیم:

$$|p-\sigma|\leqslant\sum_i\left|\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\overline{\tau}_i)]^2}-\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2}\right|\cdot\Delta\tau_i$$

اگر نابرابری مقدماتی**

---

*) وجودآن، موجب هیچ تردیدی نمی‌شود، تابع زیرانتگرال، پیوسته است [۲۹۸، ۱].

**) درستی این نابرابری، برای $a=0$، روشن است. درحالت $a\neq 0$ هم، مستقیماً، از این اتحاد نتیجه می‌شود،

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}=\frac{b+b_1}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}\,(b-b_1)$$

زیرا، ضریب $(b-b_1)$، از لحاظ قدرمطلق، کمتر از واحد است.

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}\leqslant|b-b_1|$$

را درنظر بگیریم و آن را، درمورد هرجمله ازمجموع بالا، به‌طور جداگانه، به‌کاربریم، نتیجه می‌شود:

$$|p-\sigma|\leqslant\sum|\varphi'(\tau_i)-\psi'(\bar{\tau}_i)|\Delta t_i$$

باتوجه به‌پیوستگی تابع $\psi'(t)$، ازروی $\varepsilon>0$ دلخواه، می‌توان $\delta>0$ را، طوری پیداکرد که نابرابری $|\psi'(t)-\psi'(\bar{t})|<\varepsilon$، تنها وقتی برقرار باشدکه داشته باشیم: $|t-\bar{t}|<\delta$. اگر $\lambda<\delta$ اختیار شود (یعنی همهٔ $\Delta t_i<\delta$)، آن‌گاه $|\tau_i-\bar{\tau}_i|<\delta$، به‌طوری‌که $|\psi'(\tau_i)-\psi'(\bar{\tau}_i)|<\varepsilon$ و

$$|p-\sigma|\leqslant\varepsilon\sum_i\Delta t_i=\varepsilon(T-t_0)$$

واین، رابطهٔ (۴) را ثابت می‌کند.

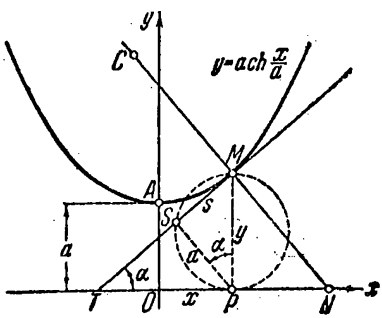
۳۳۱. مثال‌ها. ۱) منحنی زنجیری: $y=a\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ (شکل ۹).

در ۲۵۲، ۱) داشتیم:

$$\sqrt{1+y_x'^2}=\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

بنابررابطهٔ(5a)، اگررأس A ازمنحنی را، مبداء محاسبهٔ کمان درنظر بگیریم:

$$s=\overset{\frown}{AM}=\int_0^x\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}$$



شکل ۹

باتوجه به‌این‌که $\operatorname{tg}\alpha=y_x'=\operatorname{sh}\frac{x}{a}$،

داریم: $s=a\operatorname{tg}\alpha$. بنابراین، در مثلث MPS (شکل ۹) ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ $MS=a\operatorname{tg}\alpha$، ازنظر درازا، دقیقاً برابرکمان s است. به این ترتیب، از روی نمودار، روش ساده‌ای، برای راستاپذیری منحنی زنجیری به‌دست می‌آید.

۲) سهمی: $y=\frac{x^2}{2p}$.

اگر مبداء محاسبهٔ کمان‌ها را، راس $O(x=0)$ بگیریم، برای نقطهٔ غیرمشخص M به‌طول x، داریم:

$$s=\overset{\frown}{OM}=\frac{۱}{p}\int_{۰}^{x}\sqrt{x^{۲}+p^{۲}}\,dx=$$

$$=\frac{۱}{p}\left[\frac{۱}{۲}x\sqrt{x^{۲}+p^{۲}}+\frac{p^{۲}}{۲}\ln\left(x+\sqrt{x^{۲}+p^{۲}}\right)\right]\Bigg|_{۰}^{x}=$$

$$=\frac{x}{۲p}\sqrt{x^{۲}+p^{۲}}+\frac{p}{۲}\ln\frac{x+\sqrt{x^{۲}+p^{۲}}}{p}$$

۳) آستروئید: $x=a\cos^{۳}t$، $y=a\sin^{۳}t$.

با استفاده از مقدارهای x'_t و y'_t[۲۲۴، ۴)]، داریم:

$$\sqrt{x'^{۲}_t+y'^{۲}_t}=۳a\cos t\sin t\quad\left(\text{اگر }۰\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$$

طول یك‌چهارم منحنی آستروئید، بین نقطه‌های $A(a\,،\,۰)$ و $B(۰\,،\,a)$، از روی رابطهٔ (۴)، برابر است با

$$\overset{\frown}{AB}=۳a\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin t\cos t\,dt=\frac{۳a}{۲}\sin^{۲}t\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۳a}{۲}$$

به‌طوری‌که، طول تمامی منحنی، برابر با $۶a$ می‌شود.

۴) سیکلوئید: $x=a(t-\sin t)$، $y=a(۱-\cos t)$.

دراین‌جا (به‌ازای $۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$):

$$\sqrt{x'^{۲}_t+y'^{۲}_t}=a\sqrt{(۱-\cos t)^{۲}+\sin^{۲}t}=۲a\sin\frac{t}{۲}$$

طول یکی از شاخه‌های سیکلوئید، با توجه به‌رابطهٔ (۴)، چنین می‌شود:

$$۲a\int_{۰}^{۲\pi}\sin\frac{t}{۲}dt=-۴a\cos\frac{t}{۲}\Big|_{۰}^{۲\pi}=۸a\quad.$$

۵) گستردهٔ دایره: $x=a(t\sin t+\cos t)$، $y=a(\sin t-t\cos t)$.

داریم (به‌ازای $t>۰$):

$$\sqrt{x'^{۲}_t+y'^{۲}_t}=a\sqrt{(t\cos t)^{۲}+(t\sin t)^{۲}}=at$$

به‌نحوی‌که، کمان متغییر $\overset{\frown}{AM}$، از نقطهٔ $A(t=۰)$ تا نقطهٔ غیرمشخص $M(t>۰)$، این‌طور

بیان می‌شود:

$$\widehat{AM}=s=\frac{at^2}{2}$$

به‌ازای $t<0$، تنها باید درسمت راست رابطهٔ قبلی، علامت منفی گذاشت.

۶) پیچ ارشمیدس: $r=a\theta$.

با توجه به‌رابطهٔ (۵a)، برای محاسبهٔ کمان از قطب O تـا نقطهٔ دلخواه M (نظیر زاویهٔ θ)، داریم:

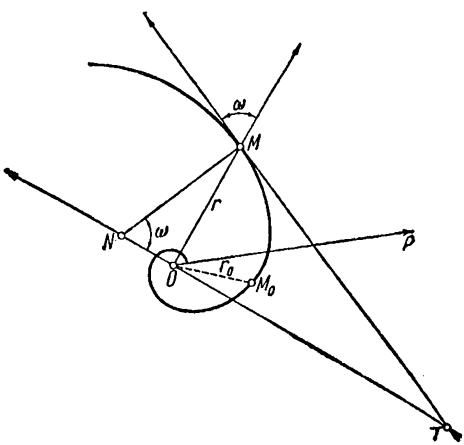
$$\widehat{OM}=a\int_0^{\theta}\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\frac{a}{2}[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})]$$

جالب است که اگر، دراین‌جا، $\theta=\frac{r}{a}$ بگیریم، به‌عبارتی می‌رسیم که از نظـر ظاهری، به‌عبارت مربوط به‌طول کمان سهمی، شباهت دارد [۲] را ببینید].

۷) پیچ لگاریتمی: $r=a\cdot e^{m\theta}$ (شکل ۱۰).

چون $r'_\theta=mr$، پس $r=\frac{1}{m}r'_\theta$ و بـرای کمان $\widehat{M_0M}$، بین دو نقطهٔ به‌مختصات (r_0,θ_0) و (r,θ)، از روی رابطهٔ (۵a) خواهیم داشت:

$$s=\widehat{M_0M}=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\,d\theta=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\int_{\theta_0}^{\theta}r'_\theta\,d\theta=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}(r-r_0)$$



شکل ۱۰

اگر به‌یاد بیاوریم که، برای پیچ لگاریتمی داریم: $tg\,\omega=\frac{1}{m}$، در آن صـورت، نتیجـهٔ حاصـل را می‌توان این‌طور نوشت:

$$r=\widehat{M_0M}=\frac{r-r_0}{\cos\omega}$$

اگـر نقطهٔ M_0 را به‌قطب M نزدیك کنیم، یعنی اگر r_0 را به‌سمت صفرمیل دهیم، ونتیجه را برای حـد کمان $\widehat{M_0M}$، یعنی $\widehat{OM}$ بنویسیم،

به‌عبارت بازهم ساده‌تری می‌رسیم:

$$A=\widehat{OM}=\frac{r}{\cos\omega}$$

به‌کمك این رابطه، از مثلث MOT (شکل را ببینید)، به‌سادگی، دیده می‌شود که، کمان s برابر است با قطعه مماس قطبی t_p:

$$\widehat{OM}=TM^{*}$$

و به‌این ترتیب، روش ساده‌ای، برای راستاپذیری منحنی، از روی نمودارآن، به‌دست می‌آید.

۸) بیضی: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

بهتراست، معادلهٔ بیضی را، به‌صورت پارامتری آن، $x=a\sin t$، $y=b\cos t$، در نظر بگیریم. معلوم است که

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}=$$
$$=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}$$

که در آن، $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$، خروج از مرکز بیضی است.

با محاسبهٔ طول کمان بیضی، از انتهای بالایی قطر کوچك، تا نقطهٔ دلخواهی از آن در ربع اول، داریم:

$$s=a\int_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt=aE(\varepsilon,t)$$

به‌این ترتیب، طول کمان بیضی، با انتگرال بیضوی نوع دوم بیان می‌شود [۲۹۳، ۳۰۵ را هم ببینید] و، همان‌طور که می‌دانیم، همین واقعیت، موجب نام‌گذاری «بیضوی» شده است.

---

*) این ویژگی پیچ لگاریتمی، اجازه می‌دهد، این گزاره را بیاوریم، وقتی‌که این منحنی، بدون لغزش، برخط MT می‌پیچد، آن‌گاه، قطب O (دراین‌جا، آن را بدون تغییر، وابسته به‌منحنی بایدگرفت)، یك خط را می‌پیماید. اثبات آن را، به‌خواننده وامی‌گذاریم.

به‌خصوص، طول یك چهارم محیط بیضی، با انتگرال بیضوی کامل زیر بیان می‌شود*:

$$a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^{2}\sin^{2}t}\,dt=aE(\varepsilon)$$

و طول تمامی محیط بیضی خواهد بود:

$$S=4aE(\varepsilon)$$

جالب است یادآوری کنیم که، طول یك موج سینوسوئید $y=c\sin\frac{x}{b}$، که در آن $c=\sqrt{a^{2}-b^{2}}$، درست، با همین نتیجه، به‌دست می‌آید. این انطباق، از نظر هندسی، به‌سادگی، قابل توضیح است. اگر سطح جانبی یك استوانهٔ مستدیر قائم را با صفحه‌ای که، نسبت به‌مولدهای آن مایل است، قطع کنیم، یك بیضی به دست می‌آید. اگر سطح استوانه‌ای را، روی‌مولدی‌که از رأس کوچکتر بیضی گذشته است، ببریم و آن‌را بگسترانیم، آن‌وقت، بیضی به‌سینوسوئید تبدیل می‌شود.

محاسبهٔ کمان هذلولی هم، به‌ترتیب مشابهی، منجر به‌انتگرال بیضوی (هر دونوع) می‌شود.

۹) حلزون: $r=a\cos\theta+b$.

در این‌جا $r_{\theta}=-a\sin\theta$ و

$$r^{2}+r_{\theta}'^{2}=a^{2}+2ab\cos\theta+b^{2}=(a+b)^{2}\left[1-\frac{4ab}{(a+b)^{2}}\sin^{2}\frac{\theta}{2}\right]$$

بنابراین (به‌ازای $a\neq b$)، برای‌طول کمان ازنقطهٔ نظیر $\theta=0$ تا نقطهٔ‌نظیر $\theta<\pi$دلخواه عبارت به‌صورت انتگرال بیضوی (نوع دوم) زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$s=(a+b)\int_{0}^{\theta}\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^{2}}\sin^{2}\frac{\theta}{2}}\,d\theta=$$

$$=2(a+b)\int_{0}^{\frac{\theta}{2}}\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^{2}}\sin^{2}t}\,dt=2(a+b)E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b},\frac{\theta}{2}\right)$$

طول تمامی منحنی، با انتگرال بیضوی کامل بیان می‌شود:

---

*) پاورقی مربوط به‌شمارهٔ ۳۱۵ (در صفحهٔ ۹۴۴) را ببینید.

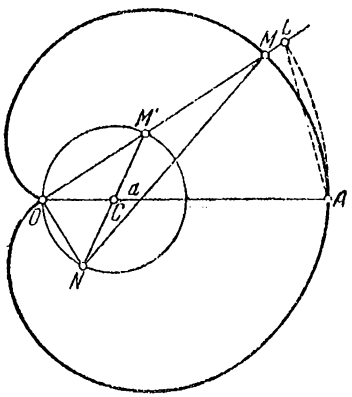
$$S=۴(a+b)\mathrm{E}\left(\frac{۲\sqrt{ab}}{a+b}\right)$$

ولی، درحالت خاص کاردیوئید $(b=a)$، کار به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. در این حالت

$$r^۲+r'^۲_\theta=۴a^۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}$$

به‌طوری که $(۰<\theta\leqslant\pi)$:

$$S=۲a\int_۰^\theta \cos\frac{\theta}{۲}d\theta=۴a\sin\frac{\theta}{۲}$$



شکل ۱۲

اگر (شکل ۱۱)، از قطب O به شعاع $۲a$، کمان $\overset{\frown}{AL}$ را تا نقطهٔ تقاطع آن با امتداد شعاع حامل OM رسم کنیم، در آن‌صورت، وتر AL، به‌روشنی، برابر کمان $\overset{\frown}{AM}$ خواهد بود.

طول کمان کاردیوئید، برابر است با $۸a$.

۱۰) لمینسکات: $r^۲=۲a^۲\cdot\cos۲\theta$.

طول کمانی از لمینسکات را، از رأس نظیر $\theta=۰$ تا نقطهٔ دلخواه با زاویهٔ قطبی $\theta<\frac{\pi}{۴}$، محاسبه می‌کنیم.

داریم:

$$rr'_\theta=-۲a^۲\sin۲\theta$$

از آن‌جا

$$r'_\theta=-\frac{۲a^۲\sin۲\theta}{r}$$

در چنین حالتی

$$\sqrt{r^۲+r'^۲_\theta}=\frac{۲a^۲}{r}=\frac{a\sqrt{۲}}{\sqrt{\cos۲\theta}}$$

و از روی رابطهٔ (۵b)

$$s=a\sqrt{۲}\int_{۰}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos ۲\theta}}=a\sqrt{۲}\int_{۰}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{۱-۲\sin^{۲}\theta}}$$

باز هم، به‌انتگرال بیضوی (نوع اول) می‌رسیم. چون، جدول‌هایی که برای انتگرال‌ها محاسبه شده‌اند، برای حالتی هستند که در آن، $k^{۲}$، ضریب $\sin^{۲}\theta$، کمتر از واحد است، متوسل به‌تغییرمتغیرمی‌شویم. فرض‌می‌کنیم: $۲\sin^{۲}\theta=\sin^{۲}\varphi$ (چون $\theta<\frac{\pi}{۴}$، $۲\sin^{۲}\theta<۱$ و، در نتیجه، زاویهٔ φ وجود دارد). آن‌وقت:

$$\sin\theta=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin\varphi,\qquad \cos\theta\,d\theta=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$d\theta=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\cdot\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}\varphi}},\qquad \sqrt{۱-۲\sin^{۲}\theta}=\cos\varphi$$

و بالاخره

$$s=a\int_{۰}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}\varphi}}=a\mathrm{K}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\varphi\right)$$

در حالت‌حدی*، با فرض $\theta=\frac{\pi}{۴}$ و $\varphi=\frac{\pi}{۲}$، برای‌طول یك‌چهارم لمینسکات، عبارتی برحسب انتگرال بیضوی کامل، به‌دست می‌آوریم:

$$s=a\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{d\varphi}{\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}\varphi}}=a\mathrm{K}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$$

طول تمامی لمینسکات $S=۴a\mathrm{K}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$ می‌شود.

---

*) لازم است، این حالت را، با عبور به‌حد در عبارت s، به‌ازای $\theta\to\frac{\pi}{۴}$ و $\varphi\to\frac{\pi}{۲}$ درنظر بگیریم؛ زیرا، به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{۴}$، مشتق r'_{θ} برابر ∞ می‌شودو در رابطهٔ (۵b) را، نمی‌توان، مستقیماً به‌کار برد.

قابل توجه‌است که‌مسألهٔ راستاپذیری کمان منحنی، غالباً، منجر به‌انتگرال‌های بیضوی می‌شود. /

۱۱) در پایان، به‌مسألهٔ استفاده از رابطه‌ها، برای‌محاسبهٔ طول کمان‌ها، ضمن‌ساختن گستردهٔ منحنی‌ها، می‌پردازیم [۲۵۶].

منحنی زنجیری را در نظر می‌گیریم. اگر مختصات جاری آن را، با ξ و η بنامیم (همان علامت‌گذاری شمارهٔ ۲۵۶)، وکمان آن‌را، که از رأس محاسبه می‌شود، با σ نشان دهیم، آن‌گاه، معادلهٔ منحنی، به‌این‌صورت نوشته می‌شود:

$$\eta = a \cdot \operatorname{ch}\frac{\xi}{a}$$

و کمان، با رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [(۱) را ببینید]:

$$\sigma = a \cdot \operatorname{sh}\frac{\xi}{a}$$

از این‌جا، می‌توان ξ و η را، مستقیماً، برحسب تابعی از σ بیان کرد:

$$\xi = a[\ln(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}) - \ln a], \quad \eta = \sqrt{\sigma^2 + a^2}$$

حالا، از روی رابطهٔ (۱۷) شمارهٔ ۲۵۶، و با به‌حساب آوردن این که در این‌جا [(۱۸) را ببینید].

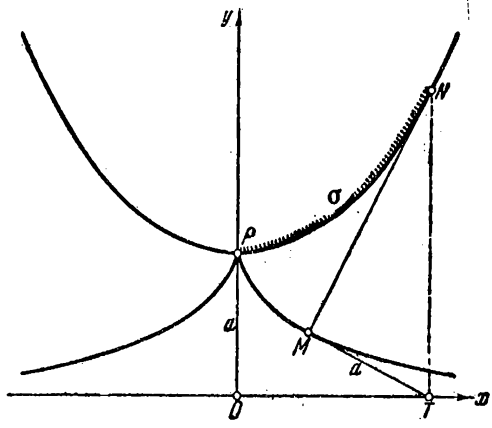
$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}, \quad \sin\beta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}$$

می‌توان معادله‌های پارامتری گستردهٔ دلخواهی را نوشت:

$$x = a[\ln(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}) - \ln a] + (c - \sigma)\frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}$$

$$y = \sqrt{\sigma^2 + a^2} + (c - \sigma)\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}$$

گستردهٔ‌ای را در نظر می‌گیریم که نظیر $c = 0$ است. این منحنی، از رأس منحنی زنجیری شروع می‌شود و روی آن، دارای نقطهٔ برگشت است (شکل ۱۲). اگر σ را حذف کنیم، می‌توان این‌منحنی را (که به تراکتریس موسوم است)، با تابع صریح هم بیان کرد:



شکل ۱۲

$$x=\pm\left[a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right]$$

اگر عبارت «قطعهٔ مماس» را، به‌خاطر بیاوریم [۲۳۰، (۴)]:

$$t=\left|\frac{y}{y'_x}\sqrt{1+y'^2_x}\right|=y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

آن‌وقت، به‌آسانی، به‌دست می‌آید که: $t=a$. و این، یکی‌از ویژگی‌های مهم تراکتریس است: پاره خطهای مماس، برای آن، مقداری است ثابت*.

این نتیجه را، مستقیماً و از ویژگی منحنی زنجیری هم می‌توان به‌دست آورد [راستاپذیری آن‌را در ۱)، شکل ۹، ببینید].

۳۳۲. معادلهٔ طبیعی منحنی مسطح. نمایش‌منحنی، به‌کمك معادله‌ای‌که بین مختصات نقطه‌های آن‌داده‌شده‌است (دریك‌دستگاه مختصات)، با وجود همهٔ‌مزیت‌هایی‌که دارد،غالباً، خصلت‌استثنائی‌دارد، زیرا، مختصات، عنصرهای‌هندسی واقعی منحنی‌نیستند. این‌عنصرهای واقعی، عبارتند از کمان منحنی s، که از نقطهٔ مبداء معینی و در جهت معینی، حساب شده باشد، و شعاع انحنا R یا خود انحنای. $k=\frac{1}{R}$ [۲۵۰ و ۲۵۱ را ببینید].

---

*) نام‌گذاری تراکتریس هم، از همین جاست [تراکتریس از فعل لاتینی trahere آمده است که به‌معنای کشیدن و جلب‌کردن است]. اگر نقطهٔ T، که روی خط افقی به‌کمك نخ TM حرکت می‌کند، به‌دنبال خود، نقطهٔ M را بکشد، در آن‌صورت، نقطهٔ اخیر، یك‌تراکتریس رسم می‌کند.

برای هر منحنی، می‌توان رابطه‌ای، بین این عنصرها، به‌صورت

$$F(s, R) = 0$$

برقرار کرد، که معادلهٔ طبیعی منحنی نامیده می‌شود*.

ثابت می‌کنیم که، اگرمنحنی‌هایی با یك‌معادلهٔ طبیعی داده شده‌باشند، تنها درموضع خود، ممکن است با یکدیگر متفاوت باشند، به‌طوری‌که، شکل منحنی، بامعادلهٔ طبیعی‌آن، به‌طور یك ارزشی، کاملاً معین می‌شود.

فرض کنیم، دومنحنی (I) و (II)، دارای یك معادلهٔ طبیعی، به‌صورت

$$\frac{1}{R} = g(s) \qquad (۱۴)$$

باشند. برای آن‌که هم‌نهشتی این دو منحنی را ثابت کنیم، ابتدا، یکی از منحنی‌ها را چنان جابه‌جا می‌کنیم، که نقطه‌هایی از دو منحنی، که برای محاسبهٔ کمان مورد استفاده قرارگرفته‌اند، برهم منطبق شوند. سپس، این منحنی را چنان می‌گردانیم که، جهت مثبت مماس‌ها، در این نقطه‌ها، منطبق برهم باشند.

یك مقدار s، از دو منحنی را با اندیس‌های ۱ و ۲ مشخص می‌کنیم:

مختصات نقطهٔ متغیر: (x_1, y_1) و (x_2, y_2)؛

زاویهٔ مماس با محور x: α_1 و α_2؛

شعاع انحنا: R_1 و R_1.

بنابه (۱۴)، برای هر s، خواهیم داشت: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$، یعنی [۲۵۰، (۲)]:

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{d\alpha_2}{ds} \qquad (۱۵)$$

علاوه بر آن، طبق شرط، به‌ازای $s = 0$:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \qquad (۱۶)$$

و

$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad (۱۷)$$

*) آن چه را که، در این‌جا، معادلهٔ طبیعی نامیده‌ایم، در زبان آلمانی «natürliche Gleichung» (یعنی «معادلهٔ طبیعی») و در زبان فرانسوی «équationr intrinséque» (یعنی «معادلهٔ درونی») می‌گویند.

از (۱۵)، بنابر نتیجهٔ شمارهٔ ۱۳۱، برمی‌آید که α_1 و α_2، تنها می‌توانند در مقدار ثابتی با هم فرق داشته باشند؛ ولی، همان‌طور که دیدیم، به‌ازای $s=0$، این مقدارها، یکی می‌شوند و، در نتیجه، برابری (۱۷)، همیشه برقرار است. در چنین حالتی، برای همهٔ مقدارهای s، خواهیم داشت [۲۴۹، (۱۵)]:

$$\frac{dx_1}{ds}=\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=\frac{dx_2}{ds},$$

$$\frac{dy_1}{ds}=\sin\alpha_1=\sin\alpha_2=\frac{dy_2}{ds}$$

از آن‌جا، به‌طرز مشابهی، نتیجه می‌گیریم که، برابری (۱۶) هم، همیشه برقرار است، یعنی دو منحنی، بر یکدیگر منطبق‌اند.

حالا، نشان می‌دهیم که، چگونه می‌توان از روی معادلهٔ طبیعی (۱۴) منحنی، نمایش مختصاتی آن‌را به‌دست آورد. قبل ازهمه، از(۱۴)داریم: $\frac{d\alpha}{ds}=g(s)$، به‌نحوی که

$$\alpha=\int_0^s g(s)ds+\alpha_0 \qquad (۱۸)$$

که در آن، α_0، مقداری است ثابت. سپس، با آغاز از برابری‌های

$$dx=\cos\alpha ds,\quad dy=\sin\alpha ds \qquad (۱۹)$$

با انتگرال گیری، به‌دست می‌آوریم:

$$x=\int_0^s \cos\alpha ds+x_0,\quad y=\int_0^s \sin\alpha ds+y_0 \qquad (۲۰)$$

که در آن‌ها، x_0 و y_0، ثابت‌های تازه‌ای هستند.

بدون هیچ اشکالی، فهمیده می‌شود که، اگر منحنی را دوران دهیم، مقدار ثابت α_0 تغییر می‌کند، و اگر منحنی را به‌موازات خود جابه‌جا کنیم، تغییر مقدارهای ثابت x_0 و y_0 را به‌دنبال دارد*. صفر شدن این‌مقدارهای ثابت، به‌معنای آن‌است که، منحنی درچنان وضعی است، که نقطهٔ مبداء برای محاسبهٔ کمان، روی مبداء مختصات قرار دارد و جهت مثبت مماس برآن، در جهت مثبت محور x قرار گرفته‌است.

---

*) اگر از همین نکته آغاز کنیم، می‌توان، اثبات دیگری برای حکم بالا پیدا کرد.

حالا، فرض می‌کنیم، معادلهٔ (۱۴)، به‌طور دلخواه داده شده باشد [تنها، $g(s)$ را پیوسته فرض می‌کنیم]. آن‌وقت، در وحلهٔ اول، با معین‌کردن α از روی رابطهٔ (۱۸) و، سپس، x و y از روی رابطه‌های (۲۰)، نمایش پارامتری منحنی را، به دست می‌آوریم. با دیفرانسیل گرفتن از (۲۰)، به (۱۹) باز می‌گردیم، از آن جـا، قبل از همه، ملاحظه می‌کنیم که

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

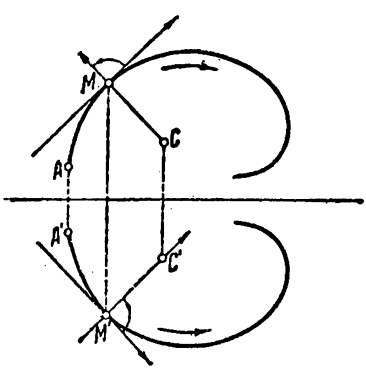
به‌طوری‌که، ds، حقیقتاً، دیفرانسیل کمان این منحنی، و s، کمان آن است (به‌شرطی که، نقطهٔ مبداء محاسبه، مناسب اختیار شده باشد). سپس، از همان معادلهٔ (۱۹) نتیجه می‌شود که، α عبارت است از زاویهٔ بین مماس برهمان منحنی و محور x. بالاخره، بادیفرانسیل‌گرفتن از (۱۸)، معلوم می‌شود که انحنا، برابر است با

$$\frac{d\alpha}{ds}=g(s)$$

و به‌این ترتیب، معادلهٔ (۱۴)، حقیقتاً، معادلهٔ طبیعی منحنی ما است. بنابراین، هر معادلـهٔ به‌صورت (۱۴)، که در آن تابع $g(s)$ پیوسته باشد، می‌تواند به‌عنوان معادلهٔ طبیعی یك منحنی در نظرگرفته شود.

این نکته را یادآوری می‌کنیم که، می‌توان انتخاب نقطهٔ مبداء و جهت محاسبهٔ کمان برمنحنی را هم، درمعادلهٔ طبیعی واردکرد وتغییرهایی (که البته، اساسی نیست) درآن‌داد.

در خاتمه، متذکرمی‌شویم که، اگر دومنحنی متقارن باشند (شکل ۱۳)، معادله‌های طبیعی آن‌ها، به‌صورت(۱۴)، تنها دریك‌علامت درسمت‌راست، با هم اختلاف دارند*.



شکل ۱۳

$$\frac{1}{R}=g(s) \quad \text{و} \quad \frac{1}{R}=-g(s) \qquad (۲۱)$$

در واقع، اگر نقطهٔ مبداء و جهت محاسبهٔ کمان را بر دو منحنی، به‌طور هم‌آهنگ، انتخاب کنیم، دو شعاع انحنای آن‌ها، علامت‌های مخالف

---

*) انطباق این دومنحنی، با تغییرمکان درصفحه، ممکن نیست. برای این‌کار، باید، به‌دوران در فضا متوسل شویم.

پیدا خواهد کرد. برعکس، اگر دو منحنی، به‌ترتیب، دارای معادله‌های (۲۱) باشند، با تغییر مکان بر روی صفحه، می‌توانند، به‌وضع متقارن، نسبت به هم، درآیند. در واقع، این دو منحنی، از نظر شکل، اساساً، با هم تفاوتی ندارند.

۳۳۳. مثال‌ها. ۱) منحنی نظیر معادلهٔ طبیعی $R^2 = 2as$ را پیدا کنید.

داریم:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2s}{a}}, \quad s = \frac{a}{2}\alpha^2$$

به‌طوری که $ds = a\alpha d\alpha$. اگر α را، به‌عنوان پارامتر انتخاب کنیم، داریم:

$$dx = \cos\alpha ds = a\alpha\cos\alpha d\alpha, \quad dy = \sin\alpha ds = a\alpha\sin\alpha d\alpha$$

از آن‌جا

$$x = a(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha), \quad y = a(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

منحنی، عبارت است از گستردهٔ دایره [۲۲۵، ۸)].

۲) به‌همین ترتیب، در مورد معادلهٔ طبیعی $R^2 + s^2 = 16a^2$. در این‌جا

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \quad \alpha = \arcsin\frac{s}{4a}, \quad s = 4a\sin\alpha, \quad ds = 4a\cos\alpha d\alpha$$

آن‌گاه

$$dx = \cos\alpha ds = 4a\cos^2\alpha d\alpha, \quad dy = \sin\alpha ds = 4a\sin\alpha\cos\alpha d\alpha$$

که از آن‌جا، با انتگرال‌گیری، به‌دست می‌آید:

$$x = 2a\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = a(2\alpha + \sin 2\alpha),$$

$$y = -a\cos 2\alpha = a - a(1 + \cos 2\alpha)$$

اگر پارامتر $t = 2\alpha - \pi$ را در نظر بگیریم، معادله‌های منحنی، به‌این‌صورت درمی‌آیند:

$$x = \pi a + a(t - \sin t), \quad y = a - a(1 - \cos t)$$

و این‌ها، معادله‌های پارامتری سیکلوئید هستند [۲۲۵، ۶)]، که تنها نسبت به‌وضع معمولی،

---

*) از آن‌جا که، باید دست‌کم یکی از منحنی‌ها را پیدا کنیم، مقدار ثابت انتگرال را، به‌صورتی که راحت‌تر باشد، انتخاب می‌کنیم. این نکته را، بعداز این‌هم، باید در نظر داشت.

حرکت‌کرده و برگردانده شده است.

۳) به‌همین‌ترتیب، برای معادلهٔ طبیعی $R=ms$.

روشن است که

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{ms},\ \alpha=\frac{\ln s}{m},\ s=e^{m\alpha},\ ds=me^{m\alpha}d\alpha,$$

$$dx=\cos\alpha\cdot me^{m\alpha}d\alpha,\ dy=\sin\alpha\cdot me^{m\alpha}d\alpha$$

وسرانجام

$$x=\frac{m}{1+m^2}(m\cos\alpha+\sin\alpha)e^{m\alpha},\ y=\frac{m}{1+m^2}(m\sin\alpha-\cos\alpha)e^{m\alpha}$$

به‌مختصات قطبی می‌رویم. قبل ازهمه

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}e^{m\alpha}$$

سپس، با واردکردن زاویهٔ ω با شرط $tg\,\omega=\frac{1}{m}$، خواهیم داشت:

$$\frac{y}{x}=\frac{m\sin\alpha-\cos\alpha}{m\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{tg\,\alpha-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}tg\,\alpha}=tg\,(\alpha-\omega)$$

به‌طوری‌که، زاویهٔ قطبی θ را، می‌توان برابر $\alpha-\omega$ گرفت، از آن‌جا، $\alpha=\omega+\theta$. بالاخره، معادلهٔ قطبی منحنی حاصل، چنین می‌شود:

$$r=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}e^{m\omega}e^{m\theta}$$

و این، پیچ لگاریتمی است [۲۲۶، ۳)]. ضریب $e^{m\theta}$، نقشی ندارد و، با دوران محور قطبی، می‌توان آن را به‌واحد تبدیل کرد.

۴) حالا، به‌مسالهٔ‌ای، ازگونهٔ دیگر می‌پردازیم: ازروی منحنی مفروض، به‌جست‌وجوی معادلهٔ طبیعی آن می‌رویم.

(a) برای منحنی زنجیری $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$، داریم [۳۳۱، ۱)؛ ۲۵۲، ۱)]:

$$s=a\cdot\mathrm{sh}\frac{x}{a}=\sqrt{y^2-a^2},\ R=\frac{y^2}{a}$$

واز آن‌جا: $R=a+\frac{s^2}{a}$.

(b) بـرای آستروئید $x=a\cos^3 t$، $y=a\sin^3 t$. اگـر وسط شاخهٔ آن در ربع اول، به‌عنوان مبداء محاسبهٔ کمان اختیار شود، خواهیم داشت [با ۳۳۱، ۳) مقایسه کنید]:

$$s=\frac{3a}{2}\sin^2 t-\frac{3a}{4},\ R=3a\sin t\cos t$$

بنا براین

$$R^2=4\cdot\frac{3a}{2}\sin^2 t\cdot\frac{3a}{2}\cos^2 t=4\left(\frac{3a}{4}+s\right)\left(\frac{3a}{4}-s\right)=\frac{9a^2}{4}-4s^2$$

وبالاخره، معادلهٔ آستروئید را، می‌توان، به‌صورت $R^2+4s^2=\frac{9a^2}{4}$ نوشت.

(c) درحالت کاردیوئید $r=a(1+\cos\theta)$، داشتیم [۳۳۱، ۹)، ۲۵۲، ۶)]:

$$s=4a\sin\frac{\theta}{2},\ R=\frac{4}{3}a\cos\frac{\theta}{2}$$

وواضح است: $9R^2+s^2=16a^2$.

(d) دونتیجهٔ اخیر، حالت‌هـای خاصی ازحالت زیر هستند. بـرای اپی‌سیکلوئید [۲۲۵، ۷)]، معادلهٔ‌طبیعی، عبارت‌است از $(1+m^2)a^2(1+2m)^2R^2+s^2=16m^2$.

(e) معادله‌های طبیعی گستردهٔ دایره، سیکلوئید و پیچ لگاریتمی راکه در ۱) تا ۳)، برای ما معلوم هستند، می‌توان دوباره به‌دست آورد.

۵) از روی معادلهٔ طبیعی یك منحنی، می‌توان معادلهٔ طبیعی گسترندهٔ آن را پیـدا کرد. رابطهٔ زیررا داشتیم [۲۵۵، ۱۵)]:

$$\rho=R\frac{dR}{ds}\qquad(۲۲)$$

اگـر مبداء محاسبهٔ کمـان برگسترنـده، طـوری انتخاب شود کـه داشته باشیم: $R=\sigma$ [۲۵۵، ۲° را ببینید]، آن‌وقت، بـا حذف R و s ازایـن دورابطه ومعادلهٔ طبیعی مفروض منحنی، به‌رابطه‌ای بین ρ و σ، یعنی معادلهٔ طبیعی گسترنده، می‌رسیم.

(a) برای پیچ لگاریتمی داریم: $R=ms$، آن‌وقت: $\rho=mR=m\sigma$. با تفاوت

علامت‌ها، به‌همان معادلهٔ قبلی می‌رسیم، یعنی گسترنده هم، یك پیچ لگاریتمی است که، با پیچ لگاریتمی اول، تنها در موضع خود متفاوت است [با **۲۵۴**، ۵) مقایسه کنید].

(b) برای گستردهٔ دایره

$$\sigma = R = \sqrt{2as},\quad s = \frac{\sigma^2}{2a},$$

$$\frac{dR}{ds} = \sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{a}{\sigma},\quad \rho = \sigma\cdot\frac{a}{\sigma} = a$$

(نتیجه‌ای که قابل پیش‌بینی بود).

(c) اگر معادلهٔ طبیعی منحنی، به‌صورت $R^2 + k^2 s^2 = c^2$ باشد، در آن صورت، گسترندهٔ آن، همان منحنی خواهد بود، منتهی، نسبت به اندازه‌های خطی، k بار بزرگتر. درواقع، داریم:

$$\sigma = R = \sqrt{c^2 - k^2 s^2},\quad ks = \sqrt{c^2 - \sigma^2},$$

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{k^2 s}{\sqrt{c^2 - k^2 s^2}} = -\frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma}$$

وسرانجام

$$\rho = -\sigma\cdot\frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma} = -k\sqrt{c^2 - \sigma^2}\ \text{یا}\ \rho^2 + k^2\sigma^2 = (kc)^2$$

که، درنتیجه، حکم موردنظر را ثابت می‌کند.

نتیجهٔ حاصل را، می‌توان درمورد سیکلوئید [با **۲۵۴**، ۴) مقایسه کنید]، ودرمورد اپی و هیپوسیکلوئید و، در حالت‌های خاص، درمورد کاردیوئید و آستروئید [با **۲۵۴**، ۳) مقایسه کنید] هم به‌کار برد.

یادداشت: با این روش، همیشه، شکل گسترنده معلوم می‌شود و مسالهٔ موضع آن، همچنان باز باقی می‌ماند.

۳۳۴. طول کمان منحنی فضائی. در ارتباط با منحنی فضائی سادهٔ

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t)\quad z = \chi(t)$$

می‌توان تعریف طول کمان را، به‌همان صورت منحنی مستوی داد [**۳۴۹**، یادداشت]. در این‌جا هم، برای طول کمان، رابطه‌ای شبیه (۱۴) به‌دست می‌آید:

$$s=\widehat{AB}=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt$$

وغیره. دراین‌جا هم، تقریباً بدون هیچ تغییری، به‌همهٔ آن چیزهایی می‌رسیم که درمورد منحنی مستوی گفته‌ایم. به‌همین مناسبت، تنها به‌چند مثال، اکتفا می‌کنیم.

۱) منحنی مارپیچی: $x=a\cos t$، $y=a\sin t$، $z=ct$.

چون، دراین‌جا:

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{a^2+c^2}$$

بنابراین، طول کمان منحنی، ازنقطهٔ $A(t=0)$ تا نقطه M (به‌ازای t دلخواه)، می‌شود:

$$s=\widehat{AM}=\int_0^t\sqrt{a^2+c^2}\,dt=\sqrt{a^2+c^2}.t$$

نتیجه روشن می‌شود، اگر به‌یاد بیاوریم که، با بازکردن سطح استوانه‌ای، منحنی‌مارپیچی روی آن، به‌خط راست مایل، تبدیل می‌شود.

۲) منحنی وی‌ویانی: $x=R\sin^2 t$، $y=R\sin t\cos t$، $z=R\cos t$.

داریم:

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=R\sqrt{1+\sin^2 t}$$

دراین حالت، طول تمامی منحنی، با انتگرال بیضوی‌کامل (نوع دوم) بیان می‌شود:

$$S=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt=$$

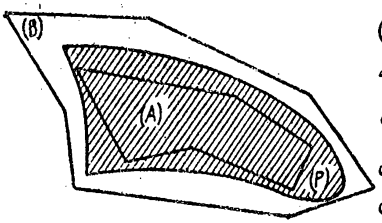
$$=4\sqrt{2}R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}\,dt=4\sqrt{2}RE\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

§۲. مساحت‌ها و حجم‌ها

۳۳۵. تعریف مفهوم مساحت. خاصیت جمعی. حوزهٔ چندضلعی، یا ـ کوتاه‌تر ـ چندضلعی، به‌شکل متناهی مسطحی گفته می‌شود (که ممکن است، یك پارچه هم نباشد)، که به‌وسیلهٔ یك یا چندخط شکسته بسته، محدود شده باشد. برای چنین شکلی، مفهوم مساحت

را، با توضیح کافی، در هندسهٔ دبیرستانی دیده‌ایم. ما هم، همان مفهوم را، مبنای کار خود قرار می‌دهیم.

حالا، شکل غیرمشخص (P) را، روی صفحه در نظر می‌گیریم، که حوزه‌ای متناهی و بسته را تشکیل می‌دهد. مرز یا محیط آن را، (K)، همیشه، به‌صورت یك منحنی بسته (و یا چندتا از این منحنی‌ها)، درنظر می‌گیریم.*



شکل ۱۴

همهٔ چندضلعی‌های ممکن (A) را، که (P) شامل آن‌هاست، و همهٔ چندضلعی‌های (B) را، که شامل (P) هستند، درنظرمی‌گیریم. اگر A و B را، به ترتیب، مساحت‌های (A) و (B) بگیریم، روشن است که همیشه داریم: $A \leqslant B$. مجموعهٔ عددهای $\{A\}$، از بالا، و به‌وسیلهٔ هرعدد دلخواه B، کران‌دار است و، درنتیجه، دارای مرز بالای P_* می‌باشد [۱۱]؛ ضمناً، $P_* \leqslant B$. به‌همین‌ترتیب، مجموعهٔ عددهای $\{B\}$، از پایین کران‌دار است و دارای مرز پایین P^* می‌باشد که، ضمناً، $P^* \geqslant P_*$. این مرزها را، می‌توان به‌ترتیب، مساحت درونی و مساحت بیرونی شکل (P) نامید.

اگر دو مرز

$$P_* = \sup\{A\} \quad و \quad P^* = \inf\{B\}$$

برهم منطبق شوند، آن‌وقت، مقدار مشترك آن‌ها، P، مساحت شکل (P) نامیده می‌شود. دراین حالت، شکل (P) را، تربیع‌پذیر (یا قابل تربیع) نامند.

به‌سادگی دیده می‌شود که: برای وجود مساحت، لازم و کافی است که، برای $\varepsilon > 0$ دلخواه، چنان چند ضلعی‌های (A) و (B) پیدا شود که درمورد آن‌ها داشته باشیم: $B - A < \varepsilon$.

درواقع، لازم بودن شرط، نتیجه‌ای است از ویژگی اصلی مرزها [۱۱]: اگر مساحت P وجود داشته باشد، آن‌گاه معلوم می‌شود که $A > P - \frac{\varepsilon}{2}$ و $B < P + \frac{\varepsilon}{2}$.

---

*) دراین بند هرجا دربارهٔ منحنی‌ها صحبت می‌کنیم، منظورمان، منحنی‌های ساده و پیوسته‌ای هستند که می‌توانند به‌صورت پارامتری نمایش داده شوند. ژردان (C. Jordan) ثابت کرده است که منحنی بستهٔ ازاین‌گونه، همیشه، صفحه را، به‌دوحوزهٔ درونی و بیرونی، تقسیم می‌کنند که، خود این منحنی، مرزمشترك این دوحوزه است.

کافی بودن شرط هم، نتیجه‌ای است از نابرابری‌های زیر:

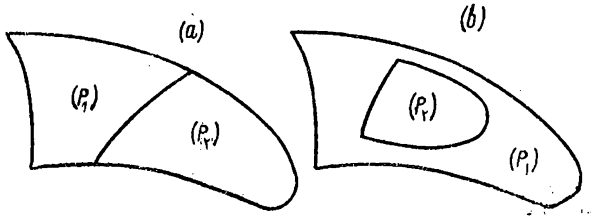
$$A \leqslant P_* \leqslant P^* \leqslant B$$

حالا، فرض کنیم، شکل (P)، به‌دوشکل (P_1) و (P_2) تجزیه شده باشد*؛ می‌توان، مثلاً این‌طور تصور کرد که این، به‌وسیلهٔ یك منحنی، که دونقطهٔ محیط آن را به‌هم وصل کرده‌است، تحقق پذیرفته باشد، ویا، تماماً در درون (P)، به‌وجود آمده باشد (شکل ۱۵، a و b). ثابت می کنیم که

اگر از سه شکل (P)، (P_1) و (P_2)، دوتا تربیع‌پذیر باشند، سومی هم تربیع‌پذیر و، ضمناً، همیشه داریم:

$$P = P_1 + P_2 \qquad (1)$$

یعنی، مساحت، دارای ویژگی جمعی (یا، جمع‌پذیری) است.



شکل ۱۵

برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم که شکل‌های (P_1) و (P_2)، دارای مساحت باشند. چندضلعی‌های مشمول و شامل آن‌ها ــ (A_1)، (B_1) و (A_2)، (B_2) ــ رادر نظر می‌گیریم از چندضلعی‌های (A_1) و (A_2) ــ که متقابلاً برهم قرار ندارند ــ حوزهٔ چندضلعی (A)، با مساحت $A = A_1 + A_2$، حاصل می‌شود که تماماً، درحوزهٔ (P) واقع است. ازچندضلعی‌های (B_1) و (B_2) هم، که می‌توانند روی هم قرار گیرند، حوزهٔ (B) با مساحت $B \leqslant B_1 + B_2$ تشکیل می‌شود، که شامل حوزهٔ (P) است، روشن است که

$$A_1 + A_2 = A \leqslant B \leqslant B_1 + B_2$$

ازآن‌جا، اختلاف B_1 از A_1، و B_2 از A_2 را، می‌توان به‌دلخواه کوچك گرفت، همین وضع، درمورد B و A هم برقرار خواهد بود و، از همین‌جا، تربیع‌پذیری حوزهٔ (P)

---

*) آن‌ها، ممکن است دارای مرز مشترك جزئی باشند، ولی، یکی بردیگری قرارنمی‌گیرد، یعنی، دارای نقطه‌های درونی مشترك نیستند.

نتیجه می‌شود.

ازطرف دیگر، به‌طور هم‌زمان، داریم:

$$A_1+A_2=A\leqslant P\leqslant B\leqslant B_1+B_2$$

و

$$A_1+A_2\leqslant P_1+P_2\leqslant B_1+B_2$$

به‌طوری‌که عددهای P و P_1+P_2، بین همان‌مرزهای به‌دلخواه نزدیک به‌هم، A_1+A_2 و B_1+B_2 واقع‌اند و، درنتیجه، این مرزها برابرند.

به‌خصوص، توجه‌کنیم‌که، ازاین‌جا، نتیجه می‌شود $P_1<P$. یعنی، بخشی از شکل، دارای مساحتی کمتر از تمامی شکل است.

۳۳۶. مساحت، به‌عنوان حد. شرط تربیع‌پذیری را، که درشمارهٔ پیش آوردیم، می‌توان این‌طور تنظیم‌کرد:

۱) برای آن که شکل (P) تربیع‌پذیر باشد، لازم وکافی است که، دو دنباله ازچندضلعی‌های $\{(A_n)\}$ و $\{(B_n)\}$ وجود داشته باشد که، به‌ترتیب، مشمول (P) وشامل (P) باشند، و مساحت‌های آن‌ها، دارای حد مشترکی باشند.

$$\text{حد } A_n=\text{حد } B_n=P$$

و روشن است‌که همین‌حد، مساحت شکل (P) خواهد بود.

گاهی به‌جای چندضلعی، مناسب‌تر است از شکل‌های دیگری استفاده شود که تربیع‌پذیری آن‌ها، قبلاً، روشن شده است:

۲) اگر، برای شکل (P)، بتوان چنان دنباله‌هایی از شکل‌های تربیع‌پذیر $\{Q_n\}$ و $\{(R_n)\}$ ساخت که، به‌ترتیب، مشمول و شامل (P) باشند و حد مساحت‌های آن‌ها، یکی باشد:

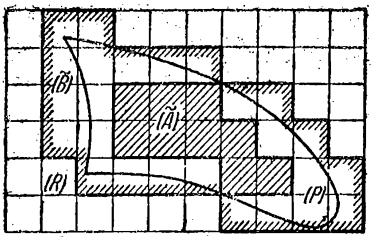
$$\text{حد } Q_n=\text{حد } R_n=P \qquad (۳)$$

درآن صورت شکل (P) هم تربیع‌پذیر است. ضمناً، حد مزبور، مساحت شکل (P) است.

حکم اخیررا می‌توان بلافاصله، ازحکم قبل نتیجه گرفت، اگر هرشکل (Q_n) را با چندضلعی (A_n) واقع درآن و هرشکل (R_n) را با چندضلعی (B_n) شامل آن‌ـکه از نظر مساحت به‌اندازهٔ کافی به‌هم نزدیک باشند، تبدیل‌کنیم، تا به‌طور هم‌زمان، (۲) هم برقرار شود.

با وجودی‌که انتخاب شکل‌های (A_n)، (B_n)، (Q_n) و (R_n)، در عمل، اشکالی

ایجاد نمی‌کند، ولی بهتر است، هر گونه ابهامی را درمورد این انتخاب، برطرف کنیم. به‌این منظور، مثلا، می‌توان این‌طور آغاز کرد:



شکل ۱۶

شکل مورد نظر (P) را، در درون یك مستطیل (R) با ضلع‌های موازی محورهای مختصات، محصور می‌کنیم و، سپس، آن را، به‌کمك یك رشته خط‌های راست موازی ضلع‌ها، به‌بخش‌هایی تقسیم می‌کنیم. از مستطیل‌هایی کـه، به‌تمامی، درحوزهٔ (P) قـرار گرفته‌اند، شکل (A) (در شکل ۱۶، آن را هاشور زده‌ایم) و از مستطیل‌هایی که با (P) نقطه‌های مشترکی دارند، ولـی قسمتی از آن‌ها، از این حوزه تجاوز کرده است، شکل (B) را تشکیل می‌دهیم. روشن است که این شکل‌ها، حالت‌های خاصی از آن چندضلعی‌هـای (A) و (B) هستند که، در تعریف مفهوم مساحت، دربارهٔ آن‌ها صحبت شده است، مساحت‌های A و B آن‌ها، بستگی به طرز تقسیم مستطیل (R) به‌بخش‌ها دارد. درازای بزرگترین قطر، ازاین مستطیل‌های جزئی را، بـا d نشان می‌دهیم.

۳) اگر، به‌ازای $d \to 0$، هردو مساحت A و B، به‌سمت حد مشترك P میل کنند، و تنها در این حالت، حوزهٔ P تربیع‌پذیر است؛ با برقراری این شرط، حـد مذکور، مساحت شکل (P) خواهد بود.

خواننده، خود می‌تواند، به سادگی، مفهوم این حد را، چه «به زبان δ و ε» و چـه «به‌زبان دنباله‌ها»، تنظیم کند.

در اثبات، تنها باید به لازم بودن شرط بپردازیم. فرض می‌کنیم، مساحت P وجود دارد و ثابت می‌کنیم که، در این‌صورت

$$\lim_{d \to 0} A = \lim_{d \to 0} B = P \qquad (۴)$$

از روی $\varepsilon > 0$ مفروض، چنان چندضلعی‌های A و B پیدا می‌شود [۳۳۵] که داشته باشیم: $B - A < \varepsilon$؛ ضمناً، می‌توان فرض کرد که در محیط‌های آن‌ها، نقطه‌های مشترکی با محیط (K) از شکل (P) وجود نداشته باشد. کمترین فاصلهٔ بین نقطه‌های محیط‌های دو

چندضلعی، از یك طرف، و نقطه‌های منحنی (K)، از طرف دیگر، را با δ نشان می‌دهیم*. حال اگر $d<\delta$ بگیریم، آن‌گاه، هرمستطیل جزئی، دست‌کم دریك نقطه، در بیرون چندضلعی (B) قرار می‌گیرد. ازاین‌جا نتیجه می‌شود که

$$A\leqslant\widetilde{A}\leqslant P\leqslant\widetilde{B}\leqslant B$$

به‌طوری‌که $P-\widetilde{A}<\varepsilon$ و $\widetilde{B}-P<\varepsilon$، که به (۴) منتهی می‌شود.

روشن است که براساس برابری (۴) هم، می‌توان، خود تعریف مفهوم مساحت را بناکرد، که البته، با تعریف قبلی هم‌ارز است. چنین تعریفی، هم ساده وهم طبیعی است، با وجود این، دارای این نقص است که بستگی به جهت‌دار بودن محورهای مختصات دارد.

۳۳۷. طبقه حوزه‌های تربیع‌پذیر. منحنی (K)، که دورهٔ حوزهٔ (P) را تشکیل می‌دهد، درمسالهٔ تربیع‌پذیری این حوزه، نقشی اساسی دارد.

اگر حوزهٔ (P) تربیع‌پذیر باشد، همان‌طورکه در **۳۳۵** دیدیم، از روی $\varepsilon>0$ مفروض، می‌توان منحنی (K) را، دریك حوزهٔ چندضلعی‌های $(A-B)$، واقع بین محیط‌های هردو چندضلعی (A) و (B)، و دارای مساحت $B-A<\varepsilon$، محصور کرد (شکل ۱۴ را ببینید).

حالا فرض می‌کنیم، برعکس، دورهٔ (K) بتواند درحوزهٔ چندضلعی (C)، به‌مساحت $C<\varepsilon$ (که در آن، ε، عدد مثبت دلخواه از پیش داده شده‌ای است) محصور شود. ضمناً، بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض کرد که (C) همهٔ شکل (P) را نمی‌پوشاند. آن‌وقت، از نقطه‌هایی از حوزهٔ (P)ـ که در درون (C) نیفتاده‌اندـ

---

*) اگر دومنحنی متناهی پیوسته، درصفحه، داشته باشیم و، مثلاً، فرض کنیم که با معادله‌های پارامتری داده شده باشند:

$$\text{(I)}\quad x=\varphi(t),\ y=\psi(t);\qquad \text{(II)}\quad x=\varphi^*(u),\ y=\psi^*(u)$$
$$(t_0\leqslant t\leqslant T)\qquad\qquad (u_0\leqslant u\leqslant U)$$

که در آن‌ها، φ، ψ، φ^* و ψ^*، تابع‌های پیوسته‌ای از آوندهای خود هستند، آن‌گاه، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ دلخواه از این منحنی‌ها

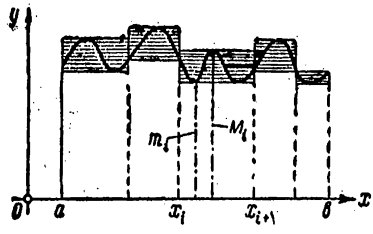
$$\sqrt{[\varphi(t)-\varphi^*(u)]^2+[\psi(t)-\psi^*(u)]^2}$$

تابع پیوسته‌ای از (t, u)، درحوزهٔ $[t_0, T; u_0, U]$ خواهد بود و، درنتیجه، می‌تواند به‌کمترین مقدار خود برسد [**۱۷۳**]. اگر منحنی‌ها، متقاطع نباشند، این کمترین فاصله، مخالف‌صفر خواهد بود.

حوزهٔ چندضلعی‌های (A)، واقع در (P)، تشکیل می‌شود؛ اگرهم (C) را به (A) ضمیمه کنیم، آن‌گاه، حوزهٔ چندضلعی (B) حاصل می‌شود که شامل (P) است. چون تفاضل $B-A=C<\varepsilon$، بنابرمعیار شمارهٔ ۳۳۵، تربیع‌پذیری (P) نتیجه می‌شود.

برای ساده‌کردن بیان، شرط می‌کنیم که، وقتی منحنی (R) (بسته یا باز) دارای مساحت‌صفر است که، بتوان، آن را، باحوزهٔ چندضلعی به‌مساحت به‌دلخواه کوچك، پوشاند. حالا دیگر می‌توانیم، بحث بالا را، به‌صورت شرط تربیع‌پذیری، تنظیم کنیم:

برای آن‌که شکل (P) تربیع‌پذیرباشد، لازم و کافی است که محیط (K) از آن، دارای مساحت صفر باشد.



شکل ۱۷

در ارتباط با این مطلب، باید طبقهٔ وسیع منحنی‌های به‌مساحت صفررا جداکنیم.

قبل از هرچیز، به‌سادگی ثابت می‌شود که، با معادله‌ای صریح به‌صورت

$$y=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b) \qquad \text{یا} \qquad x=g(y) \quad (c\leqslant x\leqslant d) \tag{۵}$$

بیان شده باشد (f و g، تابع‌هایی پیوسته هستند)، دارای این ویژگی است.

مثلاً، فرض می‌کنیم، با معادلهٔ اول سروکار داشته باشیم. از روی $\varepsilon>0$ مفروض، می‌توان بازهٔ $[a, b]$ را، به‌بخش‌های $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, \dots, n-1)$، چنان تقسیم کرد، که درهرکدام از آن‌ها، برای نوسان تابع f داشته باشیم: $\omega_i<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ [۸۷]. اگر، طبق معمول، کمترین و بیشترین مقدار تابع f را در بازهٔ iام، با m_i و M_i نشان دهیم، آن‌گاه، تمامی منحنی (R)، با شکلی که از مستطیل‌های

$$[x_i, x_{i+1}; m_i, M_i] \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

تشکیل شده است (شکل ۱۷ را ببینید) پوشانده می‌شود، که مساحت کلی آن چنین است:

$$\sum_i (M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_i \omega_i \Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_i \Delta x_i=\varepsilon$$

واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. یعنی، منحنی (۵)، دارای مساحت ۰ است. ازاین‌جا نتیجه می‌شود:

اگر شکل (P)، محدود به‌چند منحنی پیوسته باشد که هرکدام از آن‌ها، به‌طور جداگانه، با تابع‌های صریح (۵) (این یا آن نوع) بیان شوند، آن‌گاه، این شکل تربیع‌پذیر است.

درواقع، از آن‌جا که هرکدام از منحنی‌های نامبرده، دارای مساحت ۰ است، تمامی محیط‌هم، به‌روشنی، دارای مساحت ۰ خواهد بود.

ازاین معیار، می‌توان معیار دیگری، به‌دست آورد که، درعمل، خیلی‌کاررا راحت‌تر می‌کند.

منحنی مفروض، بامعادله‌های پارامتری

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t) \qquad (۶)$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

را هموار می‌نامیم، به‌شرطی‌که: ۱) تابع‌های φ و ψ، دارای مشتق‌های پیوسته، در تمامی بازهٔ $[t_0, T]$ تغییر پارامتر باشند و ۲) منحنی دارای نقطه‌های تکراری و یا، به‌طورکلی، نقطه‌های خاص نباشد. درحالت منحنی بسته، این برابری‌ها هم باید برقرار باشند:

$$\varphi'(t_0)=\varphi'(T), \quad \psi'(t_0)=\psi'(T)$$

حالا ثابت می‌کنیم که منحنی هموار، دارای مساحت صفراست.

نقطهٔ $\bar{M}$ را، روی منحنی، به‌ازای $\bar{t}$ از مقدار پارامتر، انتخاب می‌کنیم. چون این نقطه، نقطه‌ای خاص نیست، همان‌طورکه می‌دانیم [۲۲۴]، چنان بازهٔ

$$\bar{\sigma}=(\bar{t}-\bar{\delta}, \bar{t}+\bar{\delta})$$

وجود دارد، که منحنی جزئی نظیر آن، بتواند با معادله‌ای صریح بیان شود.

حال، پیش‌قضیهٔ بورل [۸۸] را، در بازهٔ $[t_0, T]$ و درمورد دستگاه‌همسایگی‌های $\{\sigma\}=\sum$، که‌آن‌را پوشانده است، به‌کار می‌بریم؛ تمامی بازه، دوباره، به‌تعدادی متناهی ازاین همسایگی‌ها تقسیم می‌شود، به‌نحوی‌که منحنی از تعدادی متناهی بخش‌ها تشکیل می‌شودکه، هرکدام از آن‌ها، با یکی از معادله‌های صریح (۵)، قابل بیان‌اند. بنابراین اگر شکل (P)، محدود به یك یاچند منحنی هموار باشد، آن‌گاه، آشکارا تربیع‌پذیر است.

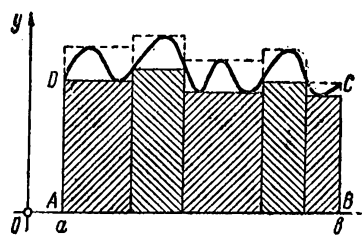
این نتیجه، حتی درحالتی هم‌که منحنی دارای تعداد محدودی نقطه‌های خاص‌باشد، معتبر است: اگر این نقطه‌ها را، به‌کمك همسایگی‌های به‌مساحت به‌قدرکافی‌کوچك جدا کنیم، با منحنی‌های هموار، سروکار پیدا می‌کنیم.

۳۳۸. بیان مساحت‌ها، به‌کمک انتگرال. حالا، به‌محاسبهٔ مساحت شکل‌های مستوی، به‌کمک انتگرال، می‌پردازیم.

قبل ازهمه، بـا بیانی دقیـق، مسالهٔ تعیین مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخـط $ABCD$ (شکل ۱۸) را، که قبلاً هم با آن سروکار داشته‌ایم، مطرح می‌کنیم. ایـن شکل، از بالا، به‌منحنی CD محدود است، که معادلهٔ آن، چنین است:

$$y=f(x)$$

که در آن، $f(x)$، تابعی است مثبت و پیوسته در بازهٔ $[a, b]$. این شکل، از پایین به‌پاره‌خط راست AB از محور x و از پهلوها، به‌دو عرض AD و BC (که هرکدام از آن‌ها، ممکن است به‌یـك نقطه تبدیل شود)، محدود است. وجود مساحت P از شکل موردنظـر $ABCD$، اساساً، نتیجه‌ای است از آن‌چه در شمارهٔ پیش ثابت کردیم. در این‌جا، می‌خواهیم این مساحت را محاسبه کنیم.



شکل ۱۸

برای این منظور، بازهٔ $[a, b]$ را، طبق معمول: با وارد کردن نقطه‌هایی بین a و b، تقسیم می‌کنیم:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

کمترین و بیشترین مقدار تابـع $f(x)$ را، در بازهٔ iام $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$، به‌ترتیب، m_i و M_i می‌نامیم و مجموع‌هـای داربو را تشکیل می‌دهیم:

$$s=\sum_i m_i\Delta x_i, \qquad S=\sum_i M_i\Delta x_i$$

این‌هـا، عبارتند ازمساحت دوشکل پله‌ای مانندکـه، به‌ترتیب، از مستطیل‌هـای درونی و بیرونی (شکل را ببینید)، درست شده‌اند. بنابراین

$$s<P<S$$

ولی، اگـر تفاضل‌هـای Δx_i را به‌سمت صفـر میل دهیـم، حد هر دو مجمـوع، برابر*

---

*) بنابر **۳۳۶**، ۱)، این، به‌خودی خـود، تربیع‌پذیری ذوزنقهٔ منحنی‌الخط $ABCD$ را ثابت می‌کند؛ برای این‌که دنبالهٔ شکل‌ها را به‌دست آوریم، می‌توانستیم، مثلاً، بازه را، به‌بخش‌های برابر، تقسیم کنیم.

$\int_a^b f(x)\,dx$ می‌شود. در نتیجه، همین انتگرال، برابر با مساحت مطلوب است:

$$P=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \qquad (۷)$$

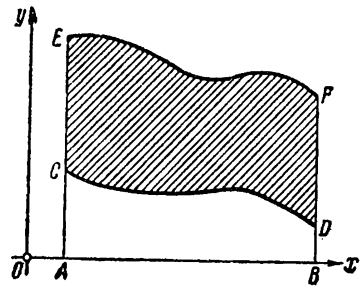
اگر ذوزنقهٔ منحنی‌الخط $CDFE$، از پایین و از بالا، به‌منحنی‌هایی محدود باشد (شکل ۱۹)، که معادلهٔ آن‌ها، چنین باشد:

$$y_۱=f_۱(x),\quad y_۲=f_۲(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

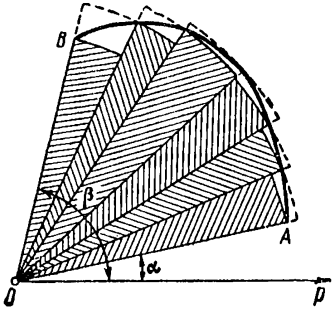
در آن صورت، آن را، به‌عنوان تفاضل دو شکل $ABFE$ و $ABDC$ درنظر می‌گیریم و مساحت آن را، به‌این صورت، پیدا می‌کنیم:

$$P=\int_a^b (y_۲-y_۱)\,dx=\int_a^b [f_۲(x)-f_۱(x)]dx \qquad (۸)$$

حال، قطاع AOB را درنظر می‌گیریم که محدود است به‌منحنی AB و دو شعاع حامل OA و OB (هرکدام از این شعاع حامل‌ها، می‌توانند، به‌یک نقطه تبدیل شوند).



شکل ۱۹



شکل ۲۰

(شکل ۲۰). ضمناً، منحنی AB با معادلهٔ قطبی $r=g(\theta)$ مشخص شده است، که در آن، $g(\theta)$، تابعی مثبت و پیوسته در بازهٔ $[\alpha, \beta]$ است. در این‌جا هم، صحبت تنها برسر محاسبهٔ مساحت P قطاع است، چراکه وجود مساحت، بستگی به‌ویژگی دورهٔ شکل دارد.

با قراردادن مقدارهای

$$\alpha=\theta_۰<\theta_۱<\theta_۲<\cdots<\theta_i<\theta_{i+۱}<\cdots<\theta_n=\beta$$

بین α و β (شکل را ببینید)، شعاع‌های حامل نظیر این زاویه‌ها را رسم می‌کنیم. اگر μ_i و M_i را، به‌ترتیب، کمترین و بیشترین مقدار تابع $g(\theta)$ در $[\theta_i, \theta_{i+۱}]$ بگیریم، آن‌گاه،

قطاع‌های دایره‌ای که، به‌ترتیب، با این شعاع‌ها رسم شوند، اولی‌ها در درون و دومی‌ها در بیرون شکل AOB قرار خواهند گرفت. این قطاع درونی و بیرونی، به‌طور جداگانه، دو شکل را تشکیل می‌دهند که مساحت‌های آن‌ها، عبارتند از

$$\sigma=\frac{1}{2}\sum_i m_i^2\Delta\theta_i \quad \text{و} \quad \sum=\frac{1}{2}\sum_i M_i^2\Delta\theta_i$$

و واضح است که $\sigma<P<\sum$.

در این حالت‌ها، به‌سادگی، مجموع‌های σ و $\sum$، به‌عنوان مجموع‌های داربو برای انتگرال $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2 d\theta$ شناخته می‌شوند؛ اگر بزرگترین تفاضل Δx_i به‌سمت صفر میل کند، حد هر دو مجموع، همین انتگرال خواهد بود*، به‌طوری که

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2 d\theta \qquad (۹)$$

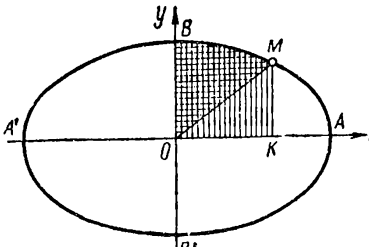
۳۳۹. مثال‌ها. ۱) مطلوب است تعیین مساحت P، شکل محدود به منحنی زنجیری $y=a\cdot\mathrm{ch}\frac{x}{a}$، محور x و دو عرض نظیر طول‌های ۰ و x (شکل ۹).

داریم:

$$P=\int_0^x a\cdot\mathrm{ch}\frac{x}{a}dx=a^2\cdot\mathrm{sh}\frac{x}{2}=as$$

که در آن، s عبارت است از کمان AM از منحنی زنجیری [۳۳۱، ۱)]. بنابراین، مساحت $AOPM$ مطلوب، برابر با مساحت مستطیلی است که روی پاره‌خط‌های PS و SM ساخته شود (زیرا $SM=AM$).

۲) بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و نقطهٔ $M(x,y)$، بر آن داده شده است (شکل ۲۱). مطلوب است مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط $BOKM$ و قطاع OMB.



شکل ۲۱

از معادلهٔ بیضی داریم: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$، به‌نحوی که، با توجه به‌رابطهٔ (۷):

*) در اینجا هم، می‌شد، با استناد به ۳۳۶، ۲)، همان یادآوری پاورقی قبل را تکرار کرد.

$$P_1 = \text{مساحت} BOKM = \int_0^{*b} \frac{a}{b}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{b}{2a}x\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{xy}{2}$$

چون جملهٔ آخر، نمایندهٔ مساحت مثلث OKM است، بنابراین، با برداشتن آن، مساحت قطاع، به‌دست می‌آید:

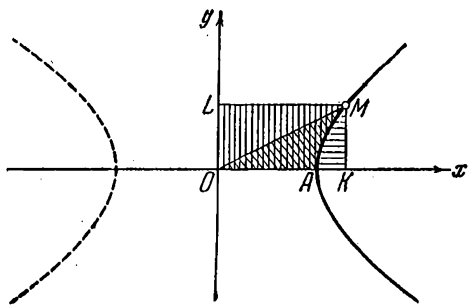
$$P_2 = \text{مساحت} OMB = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}$$

به‌ازای $x = a$، برای مساحت یك چهارم بیضی، مقدار $\frac{\pi ab}{4}$ به دست می‌آید، به‌طوری‌که مساحت تمامی بیضی $P = \pi ab$ می‌شود. درحالت $a = b = r$ (دایره)، رابطهٔ معلوم $P = \pi r^2$ حاصل می‌شود.

۳) هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ و نقطهٔ $M(x, y)$ را، برآن، در نظر می‌گیریم (شکل ۲۲). می‌خواهیم مساحت شکل‌های منحنی‌الخط AKM و OAM و $OAML$ را پیدا کنیم.

از معادلهٔ هذلولی داریم: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$، و از روی رابطهٔ (۷):

$$P_1 = \text{مساحت} AKM = \frac{b}{a}\int_0^{*} \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$$



شکل ۲۲

$$=\frac{b}{a}\left[\frac{۱}{۲}x\sqrt{x^۲-a^۲}-\frac{a^۲}{۲}\ln(x+\sqrt{x^۲-a^۲})\right]_۰^x=$$

$$=\frac{۱}{۲}xy-\frac{۱}{۲}ab\ln\frac{x+\sqrt{x^۲-a^۲}}{a}$$

چون $\frac{\sqrt{x^۲-a^۲}}{a}=\frac{y}{b}$، می‌توان این عبارت را، به‌صورتی متقارن‌تر نوشت:

$$P_۱=\frac{۱}{۲}xy-\frac{۱}{۲}ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

که از آن‌جا، به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$P_۲=\text{مساحت}OAM=\frac{ab}{۲}\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),$$

$$P_۳=\text{مساحت}OAML=\frac{۱}{۲}xy-\frac{۱}{۲}ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

یادداشت. این رابطه‌ها، به‌ما امکان می‌دهند که شباهت بین تابع‌های مثلثاتی (دایره‌ای) و تابع‌های هذلولی را، تا حدی، عمیق‌تر کنیم. دایرهٔ به‌شعاع واحد $x^۲+y^۲=۱$ را با $y^۲-x^۲=۱$ مقایسه می‌کنیم (شکل ۲۳، a و b). این منحنی‌ها را، به‌صورت پارامتری، می‌توان این‌طور نشان داد:

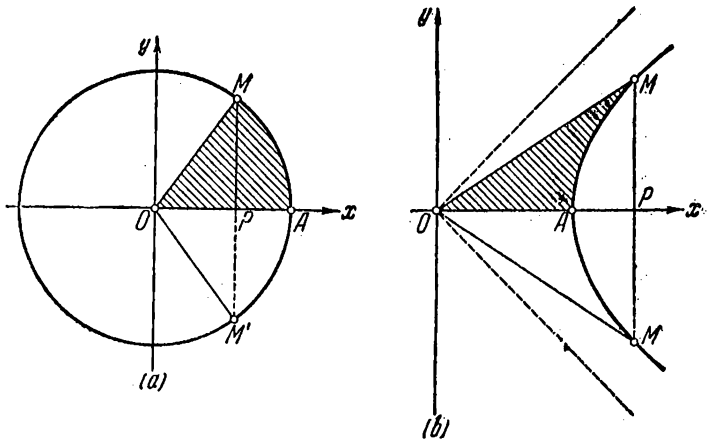
$$\text{دایره}: OP=x=\cos t,\quad PM=y=\sin t$$

$$\text{هذلولی}: OP=x=\operatorname{ch}t,\quad PM=y=\operatorname{sh}t$$

ولی، اگر در مورد دایره، نقش هندسی t، به‌روشنی، معلوم است ــ t، همان زاویهٔ AOM است ــ، در مورد هذلولی، نمی‌توان چنین تفسیری، از پارامتر عددی t پیدا کرد. ولی، برای دایره، تفسیر دیگری در مورد پارامتر t می‌دهیم: t عبارت است از دو برابر مساحت قطاع AOM (یعنی مساحت قطاع $M'OM$). معلوم است که این تفسیر را، در مورد حالت هذلولی هم می‌توان کرد.

در واقع، اگر مختصات M را، چنین بگیریم:

$$x=\operatorname{ch}t=\frac{e^t+e^{-t}}{۲},\quad y=\operatorname{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{۲}$$



شکل ۲۳

آن‌گاه $x+y=e^t$ و $t=\ln(x+y)$. اگر رابطه‌ای را که برای P_2 به‌دست آوریم، به خاطر آوریم، و در آن $a=b=1$ بگذاریم، نتیجه می‌گیریم که t برابر است با دو برابر مساحت قطاع AOM (یعنی، شبیه دایره).

بنابراین، پاره‌خطهای PM و OP، در دایره، به‌معنای سینوس و کسینوس دایره‌ای از دو برابر مساحت قطاع AOM و در هذلولی، به‌معنای سینوس و کسینوس هذلولی از دو برابر مساحت قطاع هذلولی AOM می‌باشند. نقش تابع‌های هذلولی، نسبت به‌هذلولی، کاملاً مشابه نقش تابع‌های دایره‌ای (مثلثاتی)، نسبت به‌دایره است.

این تفسیر از آوند تابع‌های هذلولی، که آن را به‌عنوان مساحت در نظر گرفتیم، به‌نام‌گذاری تابع‌های معکوس آن‌ها هم، بستگی دارد [۴۹، ۳) و ۴) را ببینید]:

$$\operatorname{Ar\,sh}\, x,\quad \operatorname{Ar\,ch}\, x, \dots$$

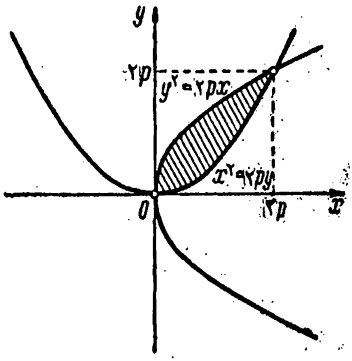
حرف‌های Ar، حرف‌های اول واژهٔ لاتینی Area، به‌معنای «مساحت» است.

۴) مطلوب است تعیین مساحت P، شکل محدود به‌محورهای مختصات و سهمی

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\quad (a>0)$$

جواب: $P=\int_0^a y\,dx=\frac{1}{6}a^2$ (از خواننده می‌خواهیم، خود، شکل مربوطه را رسم کند).

۵) مساحت بین دو سهمی هم‌نهشت $y^2=2px$ و $x^2=2py$ را پیدا کنید (شکل ۲۴).



شکل ۲۴

از رابطهٔ (۸) استفاده می‌کنیم و در آن جا، قرار می‌دهیم:

$$y_1=\frac{x^2}{2p},\quad y_2=\sqrt{2px}$$

برای تعیین بازهٔ انتگرال‌گیری، معادله‌های مفروض را با هم حل می‌کنیم و طول نقطهٔ M، نقطهٔ برخورد دومنحنی‌را، به‌جزمبداء، پیدا می‌کنیم. این طول برابر است با $2p$ و داریم:

$$P=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6p}\right)\Big|_0^{2p}=\frac{4}{3}p^3$$

۶) مطلوب است مساحت P بیضی، که با معادله‌های زیر مشخص شده است:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1\quad (AC-B^2>0,\ C>0) \qquad (10)$$

حل. از این معادله، به‌دست می‌آید:

$$y_1=\frac{-Bx-\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C}$$

$$y_2=\frac{-Bx+\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C}$$

ضمناً، مقدارهای y_1 و y_2، تنها وقتی حقیقی هستندکه مقدار x در نابرابری

$$C-(AC-B^2)x^2\geqslant 0$$

صدق کند، یعنی در بازهٔ $[-\alpha,\alpha]$ واقع باشد، که در آن‌جا $\alpha=\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$.

در این‌صورت، مساحت مطلوب، چنین است:

$$P=\int_{-\alpha}^{\alpha}(y_2-y_1)dx=\frac{2}{C}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{C-(AC-B^2)x^2}dx=$$

$$=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}dx=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

۷) حالا، بیضی را، با معادلهٔ کلی خود

$$ax^2+2bxy+Cy^2+2dx+2ey+f=0$$

در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم مساحت P آن‌را پیدا کنیم.

این مسأله را، می‌توان، به‌مسألهٔ قبلی تبدیل کرد.

اگر مبداء مختصات‌را، به‌نقطهٔ $(\eta\ ،\xi)$، یعنی‌مرکز بیضی منتقل کنیم، با توجه به‌این‌که، مختصات مرکز بیضی را، می‌توان از معادله‌های زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} a\xi+b\eta+d&=0\\ b\xi+c\eta+e&=0 \end{aligned} \qquad (11)$$

آن‌وقت، معادلهٔ بیضی به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$ax^2+2bxy+cy^2+f'=0$$

که در آن داریم:

$$d\xi+e\eta+f=f' \qquad (12)$$

با حذف ξ و η، از برابری‌های (۱۱) و (۱۲)، به‌دست می‌آید

$$\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f-f' \end{vmatrix}=0$$

و از آن‌جا

$$f'=\frac{\Delta}{ac-b^2};\quad \Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f \end{vmatrix}^{*}$$

و اگر در معادلهٔ حاصل، قرار دهیم:

$$A=-\frac{a}{f'},\quad B=-\frac{b}{f'},\quad C=-\frac{c}{f'}$$

---

*) روشن است که f و Δ، منفی هستند (زیرا، در غیر این‌صورت، معادله نمی‌تواند معرف یك منحنی حقیقی باشد).

به‌سادگی، به‌همان معادله‌ای می‌رسیم که در ۶) بررسی کردیم.

به‌این‌ترتیب، مساحت بیضی، چنین خواهد شد:

$$P=\frac{\pi|f'|}{\sqrt{ac-b^2}}=-\frac{\pi\Delta}{(ac-b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۸) از رابطهٔ(۷)، می‌توان، برای‌حالتی‌که منحنی (ذوزنقهٔ منحنی‌الخط‌رامحصور کرده است)، به‌صورت پارامتری و یا بامعادله‌های به‌صورت (۶) داده شده‌باشد، استفاده کرد. اگر، در انتگرال (۷) تغییر متغیر بدهیم (با فرض $x=a$ به ازای $x=b$ و $t=t_0$ به‌ازای $t=T$)، نتیجه می‌گیریم:

$$P=\int_{t_0}^{T} yx'_t dt=\int_{t_0}^{T}\psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (۱۳)$$

مثلاً، اگر برای محاسبهٔ مساحت بیضی، از نمایش پارامتری آن آغاز کنیم:

$$x=a\cdot cost,\quad y=b\cdot sint$$

و در نظر بگیریم که با نزول t از π تا ۰، مقدار x از $-a$ تا $+a$ صعود می‌کند، داریم:

$$P=2\int_{\pi}^{0} bsint\cdot(-asint)dt=2ab\int_{0}^{\pi} sin^2 t\,dt=\pi ab$$

در واقع، در این‌جا، مساحت نیم بالایی بیضی را محاسبه، و آن‌را، دو برابر کرده‌ایم.

۹) با روش مشابهی، می‌توان، مساحت شکل محدود به سیکلوئید

$$x=a(t-sint),\quad y=b(1-cost)$$

را محاسبه کرد. از روی رابطهٔ (۱۳) داریم:

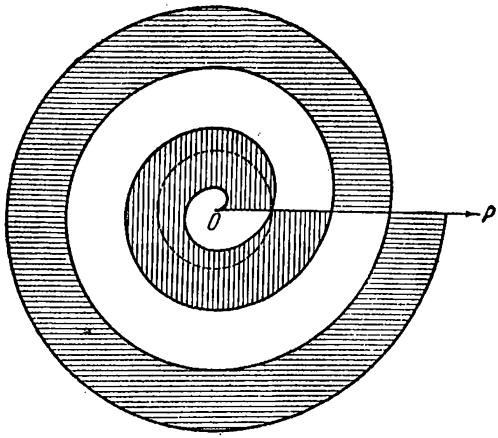
$$P=\int_{0}^{2\pi} a^2(1-cost)^2dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2sint+\frac{1}{4}sin2t\right)\Big|_{0}^{2\pi}=3\pi a^2$$

بنابراین، مساحت مطلوب، برابر است با سه برابر مساحت دایرهٔ مولد.

۱۰) مطلوب است مساحت یک حلقه از پیچ ارشمیدس $r=a\theta$ (شکل ۲۵).

از رابطهٔ (۹) داریم:

$$P_1=\frac{1}{2}a^2\int_{0}^{2\pi}\theta^2 d\theta=\frac{a^2}{6}\theta^3\Big|_{0}^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3 a^2$$



شکل ۲۵

چون مساحت دایرهٔ به‌شعاع $2\pi a$ برابر است با $4\pi^3 a^2$، مساحت یك حلقه از پیچ ارشمیدس برابر با $\frac{1}{3}$ مساحت این دایره می‌شود (این نتیجه را، ارشمیدس هم به دست آورده بود).

به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم، ثابت کند که مساحت‌های حلقه‌های متوالی، تشکیل یك تصاعد حسابی به‌قدر نسبت $8\pi^3 a^2$ می‌دهند.

۱۱) مساحت حلزون زیر را پیدا کنید:

$$r = a\cos\theta + b \qquad (b \leqslant a)$$

از روی رابطهٔ (۹) داریم:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos\theta + b)^2 d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)\theta + \frac{1}{4}a^2 \sin 2\theta + 2ab\sin\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2)$$

در حالت خاص، مساحت کاردیوئید ($b = a$)، برابر است با $\frac{3}{2}\pi a^2$.

۱۲) مطلوب است تعیین مساحت لمنیسکات $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$.

کافی است، مساحت شکل بیضی مانند سمت راست را، دو برابر کنیم، که متناظر

است با تغییر زاویهٔ θ از $-\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{\pi}{۴}$:

$$P=۲.\frac{۱}{۲}۲a^۲\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}cos۲\theta d\theta=۴a^۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}cos۲\theta d\theta=۲a^۲$$

۱۳) مساحت برگ دکارتی $x^۳+y^۳-۳axy=۰$ را پیدا کنید.

معادله‌را، به‌مختصات‌قطبی می‌بریم. اگر، درمعادلهٔ منحنی، $x=rcos\theta$ و $y=rsin\theta$ قرار دهیم و به $r^۲$ ساده‌کنیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$r=\frac{۳asin\theta cos\theta}{sin^۳\theta+cos^۳\theta}$$

چون، خود پیچ منحنی، متناظر با تغییر θ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ است، از روی رابطهٔ (۹) داریم:

$$P=\frac{۹a^۲}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{sin^۲\theta cos^۲\theta}{(sin^۳\theta+cos^۳\theta)^۲}d\theta$$

اگر به‌جای $sin\theta$ قراردهیم: $tg\theta.cos\theta$، عبارت زیر علامت انتگرال، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{tg^۲\theta dtg\theta}{(۱+tg^۳\theta)^۲}$$

که از آن‌جا، بلافاصله، تابع اولیه پیدا می‌شود:

$$-\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۱+tg^۳\theta}=-\frac{۱}{۳}.\frac{cos^۳\theta}{sin^۳\theta+cos^۳\theta}$$

به‌این ترتیب

$$P=-\frac{۳a^۲}{۲}.\frac{cos^۳\theta}{sin^۳\theta+cos^۳\theta}\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۳a^۲}{۲}$$

۱۴) مسألهٔ ۶) را، با استفاده از مختصات قطبی، دوباره حل کنید.

حل. با واردکردن مختصات‌قطبی، معادلهٔ (۱۰) بیضی را، به‌این‌صورت، می‌نویسیم:

$$r^2=\frac{1}{A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta}$$

آن‌وقت، از روی رابطهٔ (۹)، فوراً، نتیجه می‌گیریم [۳۰۹، ۹)]:

$$P=2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

در واقع، مساحت بیضی را، مساوی دو برابر مساحت آن قسمتی از بیضی گرفتیم که در ربع‌های اول و چهارم مختصات واقع است. اگر بخواهیم از نتیجهٔ ۱۰)، ۲۸۸ برای محاسبهٔ مستقیم تمامی مساحت بیضی استفاده کنیم، به‌چه دشواری برخورد می‌کنیم؟

۱۵) از رابطهٔ (۹)، برای حالتی هم که منحنی، با معادله‌های پارامتری خود به‌صورت (۶)، داده شده باشد، می‌توان استفاده کرد. چون

$$r^2=x^2+y^2,\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\quad \theta'_t=\frac{xy'_t-x'_ty}{x^2+y^2}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}(xy'_t-x'_ty)dt$$

اگر تغییر زاویهٔ θ از α تا β، نظیر تغییر پارامتر t از t_0 تا T باشد، آن‌گاه

$$P=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}(xy'_t-x'_ty)dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[\varphi(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi(t)]dt \qquad (۱۴)$$

با توجه به‌تقارنی که دراین‌رابطه وجود دارد، اغلب، منجر به‌محاسبه‌های ساده‌تری می‌شود. مثلاً، اگر از روی آن، مساحت بیضی را، باشروع از معادله‌های پارامتری آن $x=a\cos t$، $y=b\sin t$، محاسبه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$P=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+a\sin t\cdot b\sin t)dt=\frac{1}{2}ab\int_{0}^{2\pi}dt=\pi ba$$

۱۶) باز هم از روی رابطهٔ (۱۴)، مساحت آستروئید $x=a\cos^3 t$، $y=a\sin^3 t$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$P=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi}[a\cos^{۳}t\cdot ۳a\sin^{۲}t\cos t+۳a\cos^{۲}t\sin t\cdot a\sin^{۳}t]dt=$$

$$=\frac{۳}{۲}a^{۲}\int_{۰}^{۲\pi}\sin^{۲}t\cos^{۲}t\,dt=\frac{۳}{۱۶}a^{۲}\left(t-\frac{\sin ۴t}{۴}\right)\Big|_{۰}^{۲\pi}=\frac{۳}{۸}\pi a^{۲}$$

۳۴۰. تعریف مفهوم حجم، ویژگی‌های آن. همان‌طور که درشمارهٔ ۳۳۵، با آغاز از مفهوم مساحت چندضلعی، مفهوم مساحت را، برای شکل مستوی غیرمشخص، تعریف کردیم، دراین‌جا هم، تعریف حجم جسم را، با اتکاء به‌حجم چندوجهی، می‌دهیم.

فرض می‌کنیم، جسمی با شکل غیرمشخص (V) داده شده باشد، یعنی حوزه‌ای محدود و بسته، درفضای سه‌بعدی درنظر می‌گیریم. مرز (S) جسم را، سطحی بسته* (یا چند سطح بسته) فرض می‌کنیم.

دو چندوجهی درنظر می‌گیریم: یکی چندوجهی (X) با حجم X که به‌تمامی در درون جسم قرار گرفته است (مشمول جسم است) و دیگری چندوجهی (Y) با حجم Y، که شامل جسم مفروض است. همیشه، برای X، مرز بالایی V_* و برای Y، مرز پایینی V^* وجود دارد و، ضمناً، $V_*\leqslant V^*$. این دو مقدار را، می‌توان به‌ترتیب، حجم درونی وحجم بیرونی جسم نامید.

اگر دو مرز

$$V_*=\sup\{X\}\quad و\quad V^*=\inf\{Y\}$$

برهم منطبق شوند، آن‌گاه، مقدار مشترك آن‌ها، V را، حجم جسم (V) نامند.

دراین حالت، جسم (V) را، گاهی، قابل تبدیل به‌مکعب (یا حجم‌پذیر) گویند.

در این‌جا هم، به‌سادگی دیده می‌شود که: برای وجود حجم، لازم و کافی است که، برای $\varepsilon>۰$ دلخواه، چنان چندوجهی‌های (X) و (Y) پیدا شود که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $Y-X<\varepsilon$.

اگر سپس جسم (V)، به‌دو جسم $(V_۱)$ و $(V_۲)$ تقسیم شده باشد، از وجود حجم برای دوتا از این سه‌جسم، وجود حجم برای جسم سوم، نتیجه می‌شود، ضمناً

$$V=V_۱+V_۲$$

یعنی، حجم دارای ویژگی جمعی است (یعنی، حجم، جمع‌پذیر است).

---

*) منظور ما، سطحی است پیوسته که بتوان آن را، به‌صورت پارامتری، نمایش داد.

گزاره‌های ۱)، ۲) و ۳) را، که در ۳۳۶ درمورد مساحت‌ها آوردیم، برای حجم‌ها هم، می‌توان به‌سادگی، ثابت کرد.

۱) برای آن‌که، جسم (V) دارای حجم باشد، لازم وکافی است که چنان دودنباله‌ای از چندوجهی‌های $\{(X_n)\}$ و $\{(Y_n)\}$، به‌ترتیب مشمول و شامل (V)، وجود داشته باشند، که حجم‌های آن‌ها، دارای حدی مشترک باشند:

$$\text{حد } X_n = \text{حد } Y_n = V$$

این حد مشترک، همان حجم جسم (V) است.

یادآوری این مطلب مفید است که، به‌جای چندوجهی‌ها، می‌توان جسم‌های غیرمشخصی را درنظر گرفت، که وجود حجم، برای آن‌ها، آشکار باشد.

۲) اگر برای جسم (V)، بتوان، دو دنباله از جسم‌های $\{(T_n)\}$ و $\{(U_n)\}$ـ به‌ترتیب، مشمول و شامل ـ ساخت که، دارای حجم باشند و ضمناً، این حجم‌ها به سمت یک حد میل کنند:

$$\text{حد } T_n = \text{حد } U_n = V$$

درآن صورت، جسم (V) هم، دارای حجمی برابر همین حد خواهد بود.

در پایان، امکان انتخاب چندوجهی‌هایی را که به‌صورتی «استاندارد»، به‌جسم‌مفروض نزدیک می‌شوند، یادآوری می‌کنیم. ابتدا، جسم را در درون یک‌مکعب مستطیل (W)، که وجه‌هایی موازی صفحه‌های مختصات دارد، محصور می‌کنیم؛ سپس، آن را به‌کمک یک رشته صفحه‌های موازی با وجه‌ها، به بخش‌ها، تقسیم می‌کنیم. از مکعب مستطیل‌های جزئی واقع در درون (V)، جسم $(\widetilde{X})$ را، و با اضافه‌کردن مکعب مستطیل‌های جزئی که قسمتی از هرکدام آن‌ها در بیرون جسم (V) قرارگرفته است، جسم $(\widetilde{Y})$ را تشکیل می‌دهیم. این جسم‌ها، حالت‌های خاصی از چندوجهی‌های (X) و (Y) را نشان می‌دهند که، قبلاً، درباره آن‌ها صحبت کرده‌ایم. بزرگترین قطر را، درمکعب مستطیل‌های جزئی، با d نشان می‌دهیم.

۳) اگر به‌ازای $d \to 0$، هردو حجم $\widetilde{X}$ و $\widetilde{Y}$، به‌سمت حد مشترک V میل کنند، وتنها در چنین موردی، جسم (V) دارای حجم خواهد بود و، ضمناً، این حد مشترک، معرف حجم جسم (V) است.

اثبات همهٔ این حکم‌ها را، که به‌سادگی می‌توان از بحث شمارهٔ ۳۳۶ نمونه برداری کرد، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۳۴۱. طبقهٔ جسم‌های دارای حجم. شبیه حالت مساحت، وجود حجم برای جسم (V)، به‌طورکلی، بستگی به‌ویژگی مرز (S) این جسم دارد. به‌سادگی، می‌توان، این

معیاررا ثابت کرد [با ۳۳۸ مقایسه کنید]: برای وجود حجم جسم (V)، لازم و کافی است که مرز (S) آن، دارای حجم صفر باشد، یعنی این مرز را بتوان در چندوجهی با حجم به‌قدر دلخواه کوچك، محصور کرد.

از جملهٔ سطح‌های (یا رویه‌های) با حجم صفر، قبل از همه، می‌توان از سطح‌هایی نام بردکه با یکی از معادله‌های صریح زیر، قابل بیان باشند:

$$z=f(x, y),\quad y=g(z, x),\quad x=h(y, z)$$

کـه درآن‌ها، f و g و h، تابع‌هایی پیوسته از دوآوند خـود، در یك حوزهٔ محـدود، می‌باشند.

مثلاً فرض کنید، معادلهٔ $z=f(x, y)$ـ که در حوزهٔ (P)ـ که در درون مکعب‌مستطیل (R) قرار داردـ داده شده باشد. بنا برقضیهٔ شمارهٔ ۱۷۴، به‌ازای $\varepsilon>0$ دلخواه، می‌توان این مکعب مستطیل را، به‌مکعب مستطیل‌های آن‌قدر کوچك $(R_i)(i=1, 2, \dots, n)$ تقسیم کرد، که نوسان تابع f درآن بخش (P_i) ازحوزهٔ (P)، کـه در درون (R_i) واقع است، از $\frac{\varepsilon}{R}$ کوچکتر باشد. اگـر m_i و M_i را، کمترین و بیشترین مقدار تابـع f در (P_i) بگیریم، آن‌وقت، تمامی سطح موردنظر ما، می‌تواند در چنان چندوجهی محصور شودکه از مکعب مستطیل‌های با قاعده‌های R_i و ارتفاع‌هـای $\omega_i=M_i-m_i$ تشکیل شده است. حجم این چندوجهی چنین است:

$$\sum\omega_iR_i<\frac{\varepsilon}{R}\sum R_i=\varepsilon$$

واین، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

به‌این ترتیب، اگر جسم (V)، به‌وسیلهٔ چندسطح پیوسته، محصور شده باشد، به‌نحوی که، هرکدام از این سطح، به‌طور جداگانه، قابل بیان با معادله‌ای صریح باشند، آن‌گاه، این جسم دارای حجم است.

برای این‌که معیار خاصی پیدا کنیم کـه، در عمل، قابل استفاده باشد، مفهوم رویهٔ هموار (سطح هموار) را وارد می‌کنیم.

فرض کنیم، رویه را، با معادله‌های پارامتری، بیان کرده باشیم:

$$x=\varphi(u, v),\quad y=\psi(u, v),\quad z=\chi(u, v)$$

که درآن‌ها، φ و ψ و χ، همراه با مشتق‌های نسبی خـود، در یك حوزهٔ محدود بستهٔ (Q)

واقع برصفحهٔ uv، پیوسته‌اند. فرض می‌کنیم که مرز (L) این حوزه از منحنی‌های هموار، تشکیل شده باشد. بالاخره، فرض می‌کنیم که، رویه دارای نقطه‌های تکراری و، به‌طور کلی، نقطه‌های خاص، نباشد. با توجه به‌همهٔ این شرط‌ها، سطح مفروض را هموار می‌نامیم.

فرض کنیم M نقطهٔ دلخواهی از سطح باشد که با مقدارهای $u=\bar{u}$ و $v=\bar{v}$ از پارامترها، مشخص شده است. چون نقطهٔ M، نقطهٔ خاص نیست، می‌توان [**۲۲۸** را ببینید]*، نقطهٔ $(\bar{v}, \bar{u})$ واقع برصفحهٔ uv، با چنان همسایگی

$$\sigma=(\bar{u}-\delta, \bar{u}+\delta; \bar{v}-\delta, \bar{v}+\delta)$$

محصور کرد که بخشی ازسطح، که متناظر با آن است، با معادلهٔ صریح بیان شود. حالا، تنها این می‌ماند که، پیش قضیهٔ بورل [**۱۷۵**] را، درمورد حوزهٔ بستهٔ (Q) و درمورد دستگاه همسایگی‌های $\{\bar{\sigma}\}=\sum$ پوشانندهٔ آن، به‌کار بریم، تا امکان تقسیم سطح هموار موردنظر، به‌تعدادی متناهی از بخش‌ها به‌دست آید، به‌نحوی که هرکدام از آن‌ها، با یکی از گونه‌های معادله‌های صریح، قابل بیان باشند. ازاین‌جا، نتیجه می‌شود که: سطح هموار، دارای حجم صفر است.

حالا دیگر، روشن است که

جسمی که به‌یک یا چند سطح هموار محدود باشد، دارای حجم است.

ضمناً، اگر روی سطحی که جسم را محصور کرده است، به‌تعداد متناهی، نقطه‌های خاص وجود داشته باشد، دراین حکم اشکالی به‌وجود نمی‌آورد، زیرا، می‌توان چنین نقطه‌هایی را، باهمسایگی‌هایی به‌حجم به‌دلخواه کوچک، جدا کرد.

۳۴۲. بیان حجم‌ها، باانتگرال‌ها. از نکته‌ای تقریباً روشن، آغاز می‌کنیم: استوانهٔ قائم به‌ارتفاع H، که قاعدهٔ آن، شکل مستوی تربیع‌پذیری باشد، دارای حجمی است برابر با حاصل‌ضرب مساحت قاعده درارتفاع: $V=P.H$.

چندضلعی‌های (A_n) و (B_n) را انتخاب می‌کنیم که، به‌ترتیب، مشمول (P) وشامل (P) هستند [**۳۳۶**، ۱)]، به‌طوری که مساحت‌های A_n و B_n، به‌سمت P میل کنند. اگر، براین چندضلعی‌ها، منشورهای قائم (X_n) و (Y_n)، به‌ارتفاع H، بناشوند، آن‌گاه، حجم‌های

$$X_n=A_n.H,\quad Y_n=B_n.H$$

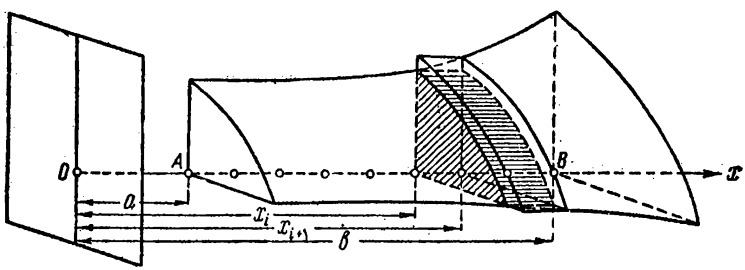
به‌سمت حد مشترک $V=P.H$ میل خواهند کرد، که بنابه ۱) شمارهٔ **۳۴۰**، همان حجم

---

*) اگر نقطهٔ $(\bar{v}, \bar{u})$، برمرز (L) حوزهٔ (Q) قرار داشته باشد، باید مطالب **۲۶۲** را، دربارهٔ آن، درنظر داشت.

استوانه خواهد بود.

حالا، جسم (V) را، بین صفحه‌های $x=a$ و $x=b$ درنظر می‌گیریم و آن را، با صفحه‌هایی عمود برمحور x، قطع می‌کنیم (شکل ۲۶)، همهٔ این مقطع‌ها را، تربیع‌پذیر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، مساحت مقطع نظیر طول x ـ با نماد $P(x)$ ـ تابعی پیوسته از x باشد $(a\leqslant x\leqslant b)$.



شکل ۲۶

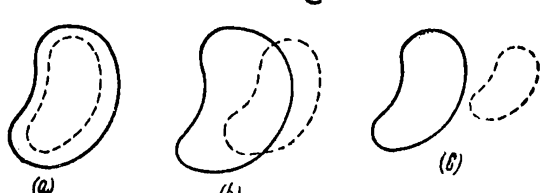
اگر دوتا ازاین مقطع‌ها را، برروی یك صفحهٔ عمود برمحور x تصویر کنیم، سه حالت ممکن است پیش‌آید: یکی ازآن‌ها، در درون دیگری قرار گیرد (شکل ۲۷، a)، یا قسمتی‌ازیکی، بردیگری واقع شود (شکل ۲۷، b) ویا یکی در بیرون دیگری واقع باشد (شکل ۲۷، c).

ابتدا، حالتی را درنظرمی‌گیریم که ازدومقطع مختلف، که برصفحه‌ای عمودبرمحور x تصویر شده‌اند، همواره، یکی در درون دیگری قرار گرفته باشد.

بااین شرط، می‌توان حکم کرد که، جسم (V) دارای حجمی است که با رابطهٔ زیر، بیان می‌شود:

$$V=\int_a^b P(x)\,dx \qquad (۱۵)$$

برای اثبات، پاره‌خط $[a, b]$، واقع برمحور x را، به‌وسیلهٔ نقطه‌های



شکل ۲۷

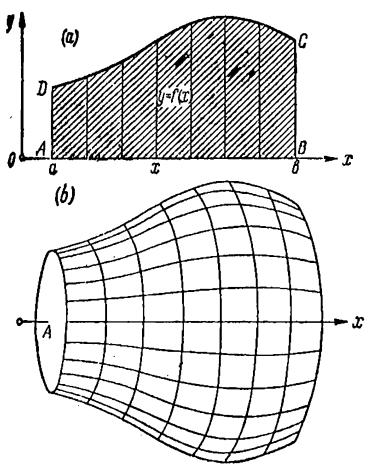
$$a=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$

تقسیم، و به‌وسیلهٔ صفحه‌های $x=x_i$، که از نقطه‌های تقسیم می‌گذرند، تمامی جسم را، به لایه‌هایی تجزیه می‌کنیم. لایهٔ iام، محصور بین صفحه‌های $x=x_i$ و $x=x_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ را در نظر می‌گیریم. تابع $P(x)$، در بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$، دارای بیشترین مقدار M_i و کمترین مقدار m_i است؛ اگر مقطع‌های نظیر مقدارهای مختلف x در این بازه را، بر صفحه‌ای، مثلاً $x=x_0$، جا دهیم، آن‌گاه، همهٔ آن‌ها (با توجه به شرط‌هایی که داشتیم) واقع در بزرگترین آن‌ها، به مساحت M_i، و شامل کوچکترین آن‌ها، به مساحت m_i، خواهند بود. اگر، روی این بزرگترین و کوچکترین مقطع‌ها، استوانه‌های قائمی به ارتفاع $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$، بنا کنیم، آن‌وقت، بزرگترین آن‌ها، شامل لایهٔ مورد نظر جسم، و کوچکترین آن‌ها مشمول این لایه خواهد شد. در نتیجه، با توجه به شرط‌ها، حجم‌های این استوانه‌ها، به‌ترتیب، $M_i\Delta x_i$ و $m_i\Delta x_i$ خواهد بود.

از استوانه‌های درونی، جسم (T) و از استوانه‌های بیرونی، جسم (U) تشکیل می‌شود که حجم‌های آن‌ها، به‌ترتیب، برابرند با

$$\sum_i M_i\Delta x_i,\quad \sum_i m_i\Delta x_i$$

و وقتی که $\lambda=\max\Delta x_i$ به‌سمت صفر میل کند، دارای حد مشترک (۱۵) هستند. بنابر ۳۴۰، ۲)، همین حد مشترک، برابر با حجم جسم (V) خواهد بود.*



شکل ۲۸

حالت خاص مهمی، که درمورد آن، وضع استقرار مقطع‌ها، به‌همان صورتی است که دراین‌جا شرط کرده‌ایم، عبارت است از جسم دوار. درصفحهٔ xy، منحنی با معادلهٔ $(a\leqslant x\leqslant b)\ y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم، که در آن، $f(x)$، تابعی پیوسته و غیر منفی است. ذوزنقه منحنی‌الخط آن را، دور محور x، دوران می‌دهیم (شکل ۲۸،

*) مثلاً اگر بازه را به‌بخش‌های برابر تقسیم کنیم، به‌سادگی می‌توان دو دنبالهٔ جسم‌های درونی و بیرونی را، که دربارهٔ آن‌ها صحبت می‌کنیم، تشخیص داد.

a و b). جسم (V)، که از این راه به‌دست می‌آید، با حالت مورد بحث ما، سازگار است، زیرا مقطع‌های آن، برروی صفحهٔ عمود برمحور x، به‌صورت دایره‌های هم‌مرکز، تصویر می‌شوند. دراین‌جا

$$P(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2$$

به‌نحوی که

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx \qquad (۱۶)$$

اگر ذوزنقهٔ منحنی‌الخط، هم از پایین وهم ازبالا، با منحنی‌های $y_1=f_1(x)$ و $y_2=f_2(x)$ محدود باشد، خواهیم داشت:

$$V=\pi\int_a^b[y_2^2-y_1^2]dx=\pi\int_a^b\{[f_2(x)]^2-[f_1(x)]^2\}dx \qquad (۱۷)$$

حتی اگر شرطی که دربارهٔ مقطع‌ها داشتیم، دراین‌جا صدق نکند، نتیجهٔ حاصل، درمورد این گونه جسم‌ها، که به‌صورت مجموع یا تفاضل جسم‌هایی هستند که هرکدام از آن‌ها با شرط موردنظر سازگارند، درست است.

درحالت کلی، تنها می‌توان گفت: اگر جسم (V) دارای حجم باشد*، می‌توان آن را با رابطهٔ (۱۵) بیان کرد.

در واقع، با مفروض بودن $\varepsilon>0$ غیرمشخص، می‌توانیم بین صفحه‌های $x=a$ و $x=b$، دوجسم $(\widetilde{X})$ و $(\widetilde{Y})$ را، که از مستطیل‌ها درست شده‌اند، طوری بناکنیم که اولی واقع در (V) و دومی شامل (V) باشد و، ضمناً، داشته باشیم $\widetilde{Y}-\widetilde{X}<\varepsilon$. درمورد این دوجسم، می‌توان رابطه را به‌کار برد و، بنابراین، اگر مقطع‌های قائم آن‌ها را، $A(x)$ و $B(x)$ بنامیم، داریم:

$$\widetilde{X}=\int_a^b A(x)dx,\quad \widetilde{Y}=\int_a^b B(x)dx$$

از طرف دیگر، چون داریم: $A(x)\leqslant P(x)\leqslant B(x)$، خواهیم داشت:

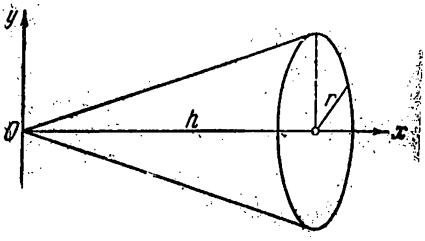
$$\widetilde{X}=\int_a^b A(x)\,dx\leqslant\int_a^b P(x)\,dx\leqslant\int_a^b B(x)\,dx=\widetilde{Y}$$

---

*) چنین خواهد بود، اگر مثلاً، جسم، با یك یا چند رویهٔ هموار، محدودشده باشد [۳۴۱].

به‌طوری که حجم V و انتگرال $\int_a^b P(x)dx$، هر دو بین مرزهای $\widetilde{X}$ و $\widetilde{Y}$ قرار گرفته‌اند که اختلافی کمتر از ε دارند. از همین‌جا، نتیجهٔ مطلوب، حاصل می‌شود.

۳۴۳. مثال‌ها. ۱) مطلوب است حجم مخروط دوار، به‌شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h.



شکل ۲۹

از محور مخروط، صفحهٔ قاطعی می‌گذرانیم و همین محور را، به‌عنوان محور x، انتخاب می‌کنیم. اگر مبداء را در رأس مخروط و محور y را عمود بر محور مخروط، روی صفحهٔ مقطع، در نظر بگیریم (شکل ۲۹)، معادلهٔ مولد مخروط چنین می‌شود:

$$y=\frac{r}{h}x$$

و از روی رابطهٔ (۱۶)، داریم:

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

و این نتیجه را، از دورهٔ دبیرستانی، می‌دانیم.

۲) فرض کنیم، بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$، دور محور x دوران کند، چون

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

بنابراین، برای حجم بیضوی دوار، خواهیم داشت:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

به‌همین ترتیب، می‌توان برای حجم جسم حاصل از دوران دور محور y، عبارت $\frac{4}{3}\pi a^2b$

را به‌دست آورد. از این رابطه‌ها، با فرض $a=b=r$، حجم کرهٔ به‌شعاع r، پیدا می‌شود: $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$.

۳) حجم جسمی را پیدا کنید که از دوران منحنی زنجیری $y=a\cdot\mathrm{ch}\frac{x}{a}$، دور محور x، بین مقطع‌های نظیر نقطه‌های ۰ و x به‌دست می‌آید.

داریم:

$$V=\pi a^۲\int_۰^x \mathrm{ch}^۲\frac{x}{a}dx=\frac{۱}{۲}\pi a^۲\int_۰^x\left(۱+\mathrm{ch}\frac{۲x}{a}\right)dx=$$

$$=\frac{۱}{۲}\pi a^۲\left(x+\frac{a}{۲}\mathrm{sh}\frac{۲x}{a}\right)=\frac{۱}{۲}\pi a\left(ax+a\cdot\mathrm{ch}\frac{x}{a}\cdot a\cdot\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right)$$

با توجه به‌این نکته که $a\cdot\mathrm{sh}\frac{x}{a}$، همان طول کمان s این منحنی است [۳۳۱، ۱)]، سرانجام داریم:

$$V=\frac{۱}{۲}\pi a(ax+s\cdot y)$$

۴) به‌همین ترتیب، برای شاخه‌ای از سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(۱-\cos t)\qquad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$$

اگر تبدیل $x=a(t-\sin t)$، $dx=a(۱-\cos t)dt$ را در نظر بگیریم، معادله‌های پارامتری منحنی، ساده‌تر می‌شوند و رابطهٔ

$$V=\pi\int_۰^{۲\pi a} y^۲dx$$

چنین می‌شود:

$$V=\pi a^۳\int_۰^{۲\pi}(۱-\cos t)^۳dt=$$

$$=\pi a^۳\left(\frac{a}{۲}t-۴\sin t+\frac{۳}{۴}\sin ۲t+\frac{۱}{۳}\sin^۳t\right)\Big|_۰^{۲\pi}=۵\pi^۲a^۳$$

۵) همین‌طور، برای آستروئید $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$.

داریم:

$$y=(a^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۳}{۲}},\quad V=\pi\int_{-a}^{a}\left(a^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۳}dx=\frac{۳۲}{۱۰۵}\pi a^{۳}$$

پیشنهاد می‌کنیم، از معادله‌های پارامتری آستروئید آغاز کنید و (مثل تمرین قبل)، با انجام تغییر متغیر، همین نتیجه را به‌دست آورید.

۶) حجم بخش مشترک سهموی $x^{۲}+y^{۲}=۲az$ و کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۳a^{۲}$ را پیدا کنید.

حل. این هر دو جسم، همراه با بخش مشترک آن‌ها، جسم دوار دور محور z را تشکیل می‌دهند. مقطع سطح‌های نامبرده، روی صفحهٔ $z=a$ قرار دارد.

صفحه‌های عمود بر محور z، جسم مفروض را، در دایره‌هایی قطع می‌کنند؛ مجذور شعاع‌های این دایره‌ها، در حالت $z\leqslant a$ برابر $۲az$ و در حالت $z>a$ برابر $۳a^{۲}-z^{۲}$ می‌شود. با استفاده از رابطهٔ مشابه (۱۶) خواهیم داشت:

$$V=۲\pi a\int_{۰}^{a}zdz+\pi\int_{a}^{a\sqrt{۳}}(۳a^{۲}-z^{۲})dz=\frac{\pi a^{۳}}{۳}(۶\sqrt{۳}-۵)$$

۷) حجم مشترک کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=R^{۲}$ و مخروط $x^{۲}=y^{۲}+z^{۲}$ $(x\geqslant ۰)$ را پیدا کنید.

راهنمائی. مقطع دو سطح، روی صفحهٔ $x=\frac{R}{\sqrt{۲}}$ قرار دارد. داریم:

$$V=\pi\int_{۰}^{\frac{R}{\sqrt{۲}}}x^{۲}dx+\pi\int_{\frac{R}{\sqrt{۲}}}^{R}(R^{۲}-x^{۲})dx=\frac{\pi R^{۳}}{۳}(۲-\sqrt{۲})$$

تا این‌جا، با مثال‌هایی سروکار داشتیم که از رابطهٔ خاص (۱۶) استفاده می‌کردند؛ حالا، به‌سراغ رابطهٔ کلی (۱۵) می‌رویم. از آن‌جا که خود وجود حجم را، در همهٔ حالت‌ها، می‌توان، مثلاً با استفاده از ملاحظه‌های شمارهٔ ۳۴۱، ثابت کرد، در این مثال‌ها، تنها به محاسبهٔ حجم خواهیم پرداخت.

۸) تعیین حجم قطعهٔ استوانه‌ای. جسم هندسی، که از استوانه دوار قائم، به وسیلهٔ صفحه‌ای که از قطر قاعده گذشته است، بریده شده باشد، به این نام خوانده می‌شود (شکل ۳۰).

فرض می‌کنیم که قاعدهٔ استوانه، دایره‌ای به‌شعاع a باشد:

$$x^2+y^2\leqslant a^2$$

و صفحهٔ‌قاطع، که ازقطر AA' می‌گذرد، باصفحهٔ قاعده، زاویه‌ای‌برابر α بسازد. مساحت مقطعی را تعیین می‌کنیم که بر محور x عمود است و آن‌را در نقطهٔ $M(x)$ قطع می‌کند. این مقطع، یك مثلث قائم‌الزاویه است؛ معلوم است که

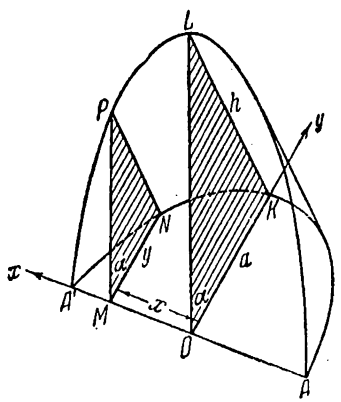
$$P(x)=\text{مساحت}MNP=\frac{1}{2}y^2tg\alpha=\frac{1}{2}(a^2-x^2)tg\alpha$$

به‌طوری‌که، با توجه به‌رابطهٔ (۱۵) داریم:

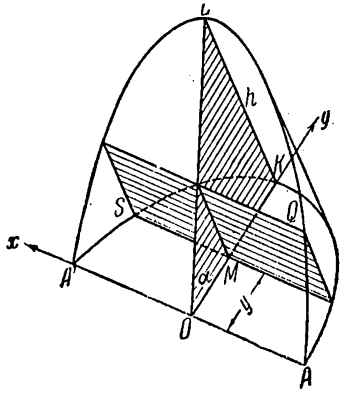
$$V=\frac{1}{2}tg\alpha\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{2}{3}a^3tg\alpha=\frac{2}{3}a^2h$$

که در آن، $h=KL$، ارتفاع قطعه استوانه است.

جالب است یادآوری کنیم که می‌توانستیم همین حجم را، با تبدیل نقش محور x به‌محور y نیز به‌دست آوریم، یعنی جسم را با صفحه‌های عمود بر محور y قطع کنیم (شکل ۳۱). چنین صفحه‌ای، که از نقطهٔ M به‌عرض y می‌گذرد، جسم را در مستطیل SQ قطع می‌کند که مساحت آن عبارت است از



شکل ۳۰



شکل ۳۱

$$P(y)=۲xytg\alpha=۲tg\alpha\cdot y\sqrt{a^۲-y^۲}$$

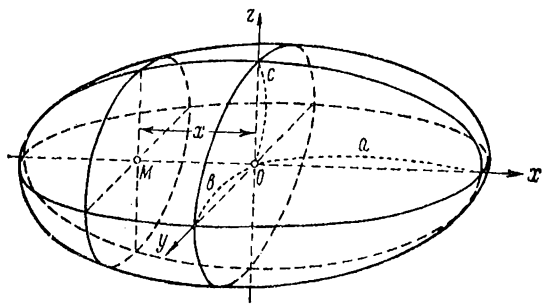
به‌همین مناسبت، شبیه (۱۵)

$$V=۲tg\alpha\int_۰^a y\sqrt{a^۲-y^۲}dy=\frac{۲}{۳}tg\alpha(a^۲-y^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^a=\frac{۲}{۳}a^۳tg\alpha$$

۹) مطلوب است حجم بیضوی سه محوری، که با معادلهٔ متعارف (کانونی)

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$$

داده شده است (شکل ۳۲).



شکل ۳۲

صفحهٔ عمود بر محور x، که بر نقطهٔ $M(x)$ از این محور می‌گذرد، بیضوی رادر یك بیضی قطع می‌کندکه معادلهٔ تصویرآن بر صفحهٔ yz چنین است:

$$\frac{y^۲}{b^۲\left(۱-\frac{x^۲}{a^۲}\right)}+\frac{z^۲}{c^۲\left(۱-\frac{x^۲}{a^۲}\right)}=۱ \qquad (x=\text{const}\cdot)$$

از این‌جا روشن است‌که، نیم‌قطرهای آن، به‌ترتیب، عبارتند از:

$$b\sqrt{۱-\frac{x^۲}{a^۲}}, \qquad c\sqrt{۱-\frac{x^۲}{a^۲}}$$

و مساحت مقطع، این‌طور بیان می‌شود [۳۳۹، ۲)، ۸)، ۱۵) را ببینید].

$$P(x)=\pi bc\left(۱-\frac{x^۲}{a^۲}\right)=\frac{\pi bc}{a^۲}(a^۲-x^۲)$$

بنا براین، طبق رابطهٔ (۱۵)، حجم مورد نظر چنین است:

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi abc$$

۱۰) مطلوب است محاسبهٔ حجم بیضوی

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=1$$

حل. اگر z را تثبیت کنیم، در آن‌صورت، معادلهٔ مقطع نظیر (یا درست‌تر، تصویر آن بر صفحهٔ xy) عبارت خواهد بود از

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

که در آن

$$a=A,\ b=H,\ c=B,\ d=Gz,\ e=Fz,\ f=Cz^2-1$$

با توجه به ۳۳۹، ۷)، مساحت این مقطع، برابر است با

$$P(z)=-\frac{\pi\Delta^*}{(AB-H^2)^{\frac{3}{2}}}$$

که منظور از Δ^*، دترمینان زیر است:

$$\begin{vmatrix} A & H & Gz \\ H & B & Fz \\ Gz & Fz & Cz^2-1 \end{vmatrix}=\Delta z^2-(AB-H^2)$$

که در آن

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$$

که با قرار دادن، نتیجه می‌شود:

$$P(z)=-\frac{\pi}{(AB-H^2)^{\frac{3}{2}}}[Az^2-(AB-H^2)]$$

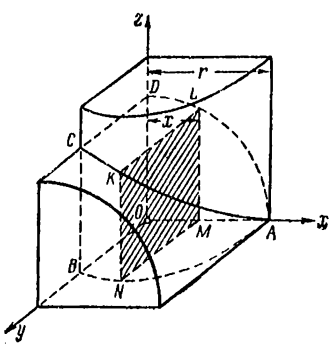
معلوم است که z، تنها می‌تواند در فاصلهٔ

$$\text{از } -\sqrt{\frac{AB-H^2}{\Delta}} \text{ تا } +\sqrt{\frac{AB-H^2}{\Delta}}$$

تغییر کند. سرانجام، با انتگرال‌گیری در این فاصله، به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{4}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$

۱۱) دو استوانهٔ دایره‌ای به‌شعاع r را درنظر می‌گیریم. محورهای این‌دو استوانه، بازاویهٔ‌قائمه، یکدیگر راقطع کرده‌اند. می‌خواهیم حجم‌جسمی را، که محدود به آن‌هاست، پیدا کنیم.



شکل ۳۳

شکل $OABCD$ (شکل ۳۳)، یك هشتم جسم مورد نظر ما را تشکیل می‌دهد. محور x را از نقطهٔ O، محل برخورد محورهای دواستوانه، عمود بر هر دومحور رسم می‌کنیم. از تقاطع‌جسم $OABCD$، با صفحه‌ای که عمود بر محور x و به‌فاصلهٔ x از O رسم شده است، مربع $KLMN$ حاصل می‌شود، که ضلع آن: $MN=\sqrt{r^2-x^2}$، به‌نحوی که: $P(x)=r^2-x^2$. و از روی رابطهٔ (۱۵) داریم:

$$V=8\int_0^r (r^2-x^2)dx=\frac{16}{3}r^3$$

۱۲) همان مسألهٔ ۱۱) را، با این‌فرض، حل می‌کنیم که استوانه‌ها، دارای شعاع‌های مختلف r و $R>r$ باشند.

در مقایسه با مسألهٔ قبلی، تنها این اختلاف وجود دارد که، به‌جای مربع، در مقطع جسم مورد نظر با صفحهٔ به‌فاصلهٔ x از O، مستطیلی با ضلع‌های $\sqrt{r^2-x^2}$ و $\sqrt{R^2-x^2}$ به‌دست می‌آید. بنابراین، در این حالت، حجم V، با انتگرال بیضوی زیر، بیان می‌شود:

$$V=8\int_0^r \sqrt{(R^2-x^2)(r^2-x^2)}\,dx$$

یا، اگر تبدیل $x = r\sin\varphi$ را انجام دهیم و $k = \frac{r}{R}$ بگیریم:

$$V = 8Rr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 8Rr^2 \cdot I$$

انتگرال I، به‌انتگرال‌های بیضوی کامل، از هر دو نوع، منجر می‌شود. قبل از همه

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} d\varphi - k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} d\varphi = I_1 + I_2$$

ولی

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} d\varphi = \frac{k^2 - 1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} +$$

$$+ \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \mathrm{K}(k) + \frac{1}{k^2} \mathrm{E}(k)$$

از طرف دیگر، با انتگرال گیری جزءبه‌جزء، داریم:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{2} \sin\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2\varphi) \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \mathrm{E}(k) - 2I$$

از آن‌جا

$$I = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{k^2} + 1\right)\mathrm{E}(k) - \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)\mathrm{K}(k)\right]$$

و سرانجام

$$V=\frac{\lambda R^{۳}}{۳}[(۱+k^{۲})\mathrm{E}(k)-(۱-k^{۲})\mathrm{K}(k)]$$

۳۴۴. مساحت سطح دوار. فرض کنیم، منحنی (شکل ۳۴)، بر صفحهٔ xy (درست‌تر: بر نیم‌صفحهٔ بالایی)، با معادله‌های به‌صورت (۶)، مفروض باشد، که در آن، φ و ψ تابع‌هایی پیوسته با مشتق‌های پیوستهٔ φ' و ψ' هستند. اگر فرض کنیم که نقطهٔ تکراری یا نقطهٔ خاص، بر منحنی وجود نداشته باشد، می‌توانیم کمان s را، که از نقطهٔ $A(t_۰)$ محاسبه می‌شود، به‌عنوان پارامتر در نظر بگیریم و به‌نمایش زیر، برای منحنی، برسیم:

$$x=\Phi(s),\quad y=\Psi(s) \qquad (۱۸)$$

اگر S را، درازای تمامی منحنی AB بگیریم، در این‌جا، پارامتر s از ۰ تا S تغییر می‌کند.

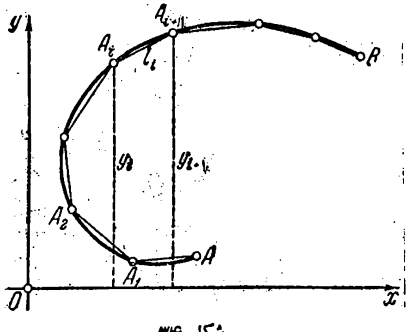
اگر این منحنی را، دور محور x، دوران دهیم، این منحنی یك سطح دوار به‌وجود خواهد آورد که می‌خواهیم مساحت آن‌را، محاسبه کنیم.

در این جا، به تعریف دقیق مفهوم مساحت سطح «خمیده» (یعنی سطح غیرمستوی)، در حالت کلی، نمی‌پردازیم و، آن‌را، به‌جلد سوم موکول می‌کنیم. فعلاً، این تعریف را، اختصاصاً، برای سطح دوار می‌دهیم و به‌محاسبهٔ مساحت آن می‌پردازیم. ضمناً، از قاعده‌هایی آغاز می‌کنیم، که از دورهٔ دبیرستانی، دربارهٔ مساحت سطح جانبی استوانه، مخروط و مخروط ناقص، می‌دانیم.

به این‌ترتیب، رابطه‌های حاصل، حالت‌های خاصی از رابطهٔ کلی مربوط به‌مساحت سطح خمیده خواهند بود.

بر منحنی AB و در جهت از A به B، یك رشته نقطه‌های (شکل را ببینید)

$$A_۰=A,\ A_۱,\ A_۲,\ \dots,\ A_i,\ A_{i+۱},\ \dots,\ A_{n-۱},\ A_n=B \qquad (۱۹)$$



شکل ۳۴

انتخاب می‌کنیم و خط شکستهٔ $AA_۱\dots A_{n-۱}B$ را، که در منحنی محاط شده است، در نظر می‌گیریم. این خط شکسته را، همراه با خود منحنی، دور محور x دوران می‌دهیم؛ خط شکسته، سطحی را می‌پیماید که مساحت آن‌را، می‌توانیم، از روی قاعده‌های مقدماتی هندسه، تعیین کنیم. قرار می‌گذاریم که: منظور از مساحت سطحی که به وسیلهٔ منحنی پیموده

می‌شود، عبارت است از P، حد مساحت Q از سطحی که به‌وسیلهٔ خط شکسته پیموده می‌شود، وقتی که بزرگترین کمان جزئی به سمت صفر میل کند. این تعریف مساحت سطح دوار، کلید محاسبهٔ آن را به‌دست می‌دهد.

می‌دانیم که، رشته نقطه‌های (۱۹) را می‌توان، با شروع از رشته مقدارهای صعودی s، واقع بین ۰ و S، به‌دست آورد.

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_i < s_{i+1} < \cdots < s_{n-1} < s_n = S$$

هرجزء از خط شکسته، ضمن دوران دور محور x، سطح یک مخروط ناقص را می‌پیماید*. اگر عرض‌های نقطه‌های A_i و A_{i+1} را، به‌ترتیب، با y_i و y_{i+1}، و درازای جزء A_iA_{i+1} را با l نشان دهیم، آن‌وقت، مساحتی که جزء iام می‌پیماید، عبارت است از

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot l_i$$

ومساحتی که تمامی خط شکسته می‌پیماید:

$$Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} l_i$$

این مجموع را، می‌توان به‌ترتیب زیر، به‌دو مجموع تبدیل کرد:

$$Q = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i + \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) l_i$$

چون تابع $y = \Psi(s)$ پیوسته‌است (ازروی ویژگی پیوستگی یکنواخت)، می‌توان فرض کرد که منحنی به‌قسمت‌های آن‌قدر کوچك تقسیم شده است که تمامی تفاضل‌های $y_{i+1} - y_i$، از لحاظ قدرمطلق، از عدد مثبت به‌قدر دلخواه کوچك ε تجاوز نمی‌کنند. آن‌وقت

$$\left| \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) l_i \right| \leqslant \varepsilon\pi \sum_{i=0}^{n-1} l_i \leqslant \varepsilon\pi s$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود که، این مجموع، به‌ازای $\max \Delta s_i \to 0$، به‌سمت صفر میل می‌کند. آن‌چه که به‌مجموع

$$2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i l_i$$

---

*) درحالت خاص، ممکن است این سطح، به‌سطح استوانه یا مخروط تبدیل شود، ولی در هرحال، می‌توان مساحت آن را، ازروی رابطهٔ کلی مربوط به‌مخروط ناقص به‌دست آورد.

مربوط می‌شود، می‌توان آن را، به‌دو مجموع تجزیه کرد:

$$۲\pi\sum_{i=۰}^{n-۱} y_i\Delta s_i - ۲\pi\sum_{i=۰}^{n-۱} y_i(\Delta s_i - l_i)$$

چون تابع $\Psi(s)$ پیوسته است، بنابراین کران‌دار است، به‌طوری‌که همهٔ $|y_i| \leqslant M$، که در آن، M، یك عدد مثبت است. اگر مجموع آخری را با τ نشان دهیم، داریم:

$$|\tau| = ۲\pi\left|\sum_{i=۰}^{n-۱} y_i(\Delta s_i - l_i)\right| < ۲\pi M\left(S - \sum_{i=۰}^{n-۱} l_i\right)$$

اگر منحنی را، به‌بخش‌های هرچه کوچکتر، تقسیم کنیم، تفاضل

$$S - \sum_{i=۰}^{n-۱} l_i$$

با توجه به‌تعریف درازای کمان (به‌عنوان حد محیط خط شکستهٔ محاطی)، به‌سمت صفر میل می‌کند. ولی، در آن‌صورت: $\tau \longrightarrow ۰$.

مجموع باقی‌ماندهٔ

$$\sigma = ۲\pi\sum_{i=۰}^{n-۱} y_i\Delta s_i$$

عبارت است از مجموع انتگرالی، برای انتگرال

$$۲\pi a\int_{۰}^{s} y\,ds$$

که، به‌علت پیوستگی تابع $y = \Psi(s)$، وجود دارد، به‌طوری‌که به‌ازای $\max \Delta s_i \longrightarrow ۰$، مجموع σ، به‌سمت این انتگرال، میل می‌کند.

بالاخره، معلوم می‌شود که ــ با توجه به‌شرط‌های مفروض ــ مساحت سطح دوار وجود دارد و با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$P = ۲\pi\int_{۰}^{s} y\,ds = ۲\pi\int_{۰}^{s} \Psi(s)\,ds \qquad (۲۰)$$

اگر به‌نمایش پارامتری کلی (۶) منحنی برگردیم، با انجام تغییر متغیر در انتگرال

---

*) این حکم، مستقیماً، از تعریف منحنی سادهٔ باز، نتیجه می‌شود، ولی، با تجزیهٔ منحنی بسته به‌دو منحنی باز، می‌توان آن‌را، برای هر منحنی بستهٔ ساده‌ای هم به‌کار برد.

قبل [۳۱۳، (۹) را ببینید]، آن را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$P=2\pi\int_{t_0}^{T} y\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=2\pi\int_{t_0}^{T}\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \quad (21)$$

درحالت خاصی که معادلهٔ صریح $y=f(x)$، برای منحنی، داده شده باشد $(a\leqslant x\leqslant b)$ می‌توان نقش پارامتر را به x داد و به‌دست آورد:

$$P=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \quad (22)$$

۳۴۵. مثال‌ها. ۱) تعیین مساحت سطح منطقهٔ کروی. نیم‌دایره‌ای به‌مرکز مبداء و شعاع r را درنظر می‌گیریم و آن را، دور محور x، دوران می‌دهیم. ازمعادلهٔ دایره‌داریم: $y=\sqrt{r^2-x^2}$، بنابراین

$$y_x'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad \sqrt{1+y_x'^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad y\sqrt{1+y_x'^2}=r$$

دراین حالت، مساحت سطح منطقه، که به‌وسیلهٔ کمانی پیموده شده است که دوانتهای آن، دارای طول‌های x_1 و $x_2>x_1$ است، از روی رابطهٔ (۲۲) به‌دست می‌آید:

$$P=2\pi r\int_{x_1}^{x_2} dr=2\pi r(x_2-x_1)=2\pi rh$$

که در آن، h، ارتفاع منطقه است. به‌این‌ترتیب، مساحت سطح منطقهٔ کروی، برابراست با حاصل‌ضرب محیط دایرهٔ عظیمه، در ارتفاع منطقه.

درحالت خاص، به‌ازای $x_1=-r$ و $x_2=r$، یعنی به‌ازای $h=2r$، مساحت کره به‌دست می‌آید: $P=4\pi r^2$.

۲) تعیین مساحت سطح حاصل از دوران کمانی از منحنی زنجیری $y=a\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a}$، که دو انتهای آن، دارای طول‌های ۰ و x باشند.

چون داریم: $\sqrt{1+y_x'^2}=\operatorname{ch}\frac{x}{a}$، از روی رابطهٔ (۲۲):

$$P=2\pi\int_0^x \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx=\frac{2}{a}V$$

که در آن، V، حجم جسم دوار نظیر است [۳۴۳، ۳] را ببینید].

۳) همان مساحت، برای آستروئید $x=a\cdot\cos^3 t$، $y=a\cdot\sin^3 t$.

کافی است، مساحت سطح پیموده شده با کمان آستروئید، واقع در ربع اول $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ را، دوبرابر کنیم. قبلاً داشتیم:

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=3a\sin t\cos t$$

در این حالت، ازروی رابطهٔ (۲۱):

$$P=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt=$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=12\pi a^2\frac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}\pi a^2$$

۴) همان مساحت، برای سیکلوئید $x=a(t-\sin t)$، $y=a(1-\cos t)$.

چون $y=2a\sin^2\frac{t}{2}$، $ds=2a\sin\frac{t}{2}dt$، بنابراین

$$P=2\pi\int_0^{2\pi} 4a^2\sin^3\frac{t}{2}\,dt=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du=$$

$$=16\pi a^2\left(\frac{\cos^3 u}{3}-\cos u\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{64}{3}\pi a^2$$

۵) تعیین مساحت سطح حاصل از دوران کاردیوئید $r=a(1+\cos\theta)$، دور محور قطبی.

باید، دررابطهٔ اساسی (۲۱)، به‌مختصات قطبی رفت:

$$P=2\pi\int_0^S y\,ds=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{r^2+r_\theta'^2}\,d\theta \qquad (۲۳)$$

درحالت ما: $\alpha=0$ و $\beta=\pi$ و

$$y=r\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta=4a\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2},\quad ds=2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta,$$

بنابراین

$$P=۲\pi\cdot۸a^۲\int_۰^{\pi}\cos^۴\frac{\theta}{۲}\sin\frac{\theta}{۲}d\theta=\frac{۳۲}{۵}\pi a^۲$$

۶) به‌همین ترتیب، برای مساحت لمنیسکات $r^۲=۲a^۲\cos۲\theta$.

در این‌جا، $y=a\sqrt{۲}\sqrt{\cos۲\theta}\sin\theta$ و $ds=\frac{a\sqrt{۲}}{\sqrt{\cos۲\theta}}d\theta$، به‌نحوی که از روی رابطهٔ (۲۳)

$$P=۲\cdot۲\pi\cdot۲a^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\sin\theta d\theta=۸\pi a^۲\left(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\doteq۷/۳۶۱a^۲$$

۷) بالاخره سطح بیضوی دوار، چه در حالت کشیده و چه در حالت فشرده (شبه‌کره) را معین می‌کنیم.

اگر بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ را، دور محور x دوران دهیم $(a>b)$، به‌ترتیب، داریم:

$$y^۲=b^۲-\frac{b^۲}{a^۲}x^۲\quad yy'=-\frac{b^۲}{a^۲}x,$$

$$y\sqrt{۱+y'^۲}=\sqrt{y^۲+(yy')^۲}=\sqrt{b^۲-\frac{b^۲}{a^۲}x^۲+\frac{b^۴}{a^۴}x^۲}=$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^۲-\frac{a^۲-b^۲}{a^۲}x^۲}$$

ولی داریم: $c^۲=a^۲-b^۲$، که در آن، c عبارت است از فاصلهٔ کانون تا مرکز و $\frac{c}{a}$ برابر است با ε، خروج از مرکز بیضی. به‌این‌ترتیب:

$$y\sqrt{۱+y'^۲}=\frac{b}{a}\sqrt{a^۲-\varepsilon^۲x^۲}$$

و

$$P=۲\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^۲-\varepsilon^۲x^۲}dx=۴\pi\frac{b}{a}\int_۰^{a}\sqrt{a^۲-\varepsilon^۲x^۲}dx=$$

$$= ۴\pi\frac{b}{a}\left(\frac{۱}{۲}x\sqrt{a^۲-\varepsilon^۲x^۲}+\frac{a^۲}{۲\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Bigg|_۰^a =$$

$$= ۲\pi\frac{b}{a}(a\sqrt{a^۲-\varepsilon^۲a^۲}+a^۲\cdot\arcsin\varepsilon)$$

ولی داریم: $a^۲-\varepsilon^۲a^۲=a^۲-c^۲=b^۲$، به‌طوری که بالاخره داریم:

$$P=۲\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$$

اگر بیضی دور محور کوچکتر دوران کند، برای ساده‌تر شدن محاسبه‌ها، محور x را، منطبق بر همین محور کوچکتر بیضی می‌گیریم آن‌وقت، در عبارت حاصل برای $y\sqrt{۱+y'^۲}$، تنها باید جای a و b را عوض کرد، به‌نحوی که

$$y\sqrt{۱+y'^۲}=\frac{a}{b}\sqrt{b^۲+\frac{a^۲-b^۲}{b^۲}x^۲}=\frac{a}{b}\sqrt{b^۲+\frac{c^۲}{b^۲}x^۲}$$

و در نتیجه

$$P=۲\pi\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^۲+\frac{c^۲}{b^۲}x^۲}dx=$$

$$=۲\pi\frac{a}{b}\left[\frac{۱}{۲}x\sqrt{b^۲+\frac{c^۲}{b^۲}x^۲}+\frac{b^۳}{۲c}\ln\left(\frac{c}{b}x+\sqrt{b^۲+\frac{c^۲}{b^۲}x^۲}\right)\right|_{-b}^{b}=$$

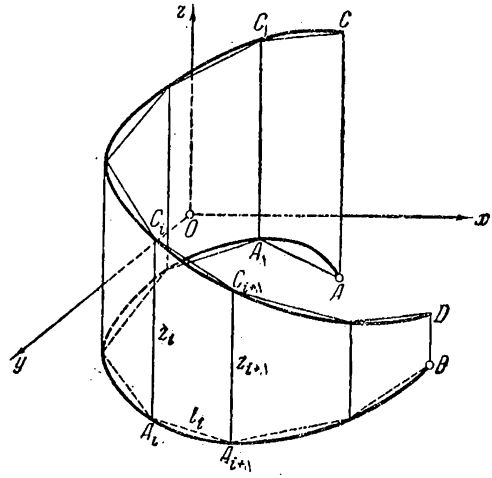
$$=۲\pi a\left(\sqrt{b^۲+c^۲}+\frac{a^۲}{۲c}\ln\frac{\sqrt{b^۲+c^۲}+c}{\sqrt{b^۲+c^۲}-c}\right)$$

ولی $a=\varepsilon a$ و $\sqrt{b^۲+c^۲}=a$، به‌طوری که، بالاخره، برای P به‌دست می‌آید:

$$P=۲\pi a\left(a+\frac{b^۲}{۲c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)=۲\pi a\left(a+\frac{b^۲}{۲c}\cdot\frac{۱}{\varepsilon}\ln\frac{۱+\varepsilon}{۱-\varepsilon}\right)$$

۳۴۶. مساحت سطح استوانه‌ای. باز هم، حالت خاصی از سطح خمیده را در نظر می‌گیریم و، برای آن، مفهوم مساحت را تعریف می‌کنیم (پیش از تعریف کلی سطح، که در آینده خواهیم دید)، منظور ما، سطح استوانه‌ای است.

به‌منحنی AB واقع برصفحهٔ xy برمی‌گردیم که دربارهٔ آن در **۳۴۴** صحبت کردیم.



شکل ۳۵

این منحنی را، به‌عنوان هادی انتخاب می‌کنیم و سطحی استوانه‌ای را در نظر می‌گیریم که مولدهای آن، موازی محور z باشد (شکل ۳۵). منحنی CD را، روی این سطح، طوری رسم می‌کنیم که، با هر یك از مولدها، در یك نقطه برخورد داشته باشد. این منحنی، به‌شرطی معین می‌شود که، به‌معادله‌های (۶)، معادلهٔ سومی را، اضافه کنیم:

$$z = \chi(t) \quad (\chi > 0) \qquad (۲۴)$$

می‌خواهیم مساحت P، بخشی از سطح استوانه‌ای، که «زیر این منحنی» واقع است، محاسبه کنیم.

مانند شمارهٔ ۳۴۴، کمان s را، به‌عنوان پارامتر وارد می‌کنیم. در این صورت، نه‌تنها، معادله‌های (۶) منحنی AB، به‌معادله‌های (۱۸) تبدیل می‌شوند، بلکه، معادلهٔ (۲۴) هم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$z = X(s)$$

خط شکستهٔ $AA_1 \dots A_{n-1}B$ را در منحنی AB و، متناظر با این نقطه‌ها، خط شکستهٔ $CC_1 \dots C_{n-1}D$ را در منحنی CD محاط می‌کنیم (شکل را ببینید)، و از ذوزنقه‌های $A_iA_{i+1}C_{i+1}C_i$، سطح منشوری محاط در سطح استوانه‌ای مفروض را، تشکیل می‌دهیم. منظور از مساحت سطح استوانه‌ای، عبارت است از حد P مساحت Q سطح‌های منشوری نامبرده، وقتی که بزرگترین جزء کمان به‌سمت صفر میل کند.

با فرض $z_i = A_iC_i$ (و حفظ نمادهای قبلی، در بقیهٔ موردها)، داریم:

$$Q=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{z_i+z_{i+1}}{2}l_i$$

با توجه به ملاحظه‌های شمارهٔ ۳۴۴ (که خواننده، خود می‌تواند به‌تمامی آن‌ها را انجام دهد)، مسأله، منجر به‌محاسبهٔ مجموع زیر می‌شود:

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i\Delta s_i$$

که به‌سادگی، مجموع انتگرالی در آن دیده می‌شود. سرانجام

$$P=\int_0^S z\,ds=\int_0^S \Psi(s)\,ds^*$$

با بازگشت به‌پارامتر غیرمشخص t، رابطهٔ کلی هم، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$P=\int_{t_0}^{T} z\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\int_{t_0}^{T}\chi(t)\sqrt{[\varphi'(t)^2]+[\psi'(t)]^2}\,dt \qquad (۲۵)$$

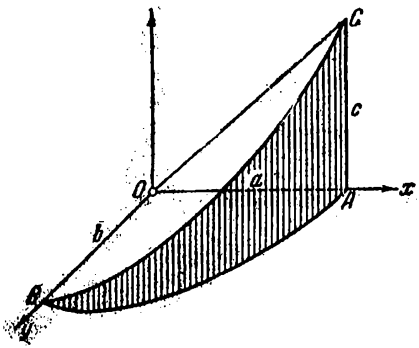
و بالاخره، برای حالتی که، منحنی AB به‌طور صریح داده‌شده باشد: $(a\leqslant x\leqslant b)\ y=f(x)$، این رابطه، چنین نوشته می‌شود:

$$P=\int_a^b z\sqrt{1+y_x'^2}\,dx=\int_a^b \chi(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad (۲۶)$$

۳۴۷. مثال‌ها. ۱) فرض کنیم، روی شکل ۳۶، منحنی AB، یك سهمی پارامتری به‌رأس B باشد، طبق نشانه‌هایی که در شکل گذاشته‌ایم، معادلهٔ آن چنین است:

$$y=b-\frac{bx^2}{a^2}$$

سطح استوانه‌ای که روی این منحنی بنا شده است، صفحهٔ OBC به‌معادلهٔ



شکل ۳۶

---

*) این نتیجه، وقتی کاملاً آشکار می‌شود که سطح استوانه‌ای را، روی صفحه بگسترانیم، به‌نحوی که شکل مورد نظر، به «ذوزنقهٔ منحنی‌الخط» تبدیل شود.

$$z=\frac{c}{a}x$$

قطع می‌کند مطلوب است مساحت P بخش ABC از رویهٔ استوانه‌ای.

حل. بنابر رابطهٔ (۲۶) داریم:

$$P=\int_0^a z\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{c}{a^3}\int_0^a x\sqrt{x^4+4b^2x^2}\,dx=\frac{c}{12b^2}[(a^2+4b^2)^{\frac{3}{2}}-a^3]$$

۲) اگر منحنی AB، یك چهارم دایرهٔ $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ باشد، نمی‌توانیم، بدون هیچ قید و شرطی، از رابطهٔ (۲۶) استفاده کنیم، زیرا، به‌ازای $x=a$، مشتق y'_x برابر ∞ می‌شود. معادله‌های پارامتری منحنی را می‌نویسیم:

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

با توجه به‌رابطهٔ کلی (۲۵) داریم:

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt=ac\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=ac$$

اگر به‌قطعهٔ استوانه‌ای برگردیم که دربارهٔ آن، در ۸، ۳۴۳) صحبت کرده‌ایم، آن‌وقت، مساحت جانبی آن ــ با توجه به‌نتیجه‌ای که هم‌اکنون به‌دست آوردیم ــ برابر $2ah$ $(c=h)$ می‌شود.

۳) همین مسأله را با این فرض حل می‌کنیم که کمان AB، یك‌چهارم این بیضی باشد:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

[به‌همان دلیل مسألهٔ قبل، در این‌جا هم، نمی‌توانیم از معادلهٔ صریح منحنی استفاده کنیم].

a) ابتدا فرض می‌کنیم $a>b$. با وارد کردن خروج از مرکز بیضی $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$، با توجه به‌دستور (۲۵)، داریم:

$$P=c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=\frac{c}{b}\int_0^a\sqrt{b^2+\varepsilon^2u^2}\,du$$

$(u=a\sin t)$ و بالاخره

$$P=\frac{۱}{۲}ac\left\{۱+\frac{۱-\varepsilon^۲}{۲\varepsilon}\ln\frac{۱+\varepsilon}{۱-\varepsilon}\right\}$$

b) در حالت $a<b$، خروج از مرکز بیضی $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{b^۲-a^۲}}{b}$ و

$$P=bc\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱-\varepsilon^۲\sin^۲t}\,\cos t\,dt=\frac{bc}{۲}\left\{\sqrt{۱-\varepsilon^۲}+\frac{۱}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right\}$$

۴) بخشی از سطح استوانه‌ای $x^۲+y^۲=Rx$ را، که به وسیلهٔ کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=R^۲$ محدود شده است، در نظر می‌گیریم. منحنی حاصل در مقطع را [منحنی ویویانی، ۲۲۹، ۱)]، همان‌طور که می‌دانیم، به‌این‌صورت می‌توان نوشت:

$$x=R\sin^۲t,\quad y=R\sin t\cos t,\quad z=R\cos t$$

اگر به‌یك هشتم اول اکتفا کنیم، آن‌گاه، t باید از ۰ تا $\dfrac{\pi}{۲}$ تغییر کند. روشن است که، دو معادلهٔ اول نقش معادلهٔ (۶) و معادلهٔ آخری نقش معادلهٔ (۲۴) را بازی می‌کنند.

مساحت سطح مفروض، با توجه به‌دستور (۲۵)، چنین می‌شود:

$$P=۴R^۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos t\,dt=۴R^۲$$

۵) مطلوب است مساحت سطح جسم مشترك دو استوانهٔ به‌شعاع‌های r، که محورهای آن‌ها، یکدیگر را تحت زاویهٔ قائمه، قطع می‌کنند [با ۳۴۳، ۱۱) مقایسه کنید]. دستگاه مختصات را، مثل شکل ۳۳ می‌گیریم.

با اکتفا به‌یکی از سطح‌های استوانه‌ای، برای یك هشتم اول داریم:

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t$$

و بالاخره

$$z=\sqrt{r^۲-x^۲}=r\sin t\quad\left(۰\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$$

از روی رابطهٔ (۲۵)، نصف مساحت مطلوب، برابر است با

$$\frac{۱}{۲}P=۸r^۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}sintdt=۸r^۲\Rightarrow P=۱۶r^۲$$

۶) همین مسأله را در حالتی حل می‌کنیم که استوانه‌ها، دارای شعاع‌های مختلف r و R، $R>r$ باشند [با ۳۴۳، ۱۲) مقایسه کنید].

ابتدا، بخشی از سطح استوانه‌ای به‌شعاع r را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$x=rsint,\quad y=rcost,\quad \left(۰\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}\right),$$

$$z=\sqrt{R^۲-x^۲}=\sqrt{R^۲-r^۲sin^۲t}=R\sqrt{۱-k^۲sin^۲t}\quad\left(k=\frac{r}{R}\right)$$

و بنابر رابطهٔ (۲۵)

$$P_۱=۸Rr\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱-k^۲sin^۲t}dt=۸RrE(k)$$

حالا، به‌سطح استوانه‌ای به‌شعاع R توجه می‌کنیم؛ نقش محور z و محور y را با هم عوض می‌کنیم. این‌بار

$$x=Rsint,\quad z=Rcost,$$

$$y=\sqrt{r^۲-x^۲}=\sqrt{r^۲-R^۲sin^۲t}=r\sqrt{۱-\frac{۱}{k^۲}sin^۲t}\quad\left(k=\frac{r}{R}\right)$$

ضمناً، (اگر، طبق معمول، به کنج یك هشتم اول اکتفا کنیم)، t می‌تواند تنها از ۰ تا $\arcsin k$ تغییر کند. آن‌وقت، با توجه به‌رابطهٔ مشابه (۲۵)، نتیجه می‌گیریم:

$$P_۲=۸\int_۰^{\arcsin k}y\sqrt{x_t'^۲+z_t'^۲}dt=۸Rr\int_۰^{\arcsin k}\sqrt{۱-\frac{۱}{k^۲}sin^۲t}dt$$

تبدیل

$$sint=ksin\varphi,\quad dt=\frac{kcos\varphi d\varphi}{\sqrt{۱-k^۲sin^۲\varphi}}$$

که در آن، φ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند، می‌دهد:

$$\int_{0}^{\arcsin k}\sqrt{1-\frac{1}{k^2}\sin^2 t}\,dt=k\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

به‌انتگرال اخیر، مثلاً در ۳۴۳، ۱۲) برخورد کرده‌ایم، که برابر است با

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\mathrm{K}(k)+\frac{1}{k^2}\mathrm{E}(k)$$

بنابراین

$$P_2=8R^2\{\mathrm{E}(k)-(1-k^2)\mathrm{K}(k)\}$$

و بالاخره

$$P=P_1+P_2=8R(R+r)\{\mathrm{E}(k)-(1-k)\mathrm{K}(k)\}$$

*

به‌همین‌جا، به‌کاربردهای هندسی ساده از انتگرال‌های معین پایان می‌دهیم و، برای بحث در حالت‌های بغرنج‌تر و کلی‌تر، منتظر جلد سوم می‌مانیم.

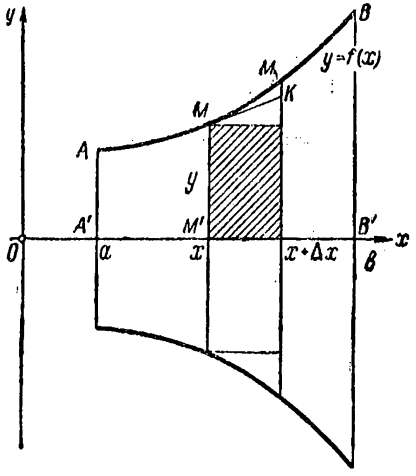
§۳. محاسبه کمیّت‌های مکانیکی و فیزیکی

۳۴۸. طرح کاربرد انتگرال معین. قبل از آن‌که به‌کاربرد انتگرال معین، درقلمرو مکانیک، فیزیک وصنعت بپردازیم، بهتراست مسیری‌را روشن کنیم که، معمولاً، درمسأله‌های عملی، از طریق آن، به‌انتگرال‌های معین می‌رسیم. برای این منظور، از طرحی کلی برای کاربرد انتگرال استفاده می‌کنیم، که متکی بر تفسیر هندسی‌آن باشد (تفسیری‌که تااین‌جا، با آن، آشنا شده‌ایم).

فرض کنیم که می‌خواهیم، کمیت ثابت Q (هندسی یا غیرهندسی) را، که بستگی به بازهٔ $[a, b]$ دارد، پیدا کنیم. ضمناً، فرض می کنیم، هر بازهٔ جزئی $[\alpha, \beta]$ واقع در $[a, b]$، نظیر بخشی ازکمیت Q باشد، به‌نحوی‌که، تقسیم بازهٔ $[a, b]$ به‌بازه‌های جزئی، به‌معنای بخش‌های متناظری ازکمیت Q باشد.

دقیق‌تربگوییم: صحبت برسر «تابعی ازبازه» $Q([\alpha, \beta])$ است‌که «دارای ویژگی جمع‌پذیری» باشد؛ یعنی، اگر بازهٔ $[\alpha, \beta]$، از دو بازهٔ جزئی $[\alpha, \gamma]$ و $[\gamma, \beta]$تشکیل شده باشد، داشته باشیم:

$$Q([\alpha, \beta])=Q([\alpha, \gamma])+Q([\gamma, \beta])$$



شکل ۳۷

و مسألهٔ ما، عبارت است از محاسبهٔ مقداری از آن، که متناظر با بازهٔ $[a, b]$ باشد.

به‌عنوان مثال، منحنی

$$y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$$

را، روی‌صفحه، درنظرمی گیریم (شکل ۳۷)*. آن‌وقت: ۱) درازای S منحنی AB، ۲) مساحت P، محدود به‌ذوزنقهٔ منحنی‌الخط $AA'B'B$ و ۳) حجم V جسم‌حاصل از دوران این‌ذوزنقه دور محور x ــ همهٔ این کمیت‌ها، برای ما آشنا هستند. به‌سادگی، می‌توان متوجه خویشاوندی «تابع‌هایی از بازه»، با این کمیت‌ها، شد.

«عنصر» ΔQ از کمیت Q، متناظر با «بازهٔ‌جزئی» $[x, x+\Delta x]$ را، درنظرمی گیریم. با آغاز از شرط‌های مسأله، کوشش می کنیم، برای ΔQ، مقداری تقریبی به‌صورت $q(x).\Delta x$، خطی نسبت به Δx، پیدا کنیم، به‌نحوی که تفاوت آن با ΔQ، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر از Δx باشد. به‌زبان دیگر، از «عنصر» بی‌نهایت کوچک ΔQ (به‌ازای $\Delta x \to 0$)، بخش اصلی آن‌را جدا می‌کنیم. روشن است که، در این‌صورت، خطای نسبی تساوی تقریبی

$$\Delta Q \doteq q(x)\Delta x \qquad (1)$$

همراه با Δx، به‌سمت صفر میل می کند.

مثلاً، در مثال ۱)، عنصر کمان MM_1 را می‌توان با پاره‌خط مماس MK عوض کرد، به‌نحوی که، از ΔS، بخش خطی

$$\sqrt{1+y_x'^2}.\Delta x = \sqrt{1+[f'(x)]^2}.\Delta x$$

جدا شود. در مثال ۲)، به‌طور طبیعی، نوار جزئی ΔP در مستطیل، با مساحت

$$y.\Delta x = f(x).\Delta x$$

---

*) تابع $f(x)$، پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته فرض می‌شود. برای مشخص بودن وضع، همیشه، فرض می کنیم که منحنی به‌سمت بالا می‌رود و تحدب آن به‌طرف پایین است.

عوض می‌شود. بالاخره، درمثال ۳)، ازلایهٔ جزئی ΔV، بخش‌اصلی آن، به‌صورت استوانهٔ دایره‌ای را جدا می‌کنیم، که حجم آن چنین است:

$$\pi y^{2}\Delta x=\pi[f(x)]^{2}\cdot\Delta x$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که، در همهٔ این حالت‌ها، خطای تعویض، بی‌نهایت کوچکی از درجهٔ بالاتر از Δx است. به‌خصوص*، این خطا، در حالت ۱)، کمتر از $KM_{1}=\Delta y-dy$، در حالت ۲)، کمتر از $\Delta x\Delta y$ و در حالت ۳) کمتر از $\pi(2y+\Delta y)\Delta x\Delta y$ است.

با توجه به‌آن‌چه گفتیم، می‌توان گفت که، کمیت Q، به‌روشنی، با انتگرال زیر بیان می‌شود:

$$Q=\int_{a}^{b}q(x)dx \qquad (۲)$$

برای روشن شدن مطلب، بازهٔ $[a, b]$ را، به‌وسیلهٔ نقطه‌های x_{1}، x_{2}، ...، x_{n-1}، به‌بازه‌های جزئی، تقسیم می‌کنیم:

$$[a, x_{1}], [x_{1}, x_{2}], \ldots, [x_{i}, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-1}, b]$$

چون هر بازهٔ $[x_{i}, x_{i+1}]$ یا $[x_{i}, x_{i}+\Delta x_{i}]$، نظیر بخش جزئی کمیت ما، تقریباً برابر است با $q(x_{i})\Delta x_{i}$، بنابراین، کمیت مطلوب Q، تقریباً با مجموع ریر بیان‌می‌شود:

$$Q\doteq\sum_{i}q(x_{i})\Delta x_{i}$$

هر قدر بازه‌های جزئی کوچکتر باشند، درجهٔ دقت مقدار حاصل هم بیشتر خواهد بود، به‌نحوی که Q، به‌روشنی، برابر می‌شود با حد مجموع نامبرده، یعنی در واقع، با انتگرال $\int_{a}^{b}q(x)dx$ بیان می‌شود.

از این نتیجه گیری، می‌توان، در مورد هر سه‌مثالی که مورد بررسی ما بود، استفاده کرد. اگر رابطه‌هایی که، در بالا، برای کمیت‌های S، P و V به‌دست آوردیم، تا حدی فرق داشت، به این علت است که، نه تنها محاسبهٔ آن‌ها، بلکه اثبات وجود آن‌ها را هم، براساس تعریف‌های مربوطه، شامل می‌شد.

به‌این‌ترتیب، تمامی کار، به‌برقراری تساوی تقریبی (۱)، منجر می‌شود که، ازآن‌جا، مستقیماً نتیجهٔ نهایی (۲) به‌دست می‌آید.

---

*) با توجه به‌فرض‌های پاورقی قبل.

معمولاً Δx و ΔQ را، dx و dQ می‌نویسند و برابری (۱)، برای «عنصر» dQ از کمیت Q، به‌این‌صورت نوشته می‌شود:

$$dQ = q(x)dx \qquad (۳)$$

سپس، این «عنصرها» را «جمع» می‌کنند (درواقع، انتگرال می‌گیرند)، که برای تمامی کمیت Q، منجر به (۲) می‌شود.

تأکید می‌کنیم که استفادهٔ از انتگرال، به‌جای مجموع معمولی، کاری اساسی است. مجموع، تنهامقدار تقریبی Q را به‌دست می‌داد، زیرا خطاهای‌ناشی از برابری‌های ازنوع (۳)، به‌طور جداگانه، برآن اثر می‌گذاشت، درحالی‌که،در گذر به‌حد، که به‌کمك آن از مجموع به‌انتگرال می‌رسیم، خطا از بین می‌رود ونتیجهٔ کاملاً درستی به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، ابتدا به‌خاطر سادگی‌کار، درعبارت مربوط به‌عنصر dQ، از بی‌نهایت‌کوچك‌های مرتبهٔ بالاتر صرف‌نظر وقسمت اصلی آن، جدا می‌شود و، سپس، به‌خاطر دقت‌کار، به‌جای جمع، انتگرال‌گیری را درنظر می‌گیرند و، بنابراین، به‌نتیجهٔ دقیق می‌رسند.

ضمناً، می‌توانستیم، از دیدگاه دیگری، به‌مساله نزدیك شویم. بخش متغیر کمیت Q را،که نظیر بازهٔ $[a, x]$ است: با $Q(x)$ نشان می‌دهیم؛ و به طور طبیعی، $Q(a)$ را برابر ۰ می‌گیریم. روشن‌است که، به‌چه‌ترتیبی می‌توان «تابع بازه‌ای» $Q([\alpha, \beta])$ را، برحسب «تابع نقطه‌ای» $Q(x)$ بیان‌کرد:

$$Q([\alpha, \beta]) = Q(\beta) - Q(\alpha)$$

در مثال‌های ما، تابع‌های‌نقطه‌ای عبارتند از: ۱) کمان متغیر AM، ۲) مساحت‌متغیر ذوزنقهٔ $AA'M'M$ و بالاخره ۳) حجم حاصل از دوران همین ذوزنقه.

کمیت ΔQ، به‌طور ساده، نمو تابع $Q(x)$ است و حاصل‌ضرب $q(x)\Delta x$، بخش اصلی آن، چیزی جز دیفرانسیل آن نیست [۱۰۳ و ۱۰۴]. بنابراین، تنها اگرمنظور dQ همان $dQ(x)$ باشد، برابری (۳)، نه‌مقداری تقریبی، بلکه‌مقداری دقیق‌است و، ازاین‌جا، بلافاصله، نتیجهٔ مطلوب، به‌دست می‌آید:

$$\int_a^b q(x)dx = Q(b) - Q(a) = Q([a, b]) = Q$$

با وجود این، توجه کنید که، درعمل، فکر جمع کردن عنصرهای بی‌نهایت کوچك، راحت‌تر و مفیدتر است.

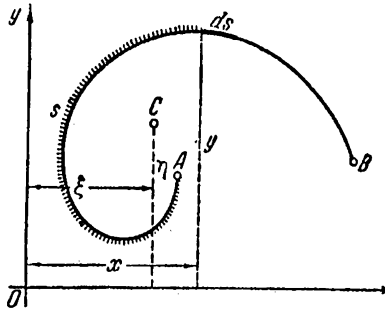
۳۴۹. پیداکردن گشتاور ایستائی (ممان استاتیك) و مرکز ثقل (گرانیگاه) منحنی.

می‌دانیم که، گشتاور ایستائی M، نقطهٔ مادی به‌جرم m، نسبت به‌یك محور، برابر است با حاصل‌ضرب جرم m درفاصلهٔ d نقطه تا محور. درحالت دستگاه n نقطهٔ مادی، با جرم‌های m_1، m_2، ...، m_n، که بامحوردریك صفحه باشندو، به‌ترتیب، به‌فاصله‌های d_1، ...، d_2، d_n از محور باشند، گشتاور ایستائی، با مجموع زیر، بیان می‌شود:

$$M = \sum_i m_i d_i$$

ضمناً، فاصله‌های نقطه‌های واقع دریك طرف محور، با علامت مثبت، وفاصله‌های نقطه‌های طرف دیگر، با علامت منفی، نشان داده می‌شوند.

اگرهم، جرم‌ها در نقطه‌های جداگانه‌ای متمرکز نباشند، و به‌طور پیوسته، روی‌یك خط یا یك شکل مستوی توزیع شده باشند، آن‌وقت، بـرای بیان گشتاور ایستائی، به‌جای مجموع، به‌انتگرال نیاز داریم.



شکل ۳۸

به‌تعیین گشتاور ایستائی جرمی کـه در طول یك‌منحنی‌مستوی AB توزیع شده است، نسبت به‌محور x، می‌پردازیـم (شکل ۳۸). ضمناً، فرض می‌کنیم که منحنی، همگن است، به‌نحوی‌که، چگالی خطی آن، ρ (یعنی‌جرم موجود در واحدطول)، ثابت باشد؛ حتی‌برای سادگی‌کار، $\rho = 1$ می‌گیریم (اگر ρ مخالف واحد باشد، کافی است نتیجهٔ حاصل را، در ρ ضرب‌کنیم). بـا این فرض‌ها، جـرم‌کمان دلخواهی ازمنحنی را، می‌توان تنها با طول‌آن اندازه‌گیری‌کرد، ومفهوم گشتاورایستائی، خصلتی کاملاً هندسی پیدا می‌کند. به طورکلی، هر وقت که دربارهٔ گشتاور ایستائی (یا دربارهٔ مرکز ثقل) یك منحنی‌ـ بدون ذکرنوع توزیع جرم در طول آن‌ـ صحبت می‌شود، همیشه، منظور این است‌که گشتاور ایستائی (یا مرکز ثقل) را بـا شرط‌های بـالا در نظر گرفته‌اند.

حالا، عنصر ds از منحنی را درنظـر می‌گیریم (جرم آن را هـم، با عدد ds بیان می‌کنیم). اگراین عنصررا، به‌تقریب، برای نقطهٔ مادی به‌فاصلهٔ y ازمحور، بگیریم، برای گشتاور ایستائی، این عبارت را خواهیم داشت:

$$dM_x = y\,ds$$

اگراین گشتاورهای جزئی را جمع‌کنیم و، ضمناً، کمان s را، به‌عنوان متغیر مستقل درنظر بگیریم (که ازنقطهٔ A محاسبه می‌شود)، داریم:

$$M_x = \int_0^s y\,ds \qquad (۴)$$

به‌همین ترتیب، گشتاور نسبت به‌محور y هم محاسبه می‌شود:

$$M_y = \int_0^s x\,ds \qquad (۵)$$

مسلم است که، دراین‌جا، فرض براین است که y (یا x) برحسب s بیان شده است. عملاً، دراین رابطه‌ها، s، برحسب چنان متغیری (t، x یا θ) بیان می‌شود که، درنمایش تحلیلی منحنی، نقش متغیر مستقل را به‌عهده دارد.

گشتاورهای M_x و M_y منحنی، به‌سادگی، ما را به‌تعیین موضع $C(\xi, \eta)$، مرکز ثقل (گرانیگاه)، می‌رسانند. نقطهٔ C، بااین ویژگی مشخص می‌شود که، اگر تمامی «جرم» S منحنی (که با همان عددی بیان می‌شود که درازای منحنی)، درآن متمرکز شود، گشتاور این جرم، نسبت به‌هرمحور دلخواه، برگشتاور منحنی نسبت به‌این محور، منطبق باشد. به‌خصوص، اگر گشتاورهای منحنی را، نسبت به‌محورهای مختصات درنظر بگیریم، داریم:

$$S\xi = M_y = \int_0^s x\,ds \text{ و } S\eta = M_x = \int_0^s y\,ds$$

از آن‌جا

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{1}{S}\int_0^s x\,ds, \quad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{S}\int_0^s y\,ds \qquad (۶)$$

ازروی رابطهٔ مربوط به ηـ عرض گرانیگاه ـ نتیجهٔ هندسی مهمی به‌دست می‌آید. درواقع، داریم:

$$\eta S = \int_0^s y\,ds \implies ۲\pi\eta S = ۲\pi\int_0^s y\,ds$$

ولی، سمت راست این برابری، عبارت است از مساحت P، سطح حاصل از دوران منحنی AB [۳۴۴، (۲۰) را ببینید] وسمت چپ آن، $۲\pi\eta$، عبارت است ازطول محیط دایره‌ای که، مرکز ثقل این منحنی ـ ضمن این دوران ـ دور محور x می‌پیماید و S درازای منحنی است. به‌این ترتیب، به‌قضیهٔ گولدن (P. Guldin) می‌رسیم:

مقدار سطح حاصل از دوران منحنی، دور محوری که آن را قطع نمی‌کند، برابر

است با طول کمان این منحنی ضرب در طول محیط دایره‌ای که به‌وسیله‌گرانیگاه C این منحنی پیموده شده است (شکل ۳۸):

$$P = S \cdot 2\pi\eta$$

از این قضیه، می‌توان، برای تعیین مختص η، عرض مرکز ثقل (گرانیگاه) منحنی، با معلوم بودن درازای S آن و مساحت P، سطح دوار حاصل از آن، استفاده کرد.

۳۵۰. مثال‌ها. ۱) گشتاور ایستائی کنارهٔ بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را، نسبت به محور x، پیدا کنید (با فرض $a>b$). برای نیمهٔ بالایی (یا پایینی) بیضی، این گشتاور، تنها در ضریب 2π، با مقدار نظیر سطح دوار فرق دارد. بنابراین [۳۴۵، ۷) را ببینید]:

$$M_x = 2b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$$

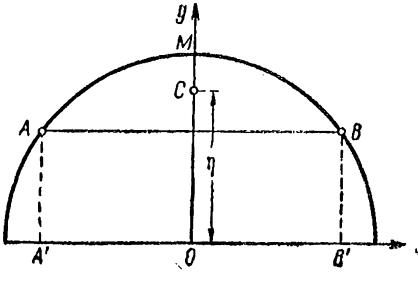
۲) اگر کمانی، نسبت به‌یک خط راست متقارن باشد، آن‌گاه، گرانیگاه کمان، حتماً روی این خط قرار دارد.

برای اثبات، محور تقارن را، به‌عنوان محور y ومحل برخورد منحنی با آن را، به‌عنوان مبداء محاسبهٔ کمان، انتخاب می‌کنیم. دراین صورت، تابع $x=\Phi(s)$، تابع زوجی از s می‌شود و، اگر درازای تمامی منحنی را، با $2s$ نشان دهیم، خواهیم داشت [۳۱۴، (۹ را ببینید]:

$$M_y = \int_{-s}^{s} x\,ds = 0$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $\xi = 0$.

۳) با استفاده از قضیهٔ گولدن، موضع گرانیگاه کمان AB از دایرهٔ به‌شعاع r را پیدا کنید (شکل ۳۹).



شکل ۳۹

اگر وسط کمان AB را M بگیریم، کمان مفروض نسبت به‌شعاع OM متقارن است، بنابراین، گرانیگاه C، روی این شعاع قرار دارد و برای پیدا کردن موضع آن، کافی است، فاصلهٔ آن را از مرکز O (که آن را η می‌نامیم)

معلوم باشد. محورها را، آن‌طور که در شکل می‌بینید، انتخاب می‌کنیم، درازای کمان AB را با s و وتر آن ($AB(=A'B')$ را با d نشان می‌دهیم. از دوران کمان مفروض، دور محور x، منطقه‌ای کروی به‌دست می‌آید که مساحت سطح P آن، به‌طوری که می‌دانیم [۳۴۵، ۱)]، برابر است با $2\pi rd$. با توجه به‌قضیهٔ گولدن، همین مساحت برابر است با $2\pi\eta s$. به‌طوری که $s\eta = rd$ و $\eta = \frac{rd}{s}$.

به‌خصوص، برای نیم‌دایره $d = 2r$ و $s = \pi r$ و بنابراین

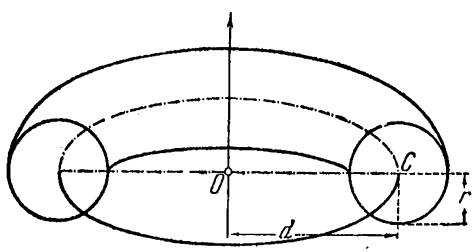
$$\eta = \frac{2}{\pi}r \doteq 0/637r$$

۴) مطلوب است گرانیگاه شاخهٔ سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

اگر تقارن را به‌حساب بیاوریم، بلافاصله معلوم می‌شود که $\xi = \pi a$. با در نظر گرفتن نتیجهٔ مثال ۴) شمارهٔ ۳۴۵، به‌سادگی به‌دست می‌آید: $\eta = \frac{4}{3}a$.

۵) درحالت‌هایی که جای گرانیگاه، از پیش، معلوم است، می‌توان از قضیهٔ گولدن، برای محاسبهٔ مساحت سطح دوار استفاده کرد. فرض کنیم، مثلاً بخواهیم مقدار سطح حلقه (چنبره)، یعنی جسم حاصل از دوران دایره، دور محور نامتقاطع با آن، را پیدا کنیم (شکل ۴۵).



شکل ۴۵

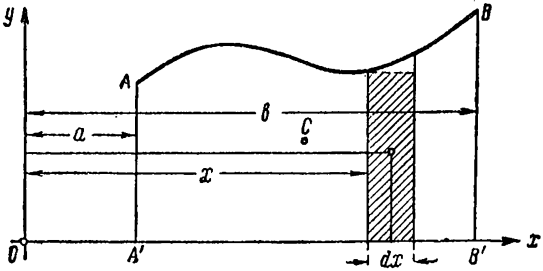
روشن است که گرانیگاه دایره، برمرکز آن قرار دارد. بنابراین، با توجه به‌علامت‌های روی شکل، داریم:

$$P = 2\pi r \cdot 2\pi d = 4\pi^2 rd$$

۳۵۱. پیدا کردن گشتاور ایستائی و گرانیگاه شکل مستوی. شکل مستوی $AA'B'B$ (شکل ۴۶) را که از بالا به‌منحنی AB، با معادلهٔ صریح $y = f(x)$، محدود است. در نظر

می‌گیریم. فرض کنیم که جرم، در تمامی سطح این شکل، به‌طور یکنواخت، توزیع شده باشد، به‌نحوی که چگالی سطحی آن ρ (یعنی جرم موجود درواحد مساحت)، مقدار ثابتی باشد. بدون این که به کلی بودن مساله، لطمه‌ای وارد آید، می‌توان $\rho = ۱$ گرفت، یعنی بتوان جرم بخش دلخواهی ازشکل را، با مساحت آن، اندازه گرفت. این وضع، درحالتی که، به‌طور ساده، دربارهٔ گشتاور ایستائی (یا دربارهٔ گرانیگاه) شکل‌های مستوی صحبت می‌کنیم، کاملاً مفهوم وعقلانی است.

اگر بخواهیم گشتاور ایستائی M_x و M_y این‌شکل را، نسبت به‌محورهای‌مختصات، پیدا کنیم، طبق معمول، جزئی از شکل را، به‌صورت نوار قائم بی‌نهایت باریك، جدا می‌کنیم (شکل را ببینید). اگر این نوار را، تقریباً، به‌جای مستطیل بگیریم، می‌بینیم که،



شکل ۴۱

جرم آن (که با همان مساحت بیان می‌شود)، ydx خواهد بود. برای تعیین گشتاورهای جزئی dM_x و dM_y، همهٔ‌جرم نواررا، متمرکز در گرانیگاه آن (یعنی در مرکزمستطیل) فرض‌می‌کنیم که ــ به‌طوری‌که می‌دانیم ــ مقدار گشتاور را تغییرنمی‌دهد. این نقطهٔ مادی، به‌فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}y$ ازمحور x و به‌فاصلهٔ $\left(x+\frac{۱}{۲}dx\right)$ از محور y قرار دارد؛ به‌جای عبارت اخیر، می‌توان به‌طور ساده، x را درنظر گرفت، زیرا مقدار حذف شدهٔ $\frac{۱}{۲}dx$، وقتی‌که‌در جرم ydx ضرب شود، به‌بی‌نهایت کوچکی ازمرتبهٔ بالاترمنجر می‌شود. بنابراین‌داریم:

$$dM_x = \frac{۱}{۲}y^۲dx,\ dM_y = xydx$$

که با جمع کردن این گشتاورهای جزئی، به‌دست می‌آید:

$$M_x = \frac{۱}{۲}\int_a^b y^۲dx,\quad M_y = \int_a^b xydx \qquad (۷)$$

ضمناً، روشن‌است که منظور از y، همان $f(x)$ است، که معرف معادلهٔ منحنی AB می‌باشد.

شبیه حالت منحنی‌ها، دراین‌جا هم می‌توان، به‌سادگی، مختصات ξ و η گرانیگاه شکل را، از روی گشتاورهای ایستائی آن، نسبت به‌محورهای مختصات، پیدا کرد. اگر مساحت (و درنتیجه، جرم) شکل را با P نشان دهیم، با توجه به‌ویژگی اصلی گرانیگاه، داریم:

$$P\xi = M_y = \int_a^b xy\,dx,\quad P\eta = M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx$$

از آن‌جا

$$\xi = \frac{M_y}{P} = \frac{1}{P}\int_a^b xy\,dx,\quad \eta = \frac{M_x}{P} = \frac{1}{2P}\int_a^b y^2\,dx \qquad (8)$$

دراین‌جاهم، می‌توانیم برای η ــ عرض گرانیگاه ــ تعبیرهندسی جالبی داشته‌باشیم. درواقع، داریم:

$$2\pi\eta P = \pi\int_a^b y^2\,dx$$

بخش سمت راست این برابری، معرف حجم V، جسم حاصل از دوران شکل مستوی $AA'B'B$ دور محور x[۳۴۲، (۱۶)] وبخش سمت چپ آن، حاصل‌ضرب مساحت P این شکل، در $2\pi\eta$ــ محیط دایره‌ای که گرانیگاه می‌پیماید ــ می‌باشد. ازاین‌جا، قضیهٔ‌دوم گولدن به‌دست می‌آید:

حجم جسم حاصل از شکل مستوی، دور محور نامتقاطع با آن (ولی، واقع‌درهمان صفحهٔ شکل)، برابر است با حاصل‌ضرب مساحت این شکل در طول محیط دایره‌ای که گرانیگاه شکل، ضمن این دوران، می‌پیماید:

$$V = P.2\pi\eta$$

یادآوری می‌کنیم که رابطه‌های (۷) و (۸) را، برای حالتی هم که شکل، از بالاو پایین، محدود به‌دو منحنی است، می‌توان تعمیم داد (شکل ۱۹). دراین حالت داریم:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx,\quad M_y = \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx \qquad (7a)$$

ازاین‌جا، وضع رابطه‌های (۸) هم، دراین حالت، روشن می‌شود. اگر رابطهٔ (۸) شمارهٔ

۳۳۸ را به‌یاد آوریم، به‌سادگی معلوم می‌شود که قضیهٔ گولدن، دراین‌حالت هم، درست است.

۳۵۲. مثال‌ها. ۱) مطلوب است تعیین گشتاورهای ایستائی M_x و M_y ومختصات گرانیگاه شکل محدود به‌سهمی $y^2 = 2px$، محور x وعرض نظیرطول x.

چون $y = \sqrt{2px}$، بنابراین، ازروی رابطهٔ (۷) داریم:

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot 2p \int_0^x x\,dx = \frac{1}{2} p x^2,$$

$$M_y = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5} x^{\frac{5}{2}}$$

ازطرف دیگر، مساحت [۳۳۸، (۷)]:

$$P = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

و از روی رابطه‌های (۸)، به‌دست می‌آید:

$$\xi = \frac{3}{5} x, \quad \eta = \frac{3}{8}\sqrt{2px} = \frac{3}{8} y$$

با استفاده ازمقدارهای ξ و η، می‌توان به‌سادگی، از روی قضیهٔ گولدن، حجم‌جسم حاصل از دوران این شکل، دور یکی از محورهای مختصات و یا دور عرض انتهائی را پیداکرد. مثلاً، درحالت اخیر، چون فاصلهٔ گرانیگاه ازمحور دوران، برابر است با $\frac{3}{5} x$، بنابراین، حجم‌مطلوب، چنین می‌شود:

$$V = \frac{8}{15} \pi x^2 y$$

۲) مطلوب است تعیین گرانیگاه ربع اول بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$، با استفاده از نتیجه‌های ۳۳۹، ۲) و ۳۴۳، ۲).

با توجه به‌قضیهٔ گولدن، داریم: $\xi = \frac{4a}{3\pi}$ و $\eta = \frac{4b}{3\pi}$.

۳) اگرشکل دارای محور تقارن باشد، گرانیگاه، الزاماً، براین محور قرار دارد.

این حکم را، برای حالتی که شکل از پایین و بالا، به‌منحنی‌های $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ محدود باشد، ثابت می کنیم. اگر محور y را، منطبق برمحور تقارن بگیریم، هردو تابع y_1 و y_2، زوج می‌شوند و بازهٔ تغییر x هم، به‌صورت $[a, -a]$ درمی‌آید. آن‌وقت، ازروی رابطهٔ دوم (7a) داریم [۳۱۴، ۹] را ببینید]:

$$M_y = \int_{-a}^{a} x(y_2 - y_1)dx = 0 \quad و \quad \xi = 0$$

۴) گرانیگاه شکل محدود به سیکلوئید $x = a(t - \sin t)$، $y = a(1 - \cos t)$ و محور x را پیدا کنید.

با استفاده از ۳۳۹، ۹) و ۳۴۳، ۴)، ازروی قضیهٔ گولدن، به‌سادگی، معلوم‌می‌شود که: $\eta = \frac{5}{6}a$ و، با توجه به‌تقارن: $\xi = \pi a$.

۵) همین مساله را درمورد شکل محدود به‌دو سهمی $y^2 = 2px$ و $x^2 = 2py$ (شکل ۲۴)، حل کنید.

یا به‌یادآوردن مثال ۵) شمارهٔ ۳۳۹، و با توجه به‌رابطه‌های (7a) داریم:

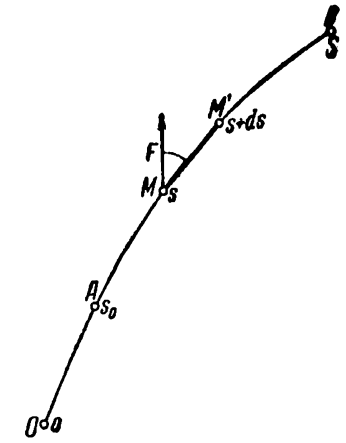
$$\eta = \xi = \frac{1}{P}\int_{0}^{2p} x\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \frac{\frac{6}{5}p^3}{\frac{4}{3}p^2} = \frac{9}{10}p$$

۶) شبیه قضیهٔ اول گولدن[باه۳۵، ۵] مقایسه کنید]، از قضیهٔ دوم گولدن‌هم، می‌توان، با معلوم بودن موضع گرانیگاه، حجم جسم دوارنظیررا به‌دست آورد. مثلاً، درمورد چنبره (شکل ۴۰) به‌دست می‌آید: $V = 2\pi^2 r^2 d$.

۳۵۳. کار مکانیکی. از مکانیك مقدماتی می‌دانیم که، اگر نیروی صرف‌شده برای حرکت نقطهٔ M، مقدار ثابتی باشد (F)، و با جهت تغییرمکان نقطه، زاویهٔ ثابتی تشکیل دهد، درآن صورت، کار $\mathbf{A}$ این نیرو در تغییر مکان s نقطه، برابراست با حاصل‌ضرب $F.\cos(F, s).s$، که در آن، (F, s)، به‌معنای زاویهٔ بین جهت نیرو وجهت تغییرمکان نقطه است. حاصل‌ضرب $F_s = F.\cos(F, s)$، به روشنی، عبارت است از تصویر نیروی F برتغییر مکان s؛ با استفاده از این تصویر، عبارت مربوط به‌کار را می‌توان به‌صورت $\mathbf{A} = F_s.s$ نوشت. اگرجهت نیرو درجهت تغییرمکان باشد $\mathbf{A} = Fs$ و اگر در دو جهت مختلف باشند $\mathbf{A} = -Fs$.

ولی، درحالت کلی، هم مقدار نیروی F وهم زاویهٔ (F, s) آن باجهت تغییرمکان نقطه، ممکن است ثابت نباشند. وقتی که، دست‌کم یکی ازایـن دومقدار، تغییر پیوسته‌ای داشته باشد، برای بیان مقدارکار، ناچاریم، به‌انتگرال معین، متوسل شویم.

راه s پیموده‌شده به‌وسیلهٔ نقطه را، متغیر مستقل می‌گیریم: بااین‌فرض‌که وضع اولیهٔ A، درمورد نقطهٔ M، نظیرمقدار $s=s_0$ ووضع نهائی B، نظیر $s=S$ باشد (شکل ۴۲). هرمقدار s دربازهٔ (s_0, S)، متناظر وضع معینی ازنقطهٔ متحرك و، همچنین، مقدار معینی از کمیت‌های F و $\cos(F, s)$ است،که به‌این ترتیب، می‌توان آن‌هـا را، همچون تابعی از s، درنظر گرفت. نقطهٔ M را، در یـك موضع آن، که به‌وسیلهٔ مقدار s راه، معین می‌شود، انتخاب می‌کنیم؛ عبارت تقریبی‌کار جزئی نظیر نمـو ds راه، از s تـا $s+ds$، را پیدا می‌کنیم،که برای آن، نقطهٔ M ازنقطهٔ M' (نزدیك به‌نقطهٔ M) عبور می‌کند (شکل رابببنید). درموضع M، نیروی معین F، تحت زاویهٔ‌معین (F, s) برنقطه اثر می‌کند؛ چون تغییر این‌کمیت‌ها هم، ضمن عبور از M به M' ـ به‌ازای ds کوچك‌ـ کوچك است، می‌توان بدون توجه به‌این تغییرها، و با درنظر گرفتن نیروی Fوزاویهٔ (F, s) تقریباً ثابت، برای‌کارجزئی تغییرمکان ds، این عبارت را نوشت:



شکل ۴۲

$$d\mathbf{A} = F\cdot\cos(F, s)ds$$

به‌طوری که، تمامی کار $\mathbf{A}$، با انتگرال زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{A} = \int_{s_0}^{S} F\cdot\cos(F, s)ds \qquad (۹)$$

روشن است که، به‌ازای $(F, s)=\frac{\pi}{2}$، کار نیـروی F، بنابراین عبارت، برابرصفر می‌شود، درواقع، دراین‌جا داریم: $\cos(F, s)=0$، به‌طوری‌که تابع زیرانتگرال، صفر می‌شود، یعنی، نیروی عمود برجهت تغییرمکان،کار مکانیکی انجام نمی‌دهد.

اگرنیروی F مؤثر برنقطه را (باتوجه به‌قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع)، بدو مؤلفه‌تجزیه کنیم، به‌نحوی‌که یکی ازمؤلفه‌هـا درامتداد مماس برمسیر، یعنی درجهت تغییرمـکان، و دیگری برامتداد قائم بـرآن قرارگیرد، طبق آن‌چه‌کـه گفتیم، کار تنها بـا مؤلفهٔ مماس

$F_s = F\cos(F, s)$ انجام می‌گیرد:

$$\mathbf{A} = \int_{s_0}^{s} F_s\, ds \qquad (9a)$$

حالا، F را، نتیجهٔ همهٔ نیروهایی می‌گیریم که بر نقطه وارد شده‌اند؛ در آن‌صورت، با توجه به‌قانون حرکت نیوتون، مؤلفهٔ مماسی F_s، برابراست بـا حاصل‌ضرب جـرم m نقطهٔ درشتاب آن a، ومقدارکار $\mathbf{A}$ را، می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$\mathbf{A} = \int_{s_0}^{s} ma\, ds$$

حالا، به‌خاطر بیاوریم که

$$a = \frac{dv}{dt},\ v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow a = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$$

دراین‌حالت

$$\mathbf{A} = \int_{s_0}^{s} mv\frac{dv}{ds}ds = \int_{s_0}^{s} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{s_0}^{s} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

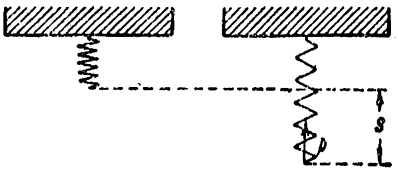
که در آن، v_0 و V، نمایندهٔ مقدار سرعت نقطه، به‌ترتیب، درابتدا و انتهای مسیر می‌باشد.

می‌دانیم که $\frac{1}{2}mv^2$، نیروی‌فعال یاانرژی‌جنبشی نقطه‌است؛ به‌این‌ترتیب، به‌گزاره‌ای مهم می‌رسیم: کار مکانیکی $\mathbf{A}$، ناشی از نیروئی کـه تحت اثـر آن، حرکت نقطه انجام می‌پذیرد، برابر است با نمو انرژی جنبشی نقطه (معلوم است که‌کار $\mathbf{A}$ ونمو انرژی‌جنبشی، می‌توانند به‌طور هم‌زمان، منفی هـم باشند). این اصل، که می‌توان آن را هـم درمورد دستگاه نقطه‌های مادی و هـم درمورد جسم پیوسته به‌کار برد، نقشی بسیارمهم، درفیزیك و مکانیك به‌عهده دارد وبه «قانون نیروی فعال» معروف است.

۳۵۴. مثال‌ها. ۱) به‌عنوان‌مثال، رابطهٔ (۹) را، برای‌محاسبهٔ کارانبساط (یاانقباض) فنری‌که دریك انتهای خود محکم شده‌است، به‌کارمی‌بریم (شکل ۴۳). بااین مسأله،مثلاً، درمحاسبهٔ سپرهای واگون‌های راه‌آهن، برخورد می‌کنیم.

می‌دانیم‌که انبساط s فنر (تنها اگر، فنر باراضافی نداشته باشد)، مـوجب‌کشش p می‌شودکه با مقدار انبساط متناسب است، به‌نحوی‌که $p = cs$، که در آن، c مقداری است ثابت و به‌ویژگی کشسانی فنـر («درجهٔ سختی» فنر) بستگی دارد. نیروئی کـه فنررا باز

می‌کند، باید این کشش را خنثی کند. اگر فقط، آن قسمت از نیروی مؤثر به‌حساب آید که برای این منظور صرف می‌شود، در آن صورت، کار آن، به ازای افزایش انبساط از ۰ تا S، این‌طور بیان شود:



شکل ۴۳

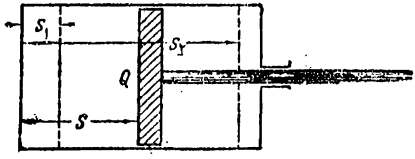
$$A=\int_0^S pds=c\int_0^S sds=c\frac{s^2}{2}\Big|_0^S=\frac{cS^2}{2}$$

اگر بزرگترین مقدار کشش (یا نیروی خنثی‌کنندهٔ آن) را، که متناسب با انبساط S (و برابر cS) است، با P نشان دهیم، می‌توانیم مقدار کار را به‌این‌صورت بنویسیم:

$$A=\frac{1}{2}PS$$

اگر فرض کنیم، نیروی P در انتهای فنر به‌کار گرفته شود (مثلاً، باری آویخته باشد)، در آن‌صورت، برای تغییر مکان S، به‌اندازهٔ کار مضاعف PS انجام می‌شد. همان‌طور که می‌بینیم، تنها نصف آن صرف انبساط فنر می‌شود و نصف دیگر آن، صرف انرژی جنبشی در ارتباط فنر با بار می‌شود.

۲) فرض کنیم، مقداری گاز (بخار) در استوانه، در یك طرف پیستون، واقع باشد (شکل ۴۴). و فرض کنیم که این گاز انبساط پیدا کند و پیستون را به سمت راست حرکت دهد. می‌خواهیم، مقدار کاری را که این گاز انجام می‌دهد، محاسبه کنیم. اگر فاصلهٔ اولی و آخری پیستون را، از انتهای سمت چپ استوانه، با s_1 و s_2، فشار (بر واحد سطح پیستون) را با p و مساحت پیستون را با Q نشان دهیم، همهٔ نیروی وارد بر پیستون برابر pQ و مقدار کار، با این انتگرال، بیان می‌شود:



شکل ۴۴

$$A=Q\int_{s_1}^{s_2} pds$$

اگر حجم گاز را V بگیریم، بدیهی است که داریم: $V=Qs$. حالا دیگر، عبوراز متغیر s، به‌متغیر جدید V دشوار نیست. نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{A}=\int_{V_1}^{V_2} p\,dV \qquad (۱۰)$$

که در آن، V_1 و V_2، نمایندهٔ مقدارهای اولی و آخری حجم V هستند.

اگر فشار p، به‌عنوان تابعی از حجم V، معلوم بود، می‌توانستیم، بـه کمك رابطهٔ (۱۰)، مقدار کار $\mathbf{A}$ را تعیین کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم که، با انبساط گاز، درجهٔ حرارت آن ثابت بماند، به‌طوری که انرژی لازم برای انبساط آن، به‌صورت گرما، از خارج جریان یابد؛ درچنین حالتی، روند را هم‌دما (ایزوترمی) گویند. اگر گاز را به‌صورت «ایده‌آل» [کامـل] در نظـر بگیریـم، از روی قـانـون بـویل ـ ماریـوت، خـواهیـم داشـت $p.V=c=\text{const.}$، به‌طوری که، $p=\frac{c}{V}$ و، برای کار، به‌این رابطه می‌رسیم:

$$\mathbf{A}=\int_{V_1}^{V_2}\frac{c}{V}dV=c\ln V\Big|_{V_1}^{V_2}=c\ln\frac{V_2}{V_1}$$

اگـر فشار را، در ابتـدا و انتهـای رونـد، p_1 و p_2 بگیریـم، در آن‌صـورت $p_1V_1=p_2V_2$ و $\frac{V_2}{V_1}=\frac{p_1}{p_2}$. بنابراین، مقدار کار مربوط به‌انبساط را، با عبور از p_1 به $p_2<p_1$، می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{A}=c\ln\frac{p_1}{p_2}$$

بالاخره، در این رابطه‌ها، به‌جای c، می‌توان p_1V_1 را قرار داد.

با وجود این، در اغلب موردها، فرض طبیعی‌تر این است که، هنگام انبساط، مبادلهٔ گرما بین گاز و محیط مجاور، انجام نگیرد و، برای انجام کار، انرژی خود گاز مصرف شود، کـه در جریان آن، درجهٔ حرارت گـاز، پایین می‌آید. ایـن رونـد را بی‌دَ‌رو (آدیاباتیك) گویند. در این حالت، بستگی بین فشار p و حجم V، ازجرم گاز موردنظر، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$pV^k=c=\text{const.}$$

[به‌این رابطه، کمی بعدتر، در ۳۶۱، ۳) برخورد خواهیم داشت]، که در آن، k، مقداری است ثابت و مخصوص هـر گاز (بخار) و همیشه، از واحـد بزرگتر است. از ایـن‌جا $p=cV^{-k}$ و

$$\mathbf{A}=\int_{V_1}^{V_2} cV^{-k}dV=\frac{c}{1-k}V^{1-k}\Big|_{V_1}^{V_2}=\frac{c}{1-k}(V_2^{1-k}-V_1^{1-k})=$$

$$=\frac{c}{1-k}\left(\frac{1}{V_2^{k-1}}-\frac{1}{V_1^{k-1}}\right)$$

اگر در نظر بگیریم که $cV_1^{-k}=p_1$ و $cV_2^{-k}=p_2$، می‌توان عبارت مربوط به کار را، ساده‌تر نوشت:

$$\mathbf{A}=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}$$

ما تنها، برای سادگی بحث و روشن بودن وضع، گاز در حال انبساط را، محصور در استوانه فرض کردیم. ولی رابطهٔ اساسی (۱۰) و همهٔ رابطه‌های خاص حاصل از آن، مستقل از شکلی است که گاز، در هر لحظهٔ مفروض، داشته باشد. معلوم است که، از این رابطه‌ها، در حالت انقباض (متراکم شدن) گاز از حجم V_2 تا حجم $V_1<V_2$ هم (همراه با افزایش فشار از p_2 تا $p_1>p_2$)، می‌توان استفاده کرد. کار خود گاز، در این حالت، منفی است.

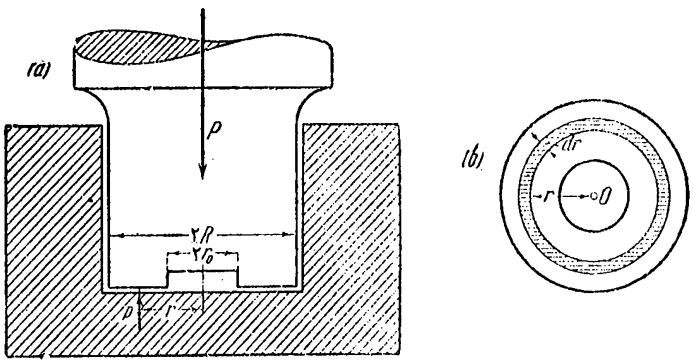
۳۵۵. کار نیروی اصطکاک در پاشنهٔ مسطح. به‌طور کلی، پاشنه، عبارت است از قسمت تکیه‌گاه یك محور قائم دوار. تکیه‌گاه غیرمتحرکی که، در آن، پاشنه دوران می‌کند زیر پاشنه نامیده می‌شود. در این شماره، نیروئی را که برای خنثی کردن اصطکاك لازم است، مورد بررسی قرار می‌دهیم و به‌حالت سادهٔ پاشنهٔ مسطح اکتفا می‌کنیم.

پاشنهٔ مسطح، جسم استوانه‌ای شکلی است که قاعدهٔ مسطح آن، بر «زیر پاشنه» تکیه دارد (شکل ۴۵). این قاعده، در حالت کلی، به‌شکل حلقه‌ای دایره‌ای است که شعاع بیرونی آن را R و شعاع درونی آن را r_0 می‌نامیم؛ در حالت خاصی که داشته باشیم: $r_0=0$، قاعدهٔ دایره‌ای کاملی به‌دست می‌آید.

فشار کامل را با P، سرعت زاویه‌ای دوران پاشنه را با ω، ضریب اصکاك را با μ و بالاخره، فشار بر واحد سطح پاشنه را در نقطهٔ مورد بررسی با p نشان می‌دهیم. بدون توجه به مسألهٔ توزیع فشار، تنها یك کیفیت بدیهی را در نظر می‌گیریم: نقطه‌هایی از پاشنه، که از مرکز آن O به‌یك فاصله باشند، شرایط یکسانی دارند و، در مورد آن‌ها، میزان فشار، یکسان است. به‌این ترتیب، به‌طور کلی، می‌توان، p را تابعی از شعاع حامل r گرفت. شرط‌هایی را، که معمولاً در مورد این تابع در نظر می‌گیرند، در زیر می‌آوریم. ولی، یك شرط وجود دارد که باید در همهٔ حالت‌ها، صادق باشد: فشار کامل بر پاشنه، باید با

فشار P از طرف محور، موازنه کند.

برای آن‌که، این فشار کامل را محاسبه کنیم، دوبارهٔ به‌روش جمع اجزای بی‌نهایت کوچك، از روی طرح شمارهٔ ۳۴۸، متوسل می‌شویم؛ ضمناً، متغیرمستقل را، شعاع r انتخاب می‌کنیم که می‌تواند از r_0 تا R تغییر کند. اگر این بازه را به‌بخش‌هایی تقسیم کنیم، همراه با آن، تمامی حلقه، به‌حلقه‌های جزئی هم مرکز تجزیه می‌شود، به‌نحوی که، تمامی P، به‌صورت ترکیبی از فشارهای جزئی نظیر حلقه‌های جزئی جداگانه، در می‌آید. اکنون، حلقهٔ محدود به‌دایره‌های به‌شعاع‌های r و $r+dr$ (در شکل ۴۵، b، آن‌را هاشورزده‌ایم)



شکل ۴۵

در نظر می‌گیریم. مساحت این حلقه، چنین است:

$$\pi(r+dr)^2-\pi r^2=2\pi r dr+\pi(dr)^2$$

با چشم‌پوشی از بی‌نهایت کوچك مرتبهٔ دوم $\pi(dr)^2$، می‌توان این مساحت را، به‌تقریب، برابر $2\pi r dr$ گرفت. اگر p را، فشار (برواحد مساحت) درنقطهٔ واقع به‌فاصلهٔ r بگیریم، فشار جزئی حلقهٔ مورد بررسی، چنین است:

$$dP=p\cdot 2\pi r dr$$

به‌طوری که با جمع کردن، به‌برابری زیر می‌رسیم:

$$P=2\pi\int_{r_0}^{R} pr\,dr \qquad (11)$$

تکرار می‌کنیم: این برابری معرف این واقعیت است که، مجموع فشارهای توزیع شده بر روی پاشنه، برابر است با فشاری که از طرف محور وارد می‌شود.

حالا، گشتاور $\mathbf{M}$ نیروی اصطکاك پاشنهٔ دوار را، نسبت به‌محوردوران، تعیین می‌کنیم.

باز هم به‌سراغ حلقهٔ جزئی می‌رویم: نیروی اصطکاکی که در آن جریان دارد و بر خلاف دوران عمل می‌کند، چنین است:

$$\mu dP = ۲\pi\mu pr dr$$

به‌نحوی‌که، گشتاور جزئی $d\mathbf{M}$ نظیر، به‌صورت حاصل‌ضرب این نیرو در بازوی r (که برای همهٔ نقطه‌های حلقه، مشترك است)، بیان می‌شود:

$$d\mathbf{M} = ۲\pi\mu pr^۲ dr$$

از این‌جا، گشتاور کامل اصطکاك، چنین خواهد بود:

$$\mathbf{M} = ۲\pi\mu \int_{r_۰}^{R} pr^۲ dr \qquad (۱۲)$$

همان‌طور که از مکانیك می‌دانیم، کار $\mathbf{A}$، حاصل از این گشتاور دوار ثابت $\mathbf{M}$ در یك ثانیه، از ضرب گشتاور $\mathbf{M}$ در سرعت زاویه‌ای دوران، یعنی ω، به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}.\omega$$

برای آن‌که، محاسبهٔ کار $\mathbf{A}$ را به پایان برسانیم، باید، این یا آن فرض را، دربارهٔ قانون توزیع p بر روی سطح پاشنه، داشته باشیم.

ساده‌ترین فرض‌ها، این است که، فشار به‌صورتی یکنواخت، توزیع شده باشد، یعنی $p = c = \text{const.}$ کمیت این مقدار ثابت، از شرط (۱۱) به‌دست می‌آید. در این‌حالت، مستقیماً معلوم است که، اگر فشار P به طور یکنواخت بر مساحت حلقه $\pi(R^۲ - r_۰^۲)$ توزیع شده باشد، در آن‌صورت، فشاری که بر واحد مساحت وارد می‌آید، برابر است با

$$p = c = \frac{P}{\pi(R^۲ - r_۰^۲)}.$$

اگر این مقدار p را در (۱۲) قرار دهیم، داریم:

$$\mathbf{M} = ۲\pi\mu \frac{P}{\pi(R^۲ - r_۰^۲)} \int_{r_۰}^{R} r^۲ dr = \frac{۲}{۳}\mu P \frac{R^۳ - r_۰^۳}{R^۲ - r_۰^۲}$$

و در حالت خاص، برای تمامی پاشنه خواهیم داشت: $\mathbf{M} = \frac{۲}{۳}\mu PR$.

ولی، این نتیجه‌ها، در مورد پاشنهٔ نو درست است، نه برای پاشنهٔ کهنهٔ ساییده‌شده. مطلب در این‌جاست که، وقتی محور دوران می‌کند، نقطه‌هایی از پاشنه، که به‌فاصلهٔ دورتری

ازمرکز قرار گرفته‌اند، باسرعت بیشتری حرکت می‌کنند وکار اصطکاك درآن‌ها بیشتراست و، به‌همین‌نسبت، فرسودگی‌هم، چه در پاشنه وچه در «زیر پاشنه»، بیشتراست؛ به‌همین‌مناسبت، سهم فشار بر بخش نزدیك‌تر به‌مرکز، بیشتر می‌شود. برای پاشنهٔ کهنهٔ کارکرده، معمولاً فرض می‌شودکه، فشار درآن طوری توزیع می‌شودکه، کار اصطکاك (بر واحد مساحت)و، همراه با آن فرسودگی، در همه جا، کمیت ثابتی را حفظ می‌کنند. با تقسیم کار جزئی $dA=\omega dM$ بر مساحت $2\pi r dr$ حلقهٔ جزئی، فرض را، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\omega\mu pr=\text{const.} \Rightarrow pr=c=\text{const.}$$

به‌این ترتیب، فرض بر این است که p، به‌نسبت عکس فاصلهٔ r از مرکز، تغییر می‌کند. اگر در رابطهٔ (۱۱)، به‌جای pr، مقدار c را قرار دهیم، می‌توانیم این مقدار ثابت را پیدا کنیم:

$$P=2\pi c\int_{r_0}^{R}dr=2\pi c(R-r_0)$$

از آن‌جا

$$c=\frac{P}{2\pi(R-r_0)}$$

بالاخره، اگر در رابطهٔ (۱۲)، به‌جای pr، این مقدار را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{M}=2\pi\mu\frac{P}{2\pi(R-r_0)}\int_{r_0}^{R}rdr=\frac{1}{2}\mu P(R+r_0)$$

و برای پاشنهٔ کامل، $\mathbf{M}=\frac{1}{2}\mu PR$.

به‌سادگی دیده می‌شود که اتلاف نیروی اصطکاك در حالت پاشنهٔ کهنه، کمتر از حالت مربوط به‌پاشنهٔ نو است.

۳۵۶. مسأله‌های مربوط به‌جمع‌کردن جزءهای بی‌نهایت‌کوچك. بازهم، مسأله‌هایی را می‌آوریم که با روش جمع کردن مقدارهای بی‌نهایت کوچك، حل می‌شوند.

۱) می‌خواهیم رابطه‌ای برای بیان گشتاور ایستائی M جسم (V)، نسبت به‌یك‌صفحهٔ مفروض را، پیدا کنیم، به‌شرطی که مقطع‌های عرضی جسم موازی این صفحه (به‌صورت تابعی از فاصلهٔ x از این صفحه) معلوم باشد. چگالی، برابر واحد فرض می‌شود.

باهمان علامت‌هایی‌که در شمارهٔ ۳۴۲ داشتیم، جرم (حجم) جزئی لایه‌ای ازجسم،

به‌فاصلهٔ x از صفحه، برابر $P(x)dx$، و گشتاور ایستائی آن $dM = xP(x)dx$ است، به‌طوری‌که، با جمع کردن، داریم:

$$M = \int_a^b xP(x)dx$$

فاصلهٔ ξ گرانیگاه جسم از صفحهٔ مفروض، این‌طور بیان می‌شود:

$$\xi = \frac{M}{V} = \frac{\int_a^b xP(x)dx}{\int_a^b P(x)dx}$$

و در حالت خاص، برای جسم دوار

$$\xi = \frac{\int_a^b xy^2dx}{\int_a^b y^2dx}$$

اگر این نتیجه‌گیری ، در مورد، الف) مخروط مستدیر و ب) نیم‌کره، به کار رود، معلوم می‌شود که فاصلهٔ گرانیگاه از قاعده، برابر است با، الف) $\frac{1}{4}$ ارتفاع و ب) $\frac{3}{8}$ شعاع.

۲) مطلوب است رابطه‌ای برای بیان گشتاور ایستائی M سطح دوار، نسبت به‌صفحهٔ عمود بر محور دوران. «چگالی سطحی» برابر واحد فرض می‌شود.

محور دوران را، به‌عنوان محور x و محل برخورد آن‌را با صفحهٔ نامبرده، به‌عنوان مبدأ مختصات می‌گیریم. باهمان نمادهای شمارهٔ ۳۴۴، جرم (مساحت) جزئی لایهٔ حلقه‌ای، به‌فاصلهٔ s از مبداء کمان، برابر $2\pi yds$ و گشتاور ایستائی آن، $ds = 2\pi xyds$ است و بالاخره

$$M = 2\pi\int_0^s xyds = 2\pi\int_0^s \Phi(s)\Psi(s)ds$$

در حالت خاصی که، منحنی دوار بامعادلهٔ $(a \leqslant x \leqslant b)y = f(x)$ داده شده‌باشد:

$$M = 2\pi\int_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}dx = 2\pi\int_a^b xf(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

فاصلهٔ ξ گرانیگاه سطح، از صفحهٔ مفروض

$$\xi=\frac{M}{P}=\frac{\int_0^s xyds}{\int_0^s yds}=\frac{\int_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}dx}{\int_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}dx}$$

رابطهٔ اخیر را، در مورد سطح، الف) مخروط مستدیر و ب) نیمکره، به‌کار ببرید.

پاسخ. فاصلهٔ گرانیگاه از قاعده برابر است با: الف) $\frac{1}{3}$ ارتفاع، ب) $\frac{1}{2}$ شعاع.

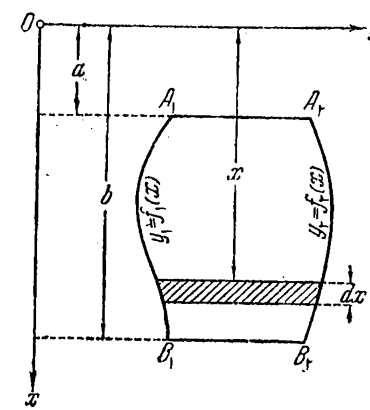
۳) مطلوب است گشتاور ایستائی M_{yz}، M_{zx} و M_{xy}، نسبت به‌صفحه‌های مختصات، برای سطح استوانه‌ای [۳۴۶، شکل ۳۵] و جای گرانیگاه آن. رابطه‌های به‌دست آمده‌را در مورد سطح جانبی قطعه استوانه [۳۴۳، ۸)] به‌کار می‌بریم.

پاسخ: دستورهای کلی

$$M_{yz}=\int_0^s xzds,\quad M_{zx}=\int_0^s yzds,\quad M_{xy}=\frac{1}{2}\int_0^s z^2ds,$$

$$\xi=\frac{M_{yz}}{P},\quad \eta=\frac{M_{zx}}{P},\quad \zeta=\frac{M_{xy}}{P}$$

که در آن، P مساحت رویه است. در مثال مفروض $\xi=0$، $\eta=\frac{\pi}{4}a$، $\zeta=\frac{\pi}{8}h$.



شکل ۴۶

۴) گشتاور ماند (ممان اینرسی) یا گشتاور درجه دوم (ممان کودراتیک). گشتاور ماند نقطهٔ مادی به جرم m، نسبت به‌یك محور (یا صفحه)، به‌حاصل‌ضرب جرم m در مجذور فاصلهٔ d، از نقطه تا محور (یا صفحه)، گفته می‌شود. با آغاز ازاین تعریف، می‌خواهیم، بیان گشتاور ماند I_y، نسبت به‌محور y ازشکل مستوی $A_1B_1B_2A_2$ (شکل ۴۶) را پیدا کنیم، با این فرض که، «چگالی سطحی» توزیع جرم را برابر واحد بگیریم.

داریم:

$$dI_y=x^2(y_2-y_1)dx,$$

$$I_y = \int_a^b x^2(y_2 - y_1)dx$$

مثلاً، در مورد حالت‌های شکل ۴۷، داریم:

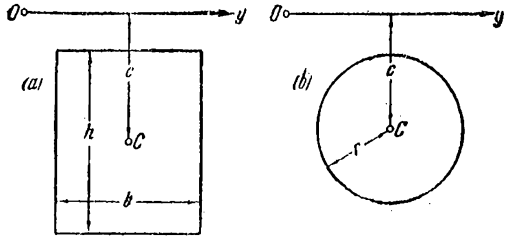
$$\text{(a)} \quad y_2 - y_1 = b, \quad I_y = b\int_{c-\frac{h}{2}}^{c+\frac{h}{2}} x^2 dx = bc^2h + \frac{bh^3}{12}$$

در حالت خاص $c = 0$، خواهیم داشت $I_y = \frac{bh^3}{12}$.

$$\text{(b)} \quad y_2 - y_1 = 2\sqrt{r^2 - (x-c)^2},$$

$$I_y = 2\int_{c-r}^{c+r} x^2\sqrt{r^2-(x-c)^2}dx = \pi r^2c^2 + \frac{\pi r^4}{4}$$

و در حالت خاص $c = 0$، $I_y = \frac{\pi r^4}{4}$.



شکل ۴۷

۵) می‌خواهیم، گشتاور ماند جسم (V) را، که در مسألهٔ ۱) بررسی کردیم، نسبت به صفحه‌ای که در آن‌جا نام برده‌ایم، پیدا کنیم. از رابطه‌ای که برای محاسبهٔ گشتاور ماند به‌دست آوردیم، استفاده کنید: (a) برای مخروط مستدیر، (b) برای نیم‌کره، نسبت به صفحهٔ قاعده.

پاسخ. $I = \int_a^b x^2 P(x)dx$.

و در حالت‌های خاص: (a) $I = \frac{\pi}{30}R^2h^3$، (b) $I = \frac{2\pi}{15}R^5$.

۶) فشاری که مایع بر مساحت واقع در عمق $h(M)$، وارد می‌آورد، برابر است با وزن ستونی استوانه‌ای از مایع، به‌ارتفاع h و قاعده‌ای که دارای همان مساحت باشد. به‌این ترتیب، فشاری که مایع در عمق $h(M)$ بر واحد مساحت وارد می‌کند (بر حسب «کیلوگرم بر متر مربع») برابر است با $h\gamma$، که در آن، γ نمایندهٔ وزن مخصوص مایع (کیلوگرم بر متر مکعب) است.

فرض می‌کنیم، شکل مستوی $A_1B_1B_2A_2$، به‌صورت قائم، در مایع غوطه‌ور باشد (شکل ۴۶)*. می‌خواهیم، فشار هیدروستاتیک کامل $\mathbf{W}$ بر این شکل، و گشتاور $\mathbf{M}$ آن، نسبت به‌سطح آزاد مایع، را پیدا کنیم.

مساحت جزئی $dP(y_2-y_1)dx$، فشار

$$d\mathbf{W}=\gamma x(y_2-y_1)dx$$

را تحمل می‌کند، که گشتاور آن، نسبت به‌محور y، برابر است با

$$d\mathbf{M}=\gamma x^2(y_2-y_1)dx$$

از این‌جا

$$\mathbf{W}=\gamma\int_a^b x(y_2-y_1)dx$$

$$\mathbf{M}=\gamma\int_a^b x^2(y_2-y_1)dx$$

انتگرال اول، گشتاور ایستائی M_y شکل، نسبت به‌محور y، و انتگرال دوم، گشتاور ماند I_y شکل نسبت به‌همان محور است.

اگر ξ، فاصلهٔ گرانیگاه C شکل، از سطح آزاد مایع، و P مساحت آن باشد، می‌توان نوشت: $\mathbf{W}=\gamma P\xi$. فاصلهٔ نقطهٔ برآیند همهٔ فشار ــ یعنی مرکز فشار ــ از سطح آزاد، چنین است:

$$\xi^*=\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{W}}=\frac{P\xi}{I_y}$$

این رابطه را، در مورد حالت‌های شکل ۴۷، به‌کار می‌بریم.

در حالت (a) $\xi=c$، $P=bh$ و $\mathbf{W}=\gamma bhc$. و چون در ۴)، قبلاً محاسبه کردیم:

---

*) محور y را، بر رویهٔ آزاد مایع، گرفته‌ایم.

$I_y = bc^2h + \frac{bh^3}{12}$، می‌توانیم بلافاصله بنویسیم:

$$\xi^* = c + \frac{h^2}{12c}$$

در حالت خاصی که داشته باشیم: $c = \frac{h}{2}$ (یعنی ضلع بالایی مستطیل، بر سطح مایع واقع باشد)، داریم:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\gamma b h^2, \quad \xi^* = \frac{2}{3}c$$

درحالت (b): $c = \xi$، $P = \pi r^2$ و $\mathbf{W} = \gamma c \pi r^2$. در این‌جا $I_y = \pi r^2 c^2 + \frac{\pi r^4}{4}$ [۴) را ببینید]. بنابراین

$$\xi^* = c + \frac{r^2}{4c}$$

۷) اگر در جدار مخزن مملو از آب، در عمق $h(M)$ سطح آب، شکافی افقی‌وجود داشته باشد، درآن‌صورت، سرعت آبی که از آن‌جا خارج می‌شود (برحسب «متر برثانیه»)، چنین است:

$$v = \sqrt{2gh}^*$$

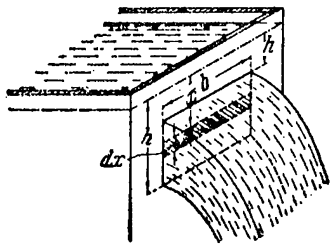
حالا، فرض کنیم، درجدارمخزن، شکافی مستطیل شکل وجودداشته باشد (شکل۴۸). می‌خواهیم، حجم Q (برحسب متر مکعب)، آبی کـه در یك ثانیه، از این شکاف، جاری می‌شود، پیدا کنیم.

نوار جزئی بـه‌عرض dx، در عمق x، متناظر است با سرعت $v = \sqrt{2gx}$. چون، مساحت ایـن نوار bdx است، مقدار خروج آب از ایـن شکاف، این‌طور بیان می‌شود: $dQ = \sqrt{2gx} \cdot bdx$. با جمع کردن همهٔ این مقدارهای جزئی، نتیجه می‌شود:

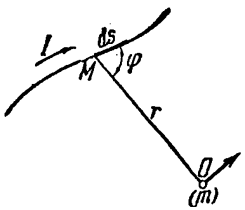
$$Q = \sqrt{2g} \cdot b \int_{h_0}^{h} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{2g} \cdot b\left(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right)$$

---

*) این‌رابطه، درهیدرودینامیك ثابت‌می‌شود و به‌رابطهٔ تورِیچلی معروف است. توجه کنیم که‌برای سرعت نقطهٔ مادی وزن‌داری هم، که از ارتفاع h سقوط کند، همین رابطه صادق است.



شکل ۴۸



شکل ۴۹

در عمل، مقدار خروج آب، با توجه به‌وجود اصطکاك در مایع و تراکم جریان، اندکی کمتر از این مقدار است. برای به‌حساب آوردن این واقعیت‌ها، معمولاً، ضریب تجربی $\mu < 1$ را در رابطه قرار می‌دهند و، آن‌را، به‌این‌صورت می‌نویسند:

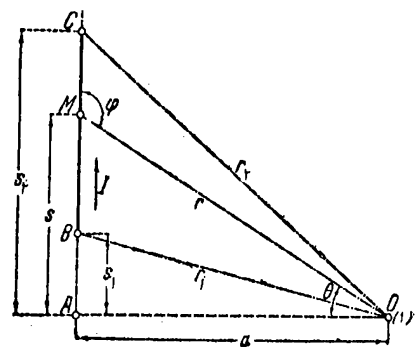
$$Q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\cdot b(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}})$$

اگر فرض کنیم $h_0 = 0$، رابطهٔ میزان‌خروج آب از «زیرآب» مستطیل‌شکل، به‌دست‌می‌آید:

$$Q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\cdot bh^{\frac{3}{2}}$$

۸) بیو و ساوار، ضمن مطالعهٔ میدان مغناطیسی برق، به‌این‌نتیجه رسیدند که، نیروئی که با آن، جریان برق بر «بار مغناطیسی» عمل می‌کند، می‌تواند همچون نیروی مؤثری در نظر گرفته‌شود، که‌از «جزءجریان»های کوچك بی‌شمار، به‌طور جداگانه، ناشی‌می‌شود. بنابر قانونی که آن‌ها تنظیم کردند، عنصر جریان ds (شکل ۴۹)، بر بار مغناطیسی m، که در نقطهٔ O قرار دارد. با نیروی

$$dF = \frac{Im\sin\varphi ds^*}{r^2}$$



شکل ۵۰

*) این رابطه، تنها با انتخاب مناسب واحدها، برقرار است (مثلاً، وقتی‌که، نیرو را با دین، فاصله را با سانتی‌متر، بار مغناطیسی و نیروی جریان را با واحدهای الکترومانیتیك، بیان‌کرده باشیم).

عمل می‌کند، که در آن، I نیروی جریان، r فاصلهٔ OM و φ زاویهٔ (ds, r) است.

این نیرو، درجهت عمود برصفحه‌ای که از O و ds می‌گذرد و، ضمناً، درحالتی که روی شکل نشان داده شده است، درجهت ازطرف خواننده، قرار دارد.

برای این‌که، عمل قطعهٔ متناهی جریان را، برقطب مغناطیسی، معین کنیم، باید این نیروهای جزئی را باهم جمع کنیم.

به‌عنوان مثال، نیروئی را تعیین می‌کنیم که، پارهٔ مستقیم‌الخط جریان برق BC، برواحد «بار مغناطیسی»، عمل می‌کند (شکل ۵۰). باتوجه به‌علامت‌های شکل.

چون $\sin\varphi = \sin \widehat{OMA} = \frac{a}{r}$، می‌توان dF را، به‌این‌صورت نشان‌داد:

$$dF = \frac{aI\,ds}{r^2} = \frac{aI\,ds}{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

نیروهای جزئی را، در این‌جا، می‌توان مستقیماً جمع کرد، زیرا، همهٔ آن‌ها، دارای یک جهت‌اند. بنابراین

$$F = aI\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{a}\cdot\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\Big|_{s_1}^{s_2} = \frac{I}{a}\left(\frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1}\right)$$

§۴. معادله‌های دیفرانسیلی ساده

۳۵۷. مفهوم‌های اساسی. معادله‌های مرتبهٔ اول. درفصل‌هشتم، مسألهٔ‌مربوط به‌تعیین تابع $y = y(x)$ را، ازروی مشتق مفروض آن

$$y' = f(x) \qquad (۱)$$

[ویا، هم‌ارزآن، ازروی دیفرانسیل $dy = f(x)dx$]، مورد بررسی قرار دادیم و یاد گرفتیم که این مسالهٔ را، می‌توان، با انتگرال‌گیری یا تربیع، حل کرد:

$$y = \int f(x)dx + C^* \qquad (۲)$$

---

*) دراین‌بند، منظور ما ازنماد $\int f(x)dx$، یک تابع اولیهٔ دلخواه، ولی معین است. به‌همین مناسبت، ثابت انتگرال‌گیری را، به‌این نماد اضافه کرده‌ایم و آن را، به‌طور جداگانه، درنظر می‌گیریم.

دراین جواب کلی، مقدار ثابت C وجود دارد؛ و به‌نحوی‌که در مثال‌ها دیدیم [۲۶۳، ۲۶۴]، اگر شرط‌های اولیه

$$x=x_0 \text{ به‌ازای } y=y_0 \qquad (۳)$$

داده شده باشند، به‌کمك آن‌ها، مقدار معینی برای ثابت $C=C_0$ پیدا می‌شود؛ که با گذاشتن آن در (۲) به جواب خصوصی مسأله می‌رسیم، یعنی به تابع معلوم $y=y(x)$ می‌رسیم که، نه‌تنها، مشتق آن همان است که، از پیش، داده شده بود، بلکه با شرط اولیهٔ (۳) هم سازگار است.

ولی، اغلب پیش می‌آید که تابع $y=y(x)$ را، باید از رابطهٔ بغرنج‌تری به‌صورت

$$F(x, y, y', y'', \dots)=0$$

به‌دست آورد، که مقدار متغیر مستقل x را، بامقدارهای تابع y ومشتق‌های y'، y''، ... آن، مربوط کرده است. رابطه‌ای ازاین گونه را، به‌طور کلی، معادلهٔ دیفرانسیلی، گویند.

به‌معادلهٔ مرتبهٔ اول می‌پردازیم که تنها شامل مشتق اول y' است:

$$F(x, y, y')=0 \qquad (۴)$$

جواب این معادله، عبارت است از هر تابع $y=y(x)$، که به‌طور اتحادی نسبت به x، در آن صدق می‌کند. می‌توان ثابت کرد که (به‌ازای فرض‌های معلوم نسبت به F)، در این‌جا هم، جواب کلی ــ شبیه حالت ساده [(۲) را ببینند] ــ شامل مقدار ثابت دلخواه C است، یعنی به‌صورت زیر است:

$$y=\varphi(x, C) \qquad (۵)$$

ضمناً، گاهی هم، این جواب، به‌صورت ضمنی درمی‌آید:

$$\Phi(x, y, C)=0 \text{ یا } \psi(x, y)=C \qquad (۶)$$

تعیین جواب کلی معادلهٔ دیفرانسیلی، به‌هرکدام ازاین صورت‌ها، انتگرال‌گیری معادله نامیده می‌شود. به‌عنوان مثال، این مساله را، مورد بررسی قرار می‌دهیم: منحنی را پیدا کنید که تحت قائم ثابتی داشته باشد. اگر این منحنی را، به‌صورت معادلهٔ صریح $y=y(x)$ درنظر بگیریم، مساله به‌این‌جا منجر می‌شود که، باید تابع‌هایی را پیدا کنیم که در شرط $yy'=p$ صدق کنند، که در آن، $p=\text{const}$. [۲۳۰، (۳)]. معادله را می‌توان به‌صورت $(y^2)'=2p$ نوشت و، دیگر روشن است که، جواب کلی آن، چنین خواهد بود:

$$y^2=2px+C \text{ یا } y=\pm\sqrt{2px+C} \qquad (۷)$$

به‌این‌ترتیب، فرض مساله، در خانوادهٔ کاملی از سهمی‌ها صدق می‌کند که یکی از دیگری، با تغییرمکان سهمی به‌موازات محور x، به‌دست می‌آید.

وقتی که منظور، به‌دست آوردن همهٔ منحنی‌هایی باشد، که با ویژگی موردنظر بسازند، به‌جواب کلی مساله می‌رسیم. ولی اگر، مثلاً، این راهنمایی تکمیلی هم داده‌شده باشد که، این منحنی، باید از نقطهٔ (x_0, y_0) بگذرد، در آن صورت، با قراردادن این مقدارها در معادلهٔ (۷) می‌توانیم مقدار C را تعیین کنیم:

$$C_0 = y_0^2 - 2px_0$$

با قراردادن $C = C_0$ در (۷)، به جواب خاص $y^2 = 2px + C_0$ می‌رسیم که معرف یك منحنی معلوم، ازمیان خانوادهٔ منحنی‌ها، است.

باید گفت که، معمولاً، درمسالهٔ مربوط به‌معادلهٔ دیفرانسیلی، جواب خاص را باید پیداکرد. این جواب خاص، اغلب، به‌کمك شرط اولیهٔ (۳) به‌دست می‌آید که درخود مساله داده شده است. از روی این شرط، مثل مساله‌ای که حل کردیم، می‌توان مقدار معین $C = C_0$ را پیداکرد؛ این مقدار، به‌این‌ترتیب تعیین می‌شود که، در جواب کلی (۵) [یا (۶)]، قرار دهیم: $x = x_0$ و $y = y_0$. واگر در جواب کلی، به‌جای C، مقدار آن C_0 را قرار دهیم، به‌جواب خاصی می‌رسیم که درمعادله صدق می‌کند.

۳۵۸. معادلهٔ درجهٔ اول نسبت به‌مشتق. جداکردن متغیرها. حالا فرض می‌کنیم، در معادلهٔ (۴)، مشتق y' از درجهٔ اول باشد، یعنی به‌این صورت:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

که در آن، P و Q، تابع‌هائی از x و y هستند. با فرض $y' = \frac{dy}{dx}$، می‌توان معادله را به‌صورت زیر درآورد:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (۸)$$

که، اغلب، کاررا ساده‌تر می‌کند.

دراین‌جا، به‌حالت‌های ساده وخاصی از معادلهٔ (۸) می‌پردازیم، که انتگرال‌گیری ازآن‌ها، مستقیماً، به‌تربیع می‌انجامد و، به‌این‌ترتیب، بررسی این حالت‌ها را، می‌توان دنبالهٔ طبیعی فصل هشتم دانست.

اگردر معادلهٔ (۸)، ضریب P تنها به x وضریب Q تنها به y بستگی داشته باشد یعنی، معادلهٔ (۸)، به‌این صورت باشد:

$$P(x)dx+Q(y)dy=0 \qquad (۹)$$

گویند که، متغیرها جدا شده‌اند. در این حالت، انتگرال‌گیری، خیلی ساده، انجام‌می‌پذیرد.

فرض کنیم $P(x)$ و $Q(y)$، در بازه‌های نظیر، پیوسته باشند، در این صورت $P(x)dy$، دیفرانسیل $\mathbf{P}(x)=\int P(x)dx$ و $Q(y)dy$، دیفرانسیل تابع $\mathbf{Q}(x)=\int Q(x)\,dx$ است، حتی اگر، منظور از y، تابع $y(x)$ باشد که درمعادلهٔ (۹) صادق است*. به‌این‌ترتیب، سمت چپ معادلهٔ (۹)، به‌صورت دیفرانسیل مجموع $\mathbf{P}(x)+\mathbf{Q}(x)$ درمی‌آید. ازآن‌جاکه این دیفرانسیل، بنابرمعادلهٔ (۹)، برابرصفر است، خود تابع به‌مقدار ثابت منجرمی‌شود

$$\mathbf{P}(x)+\mathbf{Q}(x)=C \qquad (۱۰)$$

به‌سادگی دیده می‌شود که، برعکس هم، اگرتابع $y=y(x)$ (به‌ازای x دلخواه) در این معادله صدق کند، در آن صورت، در معادلهٔ (۹) هم صدق خواهد کرد. برابری (۹)، جواب کلی معادلهٔ (۹) را، به‌دست می‌دهد.

برای‌حل معادلهٔ (۹)، گاهی بهتراست جمله‌های با dx و dy را، به‌سمت‌های‌مختلف معادله، منتقل کنیم:

$$Q(y)dy=-P(x)dx \qquad (۱۱)$$

با انتگرال‌گیری هرطرف، به‌طور جداگانه، ودرنظرگرفتن مقدار ثابت (که‌کافی است آن را، تنها دریك طرف درنظر بگیریم)، نتیجه می‌شود:

$$\int Q(y)dy=-\int P(x)dx+C$$

که شبیه جوابی است که دربالا پیدا کردیم.

درموردی‌که با شرطهای اولیهٔ (۳) سروکارداشته باشیم، به‌جای آن‌که ابتداجواب کلی راپیداکنیم وبعد مقدارثابت C را، با توجه به‌این شرطها، به‌دست آوریم،می‌توانیم ساده‌تر عمل‌کنیم: مقدارهای جزئی (۱۱) را، درسمت راست بین x_0 تا x و در سمت چپ، بین مقدارهای متناظر آن، y_0 تا y، «جمع می‌کنیم». به‌این برابری می‌رسیم:

---

*) با توجه به‌تغییرناپذیری شکل دیفرانسیل [۱۰۶].

$$\int_{y_0}^{y} Q(y)dy = -\int_{x_0}^{x} P(x)dx$$

که جواب خاص مطلوب را به دست می‌دهد، خود صورت آن، تاکیدی براین است که شرطهای $x=x_0$ و $y=y_0$ در آن صدق می‌کند. خواننده، به‌سادگی متوجه می‌شود که، این روش، تنها از نظر شکل، با روش قبلی متفاوت است.

مثال ۱ : این معادله را درنظر می‌گیریم:

$$\sin x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$$

انتگرال می‌گیریم:

$$\int \sin x\, dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C$$

یا

$$-\cos x + 2\sqrt{y} = C$$

از آن‌جا

$$y = \frac{(\cos x + C)^2}{4}$$

واین، جواب کلی معادلهٔ مفروض است. اگر، برای شرطهای اولیه، مثلاً داشته باشیم:

$$y = 1 \quad \text{به‌ازای} \quad x = 0$$

درآن صورت، با درنظر گرفتن این مقدارها، بلافاصله پیدا می‌کنیم: $C=1$، که به‌جواب خاص منجر می‌شود:

$$y = \frac{(1+\cos x)^2}{4}$$

همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، می‌توان، جواب خاص را مستقیماً به‌دست آورد. داریم:

$$\int_{1}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int_{0}^{x} \sin x\, dx$$

یعنی

$$۲(\sqrt{y}-۱)=\cos x-۱$$

واز آن‌جا

$$\sqrt{y}=\frac{۱+\cos x}{۲},\ y=\left(\frac{۱+\cos x}{۲}\right)^{۲}$$

پیش می‌آید که مفروض معادلهٔ (۸)، به‌صورت (۹) نباشد، ولی بتوان آن را، به‌این صورت تبدیل کرد، وسپس، انتگرال گیری راانجام داد. این تبدیل را، جدا کردن متغیرها گویند. درحالتی که‌ضریب‌های P و Q را، بتوان به‌صورت حاصل‌ضربی درآورد که‌هریك از عامل‌ها، تنها شامل یکی ازمتغیرها باشد، چنین تبدیلی ممکن است، یعنی، وقتی که‌داشته باشیم:

$$P(x,y)=P_۱(x)\cdot P_۲(y);\ Q(x,y)=Q_۱(x)\cdot Q_۲(y)$$

درواقع،کافی است، دوطرف معادلهٔ

$$P_۱(x)P_۲(y)dx+Q_۱(x)Q_۲(y)dy=۰ \qquad (۱۲)$$

را، بر $P_۲(y)Q_۱(x)$ تقسیم کنیم، تا متغیرها ازهم جدا شود.

$$\frac{P_۱(x)}{Q_۱(x)}dx+\frac{Q_۲(y)}{P_۲(y)}dy=۰$$

مثال ۲ : $y\sin\frac{x}{۲}dx-\cos\frac{x}{۲}dy=۰$.

معادله به‌صورت (۱۲) است، متغیرها را جدا می‌کنیم:

$$\frac{dy}{y}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}dx$$

وانتگرال می‌گیریم:

$$\ln y=-۲\ln\cos\frac{x}{۲}+c$$

که، با آنتی لگاریتم گرفتن، مقدار y بدست می‌آید:

$$y=\frac{e^{c}}{\cos^{۲}\frac{x}{۲}}=\frac{۲e^{c}}{۱+\cos x}$$

که با فرض $C=2e^c$، جواب کلی را، به‌این صورت درمی‌آوریم:

$$y=\frac{C}{1+\cos x}$$

۳۵۹. مساله‌ها. مساله‌هایی درزمینه‌های مختلف دانش انتخاب کرده‌ایم، که حل آن‌ها منجر به‌معادله‌های دیفرانسیلی، با متغیرهای جدا ازهم، می‌شود.

۱) منحنی‌هایی را پیدا کنید که، در آن‌ها، پاره‌خط‌قائم n (تا برخورد با محور x)، برابرمقدار ثابت r باشد.

با به‌خاطرآوردن عبارت مربوط به n [۲۳۰، (۴)]، شرطی را می‌نویسیم، که برای تابع y از x، صادق و، به‌صورت یك معادلهٔ دیفرانسیلی باشد.

$$|y\sqrt{1+y'^2}|=r \quad \text{یا} \quad y^2(1+y'^2)=r^2$$

از آن‌جا

$$y'=\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y} \quad \text{یا} \quad \frac{ydy}{\sqrt{r^2-y^2}}=\pm dx$$

با انتگرال‌گیری

$$-\sqrt{r^2-y^2}=\pm(x+C) \quad \text{یا} \quad (x+C)^2+y^2=r^2$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت، خانوادهٔ دایره‌های به‌شعاع r، بامرکزهای واقع برمحور x، به‌دست می‌آید.

۲) منحنی‌هایی را پیدا کنید که، در آن‌ها، پاره‌خط‌های t مماس (تا برخورد بامحور x)، برابرمقدار ثابت a باشند.

با توجه با ۲۳۰، (۴)، معادلهٔ دیفرانسیلی لازم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|=a$$

که با فرض $y'=\dfrac{dy}{dx}$، می‌توان معادله را به‌این صورت نوشت:

$$\left|y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right|=a$$

یا

$$dx=\pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

انتگرال می‌گیریم:

$$x+C=\pm\left[a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right]$$

وخانوادهٔ تراکتریس‌ها [۳۳۱، ۱۱] را ببینید]، به‌دست می‌آید.

۳) قانون سرد کردن (تبرید). فرض کنیم، جسمی با درجهٔ حرارت θ درجهٔ سانتی‌گراد، درمحیطی با صفردرجهٔ سانتی‌گراد، سرد شود. طبق قانونی‌که نیوتون ثابت کرد، سرعت سرد شدن جسم، با خود درجهٔ حرارت θ، متناسب است. یعنی

$$\frac{d\theta}{dt}=-k\theta$$

که درآن، k، مقدار ثابت مثبتی است. می‌خواهیم، قانونی را پیدا کنیم که، طبق آن،درجهٔ حرارت جسم، با آغاز از لحظهٔ $t=0$، پایین می‌آید.

داریم:

$$\frac{d\theta}{\theta}=-kdt$$

انتگرال می‌گیریم:

$$\ln\theta=-kt+\ln C^*$$

و از آن‌جا

$$\theta=Ce^{-kt}$$

با فرض $t=0$، متوجه می‌شویم که، C چیزی جز درجه حرارت اولیه θ_0 نیست. با توجه به‌این نکته، به‌رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\theta=\theta_0e^{-kt}$$

که درجهٔ حرارت جسم را، در هر لحظهٔ دلخواه، معین می‌کند. تنها شرط، این است که، درجهٔ حرارت اولیهٔ (یعنی θ_0) معلوم باشد.

---

*) با پیش‌بینی آنتی‌لگاریتم، دراین‌جا، مقدار ثابت را، به‌صورت $\ln C$ نوشته‌ایم.

ضریب k، بستگی به‌ویژگی جسم ومحیط دارد واز راه تجربه، معین می‌شود.

۴) جریان اضافی قطع و وصل. اگر در مدار الکتریکی، ولتاژ ثابت V عمل کند، درآن صورت، اگرمقاومت مدار را با R وشدت جریان را بـا I نشان دهیم، بنابرقانون اهم، خواهیم داشت: $V = RI$ ولی، اگر ولتاژ V تغییر کند (و نیز، در لحظهٔ قطع ووصل برق، با ولتاژ ثابت)، دراغلب موردها، پدیدهٔ خودالقایی برقرار می‌شود، ونیروی محرکهٔ الکتریکی اضافی را تشکیل می‌دهد، که متناسب بـا سرعت تغییر شدت جریان $\frac{dI}{dt}$، و با علامتی مخالف آن است. بنابراین، مقدار ایـن نیروی محرکهٔ الکتریکی خودالقائی را، می‌توان، این‌طور نشان داد:

$$-L\frac{dI}{dt}$$

که درآن، L «ضریب خودالقائی» ۰ است ($L>0$).

اگرخودالقایی وجود داشته باشد، درآن صورت، با قطع بـرق، بلافاصله، به‌صفر نمی‌افتد، وبا وصل جریان برق، فوراً، به مقدار طبیعی خـود نمی‌رسد. ایـن پدیده‌ها را، به‌طور تحلیلی، بررسی می‌کنیم.

دراین‌جا، قانون اهم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$V-L\frac{dI}{dt}=RI \text{ یا } \frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{V}{L} \qquad (۱۳)$$

(a) فرض می‌کنیم، شدت ثابت برق I_0، درلحظهٔ $t=0$، قطع شود. چون، در این حالت دادیم: $V=0$، بنابراین

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=0 \Rightarrow \frac{dI}{I}=-\frac{R}{L}dt$$

و (شبیه ۳):

$$I=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$$

این جریان برق را، کـه تنها تحت اثر نیروی محرکهٔ خودالقایی، عبـور می‌کند، جریان اضافی قطع می‌نامند، با افزایش t، شدت این جریان، به‌سرعت به‌سمت صفر میل می‌کند وپس از لحظهٔ کوتاهی، نامحسوس می‌شود.

(b) اگرمدار، درلحظهٔ $t=0$ وصل شود، درآن، ولتاژ V آغاز به‌عمل می‌کند،در

آن صورت، از معادلهٔ (۱۳)ـ با جدا کردن متغیرها ـ به‌دست می‌آید:

$$\frac{-R\,dI}{V-RI}=-\frac{R}{L}dt;\quad \ln(V-RI)=-\frac{R}{L}t+\ln C,$$

$$V-RI=Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

ثابت C را، از شرط‌های اولیه $I=0$ به‌ازای $t=0$ تعیین می‌کنیم؛ واضح است که $C=V$، به‌طوری که بالاخره

$$I=\frac{V}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

می‌بینیم که به‌موازات برق $\frac{V}{R}$، نظیر قانون اهم، برق $\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ هم، درجهت عکس، جریان دارد.

و این، جریان اضافی وصل است که، بازهم، با افزایش t، به‌سرعت نزول می‌کند.

۵) معادلهٔ واکنش شیمیایی. یك فرایند شیمیائی را درنظر می‌گیریم که، در آن، مواد A، B، ... ـ که برهم تأثیرمتقابل می‌گذارند ـ به‌مواد M، N، ... تبدیل می‌شود. برای برآورد کمیت‌موادی که درواکنش شرکت دارند، آن را بامولکول گرم بیان‌می‌کنیم. به‌وزنی ازماده، مولکول گرم می‌گوییم که، اگر برحسب گرم بیان شود، برابر با وزن مولکولی آن‌باشد. درمولکول گرم هرماده، بدون ارتباط بانوع ماده‌ای که درنظرمی‌گیریم، همیشه شامل یك مقدارمولکول است (یعنی، کمیت مولکول‌ها، برای مولکول گرم، مقداری است ثابت).

اگرفرض‌کنیم که، درهرعمل متقابل، یك مولکول از هرماده، بریك مولکول از مادهٔ دیگری وارد عمل شود، درآن‌صورت، برای هرمولکول گرم ازیکی، یك مولکول گرم از دیگری لازم می‌آید. درجریان زمان t (که از آغاز واکنش‌ها می‌گذرد)، از هرکدام از موادی که برهم اثرمی‌گذارند، یك مقدار x مولکول گرم، وارد واکنش‌ها می‌شود. سرعت افزایش x نسبت به‌زمان، یعنی مشتق آن $\frac{dx}{dt}$ را، سرعت واکنش شیمیائی گویند.

فرض‌کنیم، دومادهٔ A و B، درفعل وانفعال، شرکت جویند. مقدار نخستین آن‌ها را (به‌مولکول گرم) a و b می‌گیریم. (ضمناً، مثلاً، $a>b$ می‌گیریم). با گذشت فاصلهٔ‌زمانی t، مقدار $a-x$ ازمادهٔ A ومقدار $b-x$ ازمادهٔ B را خواهیم داشت. طبیعی است فرض

کنیم که، سرعت واکنش‌های شیمیائی در لحظهٔ t، متناسب باشد با حاصل‌ضرب مقدارهایی از دوجسم، که هنوز درفعل وانفعال شیمیائی وارد نشده‌اند و، درنتیجه، به‌این معادلهٔ دیفرانسیلی می‌رسیم:

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x), \text{ یا } \frac{dx}{(a-x)(b-x)}=kdt$$

وبعد از انتگرال‌گیری

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{a-x}{b-x}=-kt+C$$

چون به‌ازای $t=0$ باید داشته باشیم $x=0$، بنابراین $C=\frac{1}{b-a}\ln\frac{a}{b}$ و درنتیجه:

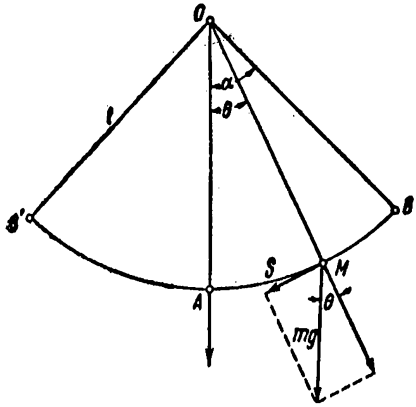
$$\ln\frac{(a-x)b}{(b-x)a}=-k(b-a)t$$

و به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$k=ab\frac{1-e^{-k(b-a)t}}{b-ae^{-k(b-a)t}}$$

با صعود مقدار t، عبارت نهائی به‌سمت صفرمیل می‌کند؛ بنابراین، بعدازفاصلهٔ‌زمانی محدودی، آن‌قدر کوچك می‌شود که، عملاً، تفاوتی بین x و a باقی نمی‌ماند و واکنش شیمیائی، به‌پایان می‌رسد.

۶) پاندول (ریاضی). فرض می‌کنیم، نقطهٔ مادی به‌جرم m، از نخی که قابلیت کش‌آمدن ندارد ویا از میله‌ای به‌طول l (از وزن آن، صرف‌نظر می‌کنیم) آویزان باشدو بتواند روی کمان‌دایره، حرکت کند (شکل ۵۱). این دستگاه پاندول (ریاضی) نامیده‌می‌شود. پاندول را، از حالت تعادل OA به وضع $OB\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ درمی‌آوریم و فرض می‌کنیم که، پاندول، به‌خودی خود، دارای سرعت اولیه نباشد.



شکل ۵۱

پاندول، به‌وضع قرنیهٔ OB' می‌رسد، دوباره به وضع OB برمی‌گردد و غیره. می‌خواهیم، چگونگی نوسان پاندول، یعنی بستگی بین زاویهٔ $\theta = \widehat{AOM}$ و زمان t را، پیدا کنیم. برای این که، حرکت نقطهٔ M بر کمان $\widehat{AB}$ را مشخص کنیم، باید راه پیموده شدهٔ $s = \widehat{AM} = l\theta$ از نقطه A را، در زمان t ـ یعنی از لحظهٔ عبور پاندول از وضع تعادل ـ محاسبه و بررسی کنیم.

اگر نیروی ثقل $F = mg$ مؤثر بر نقطه را، همان‌طور که روی شکل نشان داده‌شده است، تجزیه کنیم، می‌بینیم که مؤلفهٔ مماس آن $F_s = -mg \sin\theta$ می‌باشد*؛ درعین‌حال، مؤلفهٔ قائم آن، با مقاومت نخ یا میله از بین می‌رود. اگر سرعت نقطهٔ M را، v بگیریم، انرژی جنبشی آن، دروضع موردنظر، برابر $\frac{1}{2}mv^2$ می‌شود و، ضمن عبور M از B به O، تنزل می‌کند. ازطرف دیگر، کارانجام شدهٔ A، یا F_A، در مسیر MB، این‌طور بیان‌می‌شود [۳۵۲، (۹a)]:

$$\mathbf{A} = -\int_s^S mg \sin\theta \, ds$$

(دراین‌جا: $S = \widehat{AB}$). اگر به‌متغیر θ عبور کنیم:

$$\mathbf{A} = -mgl\int_0^\alpha \sin\theta \, d\theta = -mgl(\cos\theta - \cos\alpha)$$

آن‌وقت، ازروی قانون نیروی فعال [۳۵۲] داریم:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(\cos\theta - \cos\alpha),\quad v = \sqrt{gl}\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

چون $v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$، برای تعیین بستگی بین θ و t، به‌این معادلهٔ دیفرانسیلی می‌رسیم:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

یا

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}}$$

---

*) نیروئی درجهت مخالف حرکت.

که در آن، متغیرها هم، از یکدیگر جدا شده‌اند.

با انتگرال گیری، درسمت چپ از ۰ تا t و درسمت راست از ۰ تا θ، به‌وابستگی مطلوب می‌رسیم:

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}} \qquad (۱۴)$$

ولی این‌بار، تربیع به‌صورت متناهی درنمی‌آید. به‌طوری‌که خواهیم دید، انتگرال سمت راست، مستقیماً، به‌انتگرال بیضوی نوع اول تبدیل می‌شود.

رابطهٔ (۱۴) را، به‌این صورت، می‌نویسیم:

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

و با فرض $\sin\frac{\alpha}{2}=k$ $(0<k<1)$، متغیرجدید φ را، با توجه به‌رابطه‌های

$$\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\varphi,\ \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=k\cdot\cos\varphi\,d\varphi \qquad (۱۵)$$

وارد می‌کنیم که، ضمناً، تغییر θ از ۰ تا α، نظیر تغییر φ، از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ است. دراین‌صورت

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\sqrt{\frac{l}{g}}.\mathbf{F}(\varphi,k) \qquad (۱۶)$$

چون می‌توان، با توجه به‌رابطهٔ اول (۱۵)، φ را برحسب θ پیدا کرد، وابستگی t به θ را، می‌توان برقرارشده به‌حساب آورد.

اگر برعکس، بخواهیم θ را به‌حسب t بیان کنیم، باید انتگرال بیضوی زیر را تبدیل کنیم:

$$u=\int_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

این برابری u را به‌عنوان تابع پیوسته، یکنوا و صعودی (وحتی مشتق‌پذیر) از φ، دربازهٔ $(+\infty,-\infty)$ معرفی می‌کند که، خود آن هم، تغییری از $-\infty$ تا $+\infty$ دارد. در این حالت [۸۳]، متغیر φ، تابعی یک‌ارزشی از u، دربازهٔ $(+\infty,-\infty)$

می‌شود و ژاکوبی، آن را با amu* نشان داده است. اکنون، از (۱۶) روشن است که

$$\varphi = \mathrm{am}\sqrt{\frac{g}{l}}t; \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\mathrm{am}\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

تابع sin am («سینوس دامنه» یا «سینوس بیضوی») را معمولاً، به‌طور ساده، با snu** نمایش می‌دهند. بنابراین، بالاخره، بستگی θ از t، با برابری زیر بیان می‌شود:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\alpha\cdot\mathrm{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

در پایان، طول مدت T، زمان‌لازم برای نوسان پاندول ازوضع OB' به‌وضع OB، را محاسبه می‌کنیم. این زمان، برابر است با دوبرابر فاصلهٔ زمانی لازم، برای گذشتن از OA به OB است. با فرض $\theta = \alpha$ در (۱۴)، یا $\varphi = \frac{\pi}{2}$ در (۱۵) (پس از دوبرابر کردن)، مقدار T را برحسب انتگرال بیضوی کامل نوع اول، به‌دست می‌آوریم***:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\mathbf{K}(k)$$

می‌بینیم که دورهٔ نوسان T، عملاً به‌کمان α ــ که پاندول را ابتدا به اندازهٔ آن منحرف کرده‌ایم ــ بستگی دارد، زیرا k به α وابسته است. اگر، برای کمان‌های کوچك α، به‌جای مدول k، صفر بگذاریم، رابطهٔ ساده و تقریبی زیررا به‌دست می‌آوریم:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

که معمولاً، در دوره‌های مقدماتی درس فیزیك، آن را دیده‌ایم.

---

*) am، حرف‌های اول واژه «amplitude» (به‌معنای «دامنه») می‌باشد.

**) تابع sn u، که به‌عنوان تابعی از آوند مختلط در نظر گرفته می‌شود، یکی از تابع‌های ساده‌ای است که به‌وسیلهٔ آبل و ژاکوبی وارد شده است، و به‌تابع‌های بیضوی معروف شده‌اند.

***) اگرحد بالایی انتگرال (۱۴) را، α بگیریم، به‌انتگرالی «غیر خاص» می‌رسیم [کمی بعد، ۴۷۹ را ببینید]، زیرا در این‌حد، تابع زیرانتگرال برابر ∞ می‌شود. ولی اگر از انتگرال (۶) استفاده کنیم، به‌این دشواری بر نمی‌خوریم.

۳۶۰. یادداشتی دربارهٔ تشکیل معادله‌های دیفرانسیلی. با اکتفا به‌معادلهٔ مرتبهٔ اول، به‌صورت (۸)، به‌مسألهٔ مربوط به‌تشکیل این‌گونه معادله‌ها، می‌پردازیم. بهتر است که، خواننده، آن‌چه را در این زمینه خواهیم گفت، با آن‌چه در **۳۴۸** دربارهٔ معادلهٔ سادهٔ $dQ=q(x)dx$ گفته‌ایم، مقایسه کند.

شبیه قاعدهٔ تشکیل معادله، باید عنصرهای بی‌نهایت کوچك وارد در جسم‌های مورد نظر و نمودهای بی‌نهایت کوچکی را، که صحبت دربارهٔ آن‌ها است، مورد بررسی قرار دهیم. درست است که در مسأله‌های شمارهٔ پیش، ظاهراً، از این بررسی فرار کردیم، ولی درواقع، این طور نبود، زیرا در آن‌جا، از عبارت‌های آماده‌ای، برای ضریب زاویهٔ مماس و یا سرعت تغییر یك کمیت، استفاده کردیم، که خود آن‌ها، از بررسی عنصرهای بی‌نهایت کوچك به‌دست آمده‌اند.

برای برقراری بستگی بین عنصرهای بی‌نهایت کوچك، باید از همهٔ امکان‌هایی که برای ساده کردن مجاز شناخته شده‌است و از همهٔ تغییرهای تقریبی ــ که درواقع، به‌معنای حذف بی‌نهایت کوچك‌های مرتبهٔ بالاتر است ــ استفاده کرد. به‌خصوص توصیه می‌شود که همهٔ نمودهای بی‌نهایت کوچك از کمیت‌های مورد بررسی را، با دیفرانسیل‌های آن‌ها عوض کنید، به‌طوری که خواننده می‌داند، این تبدیل‌هم، به‌معنای حذف بی‌نهایت کوچك‌های مرتبهٔ بالاتر است. معنای همهٔ این راهنمائی‌ها را، درمثال خواهید دید [شمارهٔ بعد را ببینید].

در این‌جا، می‌خواهیم بر این نکتهٔ مهم، بازهم تأکید کنیم که، معادلهٔ دیفرانسیلی از نوع (۸)

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0$$

که در نتیجهٔ همهٔ این ساده کردن‌ها و حذف‌ها، به‌دست می‌آید، به هیچ‌وجه تقریبی نیست، بلکه کاملاً دقیق است.*

بنابراین، فرض می‌کنیم که، با عوض کردن نمودهای Δx و Δy با دیفرانسیل‌های dx و dy، و حذف ــ درصورت لزوم ــ جمله‌های بی‌نهایت کوچك مرتبهٔ بالاتر از Δx، به‌معادلهٔ (۸) برسیم. اگراین تبدیل‌ها را انجام نمی‌دادیم و، به‌جای dx و dy، همان Δx و Δy را می‌گرفتیم و، علاوه‌برآن، همهٔ بی‌نهایت کوچك‌های مرتبهٔ بالاتر را نگه می‌داشتیم و، باانتقال همهٔ این‌گونه بی‌نهایت کوچك‌ها به‌سمت راست، مجموع آن‌ها را α می‌نامیدیم (که α هم، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر است)، به‌طور دقیق، برای معادلهٔ (۸)، به‌دست می‌آمد:

---

*) این مطلب، شبیه بحثی است که در پایان **۳۴۸**، دربارهٔ برابری $dQ=q(x)dx$ داشتیم.

$$P(x, y)\Delta x+Q(x, y)\Delta y=\alpha$$

که دیگر، به‌هیچ‌وجه، تقریبی نیست. حال، اگر دوطرف این تساوی را بر Δx تقسیم کنیم:

$$P(x, y)+Q(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\alpha}{\Delta x}$$

وقتی که $\Delta x \to 0$، چون ضمناً داریم: $\frac{\alpha}{\Delta x} \to 0$، بنابراین، در حد، به‌این‌معادله‌می‌رسیم:

$$P(x, y)+Q(x, y)y'=0 \quad \text{یا} \quad P(x, y)+Q(x, y)\frac{dy}{dx}=0$$

که همان (۸) است. بنابراین، معادلهٔ (۸) هم، غیرتقریبی و دقیق است.

اگرچه، در عمل، برای تشکیل معادله‌ها، ظاهراً، از عبور بـه‌حد استفاده نمی‌کنیم، ولی، خود تعویض نموها به‌دیفرانسیل‌ها و حذف نموهای مرتبهٔ بالاتر، به‌همان معنای‌عبور به‌حد است.

دقت خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم کـه، ما به‌هیچ‌وجه نمی‌گوییم، هرگونه حذفی، و در هر جا، از بی‌نهایت‌کوچک‌های مرتبهٔ بالاتر، منجر به‌نتیجه‌ای دقیق می‌شود؛ تنها در حالتی‌که این حذف کردن «تا پایان» انجام شود و، در نتیجه، معادله‌ای به‌صورت (۸) ــ خطی و همگن نسبت‌به‌دیفرانسیل‌ها ــ به‌دست‌آید، می‌توان دقت آن‌را تضمین‌کرد [بازهم مشابه با شمارهٔ ۳۴۸].

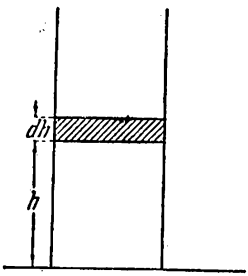
۳۶۱. مسأله‌ها. ۱) رابطهٔ مربوط به‌هواسنجی (رابطهٔ بارومتری). مسأله‌عبارت‌است از برقراری بستگی بین ارتفاع $h(M)$ نقطه‌ای از سطح دریا و فشار هوای p (کیلوگرم بر متر مربع).

بر سطح دریا، مساحتی به‌اندازهٔ یك متر مربع را در نظر می‌گیریم و فرض‌می‌کنیم، ستونی از هوا به‌شکل منشور، متکی بر این مساحت وجود داشته باشد. فشار هوای p،در مقطعی از این ستون به‌ارتفاع h، به‌وزن بخشی از ستون هـوا بستگی دارد که متکی بـر مقطع مذکور است. اگر ارتفاع h را، به مقدار بی‌نهایت‌کوچك dh بزرگ‌کنیم، میزان فشار هوا به‌اندازهٔ dp تنزل می‌یابدکه با وزن لایه‌ای از هوا، که بین مساحت‌های (h) و $(h+dh)$ قرارگرفته است اندازه‌گرفته می‌شود (شکل ۵۲):

$$-dp=s.dh$$

که درآن، s عبارت‌است از وزن یك مترمکعب هوا (به‌کیلوگرم)، تحت فشار p. درواقع

به‌این نکته توجه نمی‌کنیم که وقتی از سطح پایینی این لایه به سطح بالایی آن برویم، مقدار s تغییر می‌کند.



شکل ۵۲

به‌طوری که ازقانون بویل ـ ماریوت برمی‌آید، خودمقدار s متناسب با فشار است: $s=kp$. به‌نحوی که بالاخره

$$dp=-kpdh \quad \text{یا} \quad \frac{dp}{p}=-kdh$$

معادله‌ای که نوع آن برای ما آشناست [با ۳۵۹، مسأله‌های ۳ و ۴) (a) مقایسه کنید].

از آن‌جا

$$p=p_0e^{-kh}$$

اگر این معادله را، نسبت به h حل کنیم، در آن‌صورت، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$h=\frac{1}{k}\ln\frac{p_0}{p}$$

که به ما امکان می‌دهد. دربارهٔ ارتفاع h از سطح دریا، داوری کنیم.

درفیزیك ثابت‌می‌شودکه، ثابت $\frac{1}{k}$، به‌تقریب برابراست‌با $8000(1+0/004t)$، که درآن، t عبارت است ازمیانگین درجهٔ حرارت هوا. اگربه‌لگاریتم دهدهی عبورکنیم (با ضرب و تقسیم بر مدول ۰/۴۳) و نسبت فشار $\frac{p_0}{p}$ را بانسبت محاسبهٔ هواسنجی $\frac{b_0}{b}$ عوض کنیم، به‌آخرین رابطه می‌رسیم:

$$h=18400(1+0/004t)log\frac{b_0}{b}$$

این رابطه، برای تعیین تفاضل ارتفاع‌های دو نقطهٔ دلخواه، که درآن‌ها، درجهٔ هواسنج، به‌ترتیب، برابر b_0 و b است، نیز مناسب می‌باشد.

۲) اصطکاك طناب‌ها و تسمه‌ها. فرض کنیم از روی طبلك استوانه‌ای شکل ثابت و بدون حرکتی، تسمه (طناب یا چیزی شبیه آن) سوار شده باشدکه در یك کمان AB (شکل ۵۳–a)، نظیر زاویهٔ ω («زاویهٔ فراگیر»)، بر استوانه قرارگیرد. باز فرض می‌کنیم که در انتهای A از تسمه، نیروی S_0 و در انتهای B، نیروی S_1 گذاشته شده باشد.

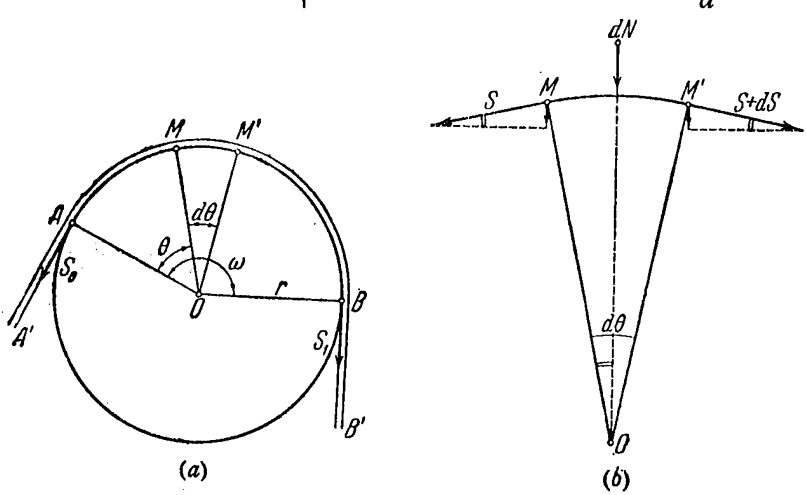
اگر بین تسمه و استوانه، اصطکاک وجود داشته باشد، نیروی S_0 می‌تواند، حتی با نیروی بزرگتر از آن، که در انتهای دیگر گذاشته شده است، تعادل برقرار کند. بزرگترین نیروی S_1، که با وجود اصطکاک، می‌تواند با نیروی S_0 متعادل شود، کدام است؟

ابتدا ببینیم، کشش S، چگونه در بخش AB از تسمه، در لحظه‌ای که لغزش آغاز می‌شود، توزیع شده است. این‌که، این کشش، مقدار ثابتی نیست، از این‌جا روشن می‌شود که، در نقطه‌های A و B، به‌ترتیب، برابر است با S_0 و S_1.

نقطهٔ M را روی کمان AB انتخاب می‌کنیم. جای این نقطه، با زاویهٔ $\theta = \widehat{AOM}$ معین می‌شود. حالا، ببینیم، چه نیروهایی بر جزء MM' تسمه، نظیر زاویهٔ مرکزی $d\theta$، اثر می‌کند. در نقطهٔ M، کشش $S = S(\theta)$ و در نقطهٔ M'، کشش $S+dS$ عمل می‌کند (شکل ۵۳–b). هردوی این نیروها، در جهت مماس بردایرهٔ استوانه هستند. برای این‌که نیروی اصطکاک بر جزء مورد نظر را معین کنیم، باید نیروی قائم dN را، که این جزء را برسطح استوانه می‌فشارد، حساب کنیم. این نیرو، از مؤلفه‌های شعاعی هر دو کشش، تشکیل شده است، به‌نحوی که

$$dN = S\sin\frac{d\theta}{2} + (S+dS)\sin\frac{d\theta}{2}$$

در این‌جا، می‌توان حاصل‌ضرب $dS.\sin\frac{d\theta}{2}$ را، به‌عنوان بی‌نهایت کوچک مرتبهٔ بالاتر، حذف کرد و $\sin\frac{d\theta}{d}$ را با بی‌نهایت کوچک هم‌ارز آن، $\frac{d\theta}{2}$ عوض کرد (که بازهم، به‌معنای



شکل ۵۳

حذف بی‌نهایت کوچك از مرتبهٔ بالاتر است). سرانجام

$$dN = Sd\theta$$

چون نیروی اصطکاك، متناسب با این نیروی قائم است، اگر ضریب نسبت (ضریب اصطکاك) را با μ نشان دهیم، به‌دست می‌آید:

$$dR = \mu dN = \mu Sd\theta$$

اصطکاك در خلاف جهت حرکت اولیه، عمل می‌کند، به‌نحوی که نیروی dR همراه با کشش S در نقطهٔ M، باید با کشش $S+dS$ در نقطهٔ M'، تعادل کند. از آن‌جا

$$dS = \mu Sd\theta$$

باز هم به‌معادلهٔ دیفرانسیلی رسیدیم که برای ما آشناست. جواب این معادله را می‌توان، با درنظرگرفتن شرط‌های اولیهٔ $S = S_0$ (به‌ازای $\theta = 0$)، به‌فوریت نوشت:

$$S = S_0 \cdot e^{\mu\theta}$$

بالاخره، با فرض $\theta = \omega$، به‌دست می‌آید:

$$S_1 = S_0 e^{\mu\omega}$$

این رابطهٔ مهم، متعلق به‌اولر است.

۳) رابطهٔ پواسون (S. D. Poisson). می‌خواهیم، بستگی بین حجم V و فشار p از یك مولکول گرم گاز ایده‌آل را، در یك جریان بی‌دررو (آدیاباتیك، یعنی در حالت فقدان کامل مبادلهٔ حرارتی بین گاز و محیط اطراف آن)، پیدا کنیم.

وضعیت گاز، علاوه بر مقدارهای V و p، به‌درجهٔ حرارت (مطلق) آن، T نیز بستگی دارد. ضمناً، این کمیت‌ها، مستقل نیستند و با رابطهٔ معروف کلاپیرون، به‌هم مربوط‌اند:

$$pV = RT \quad (R، \text{ثابت گازی است}) \qquad (۱۷)$$

ببینیم، برای این‌که گاز از حالت (p, V, T)، به‌حالت بی‌نهایت نزدیك $(p+dp, V+dV, T+dT)$ تبدیل شود، چه‌مقدار انرژی dU، در واحد گرما، لازم است.

جریان عبور را، می‌توان دردومرحله درنظرگرفت: در مرحلهٔ اول، حجم V به‌اندازهٔ dV بزرگ شود و، در مرحلهٔ دوم، درجهٔ حرارت T از گاز ــ با ثابت ماندن حجم ــ به‌اندازهٔ dT تغییر کند.

برای این‌که، کار جزئی انبساط گاز را محاسبه کنیم، فرض می‌کنیم، جرم گاز

موردنظر، در یك طرف پیستون یك استوانه قرار گرفته باشد [با ۳۵۴، ۲) مقایسه کنید]. نیروئی که ازسوی گاز بر پیستون عمل می‌کند، برابراست با pQ، که در آن‌جا Q مساحت پیستون است. اگر، ضمن انبساط گاز، پیستون به‌فاصلهٔ ds حرکت کند، کار انجام‌شده با گاز، برابر است با $pQds$ یا pdV (زیرا $Qds=dV$). این‌کار، با واحدهای معمولی بیان می‌شود، مثلاً، با کیلوگرم‌متر (اگر p با «کیلوگرم بر مترمربع» و V با «مترمکعب» داده شده باشد). اگر بخواهیم گرمایی را، که برای این‌کار مصرف شده است، معین کنیم، باید این عبارت را، در به‌اصطلاح «معادل حرارتی کار»، یعنی در $A=\frac{1}{۴۲۷}$ (کالری بر کیلوگرم متر) ضرب کنیم. که به‌نتیجهٔ $ApdV$ می‌رسیم.

تغییر درجهٔ حرارت، به اندازهٔ dT درجه، مستلزم c_vdT کالری است، که در آن، c_v گرمای ویژه گاز در حجم ثابت است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$dU=c_vdT+Apdv \qquad (۱۸)$$

در این‌جا dT را می‌توان به‌سادگی حذف کرد. اگر از رابطهٔ (۱۷) مشتق بگیریم:

$$pdV+Vdp=RdT \qquad (۱۹)$$

و dT را محاسبه می‌کنیم:

$$dT=\frac{1}{R}(pdV+Vdp)$$

بنابراین، اگر این مقدار را در (۱۸) بگذاریم:

$$dU=\frac{c_v}{R}Vdp+\frac{c_v+AR}{R}pdv$$

می‌توان نشان داد که c_v+AR، عبارت‌است از همان گرمای ویژهٔ c_p گاز، درفشار ثابت*؛

*) اگر از (۱۹) معین کنیم،

$$pdV=Rdt-Vdp$$

و در (۱۸) بگذاریم، به‌دست می‌آید،

$$dU=(c_v+AR)dT-AVdp$$

در این‌جا $p=\text{const}$، یعنی $dp=0$ و داریم،

$$dU=(c_v+AR)dT$$

که نشان می‌دهد c_v+AR، همان c_p است.

به‌طوری که بالاخره داریم:

$$dU=\frac{c_v}{R}V\,dp+\frac{c_p}{R}p\,dV$$

حالا، برمی‌گردیم بـه‌فرض مسأله، که جریان به‌صورت آدیاباتیك است کـه، در این‌صورت $dU=0$. به‌این ترتیب، به‌معادلهٔ دیفرانسیلی می‌رسیم کـه p و V را بـه‌هم مربوط می‌کند:

$$c_vV\,dp+c_p\,p\,dV=0\Rightarrow\frac{dp}{p}=k\frac{dV}{V}\quad\left(k=\frac{c_p}{c_v}\right)$$

که اگر از آن انتگرال بگیریم، حاصل می‌شود:

$$\ln p=k\ln V=0\Rightarrow pV^k=C$$

و این، همان رابطهٔ پواسون است.

MATH75.IR

فصل یازدهم

رشته‌های نامتناهی با جمله‌های ثابت

§۱. مقدمه

۳۶۲. مفهوم‌های اساسی. دنبالهٔ نامتناهی عددهای زیررا درنظر می‌گیریم:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \qquad (1)$$

به‌نماد

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots \qquad (2)$$

که ازاین عددها تشکیل شده است، رشته (سری) نامتناهی، وخود عددهای (۱) را، جمله‌های رشته می‌نامند. (۲) را می‌توان، بااستفاده ازعلامت جمع، این‌طور نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2a)$$

که درآن، اندیس n، تمام مقدارهای از ۱ تا ∞ را می‌پیماید*.

اگرجمله‌های رشته را، مرتباً، باهم جمع کنیم، مجموع‌های زیر (به‌تعداد نامتناهی) به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{aligned} A_1=a_1,\ A_2=a_1+a_2,\ A_3=a_1+a_2+a_3,\\ \dots,\ a_n=a_1+a_2+\dots+a_n,\dots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

که آن‌ها را، مجموع‌های جزئی رشته می‌گویند. این دنبالهٔ مجموع‌های جزئی $\{A_n\}$را، همیشه، با رشتهٔ (۲) مقایسه خواهیم‌کرد: نقش این مجموع‌ها، ازهمان دنبالهٔ اصلی‌عددها، سرچشمه می‌گیرد.

---

*) گاهی، درعمل، راحت‌تراست‌که جمله‌های رشته را، به‌جای واحد، از صفر یا یك عددطبیعی بزرگتر از واحد، آغاز کنند.

حد متناهی یا نامتناهی A، از این مجموع‌های جزئی A_n دنبالهٔ (۲)، به‌ازای $n \to \infty$:

$$A = \text{حد } A_n$$

را مجموع رشته می‌نامند و می‌نویسند:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

اگر رشته، دارای مجموعی متناهی باشد، آن را متقارب (همگرا) و درحالت عکس (یعنی، اگر مجموع برابر $\pm\infty$ باشد و یا اگر اصلا مجموعی وجود نداشته باشد)، آن را متباعد (واگرا) گویند*.

به‌این ترتیب، مسألهٔ مربوط به‌تقارب رشتهٔ (۲)، بنا به تعریف، هم‌ارز مسألهٔ وجود حد متناهی برای دنبالهٔ (۳)است. برعکس، واریانت مفروض $x = x_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$، هرچه باشد، مسالهٔ وجود حد متناهی برای آن، منجر به‌مسألهٔ تقارب رشتهٔ زیرمی‌شود:

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots \qquad (۴)$$

که برای آن، مجموع‌های جزئی، عبارتند از واریانت‌های زیر:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

ضمناً، مجموع رشته، منطبق برحد واریانت است.

به‌زبان دیگر، رشتهٔ نامتناهی مورد بررسی ومجموع آن، خیلی ساده، شکل تازه‌ای ازمطالعهٔ واریانت (یا دنباله) وحدآن است. ولی، همان‌طورکه خواننده خواهد دید، این شکل مطالعه، چه برای اثبات وجود حد وچه برای محاسبهٔ آن، ارزش فوق‌العاده‌ای‌دارد. این کیفیت، از رشته‌های نامتناهی، وسیلهٔ بسیار مهمی برای بررسی آنالیزریاضی و کاربردهای آن، دراختیار ما قرار می‌دهد.

۳۶۳. مثال‌ها. ۱) ساده‌ترین نمونهٔ رشته‌های نامتناهی، عبارت است از تصاعد هندسی، که خواننده، به‌اندازهٔ کافی، با آن آشناست:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

مجموع جزئی این رشته (به‌شرط $q \neq 1$) چنین است:

---

*) درجلد اول هم، دراین‌باره صحبت کرده‌ایم [۲۵، ۹)].

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}$$

اگر، q، قدرنسبت تصاعد، از لحاظ قدرمطلق، کوچکتر از واحد باشد، در آن صورت [همان‌طور که در ۲۵، ۷) دیدیم]، S_n حدی متناهی دارد:

$$S=\frac{a}{1-q}$$

یعنی، رشته متقارب ومجموع آن، برابراست با S.

به‌ازای $|q|\geqslant 1$، نمونه‌ای از رشتهٔ متباعد (واگرا) به‌دست می‌آید. اگر داشته باشیم: $q\geqslant 1$، مجموع آن بی‌نهایت (با علامت معلوم) می‌شود و، درسایرحالت‌ها، اصلاً مجموعی ندارد. به‌خصوص، رشتهٔ جالبی را درنظرمی‌گیریم که به‌ازای $a=1$ و $q=-1$ به‌دست می‌آید*:

$$1-1+1-1+\cdots=1+(-1)+1+(-1)+\cdots$$

که مجموع‌های جزئی آن، به‌نوبت، برابر ۱ و ۰ می‌شود.

۲) عدد حقیقی α را، که به‌صورت کسر دهدهی و نامتناهی زیر نوشته شده باشد:

$$C_0/c_1c_2\cdots c_n\cdots$$

[۹]، به‌سادگی می‌توان، به‌صورت رشتهٔ زیر نوشت:

$$\alpha=C_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\frac{c_3}{10^3}+\cdots+\frac{c_n}{10^n}+\cdots$$

۳) رشتهٔ زیررا، ازروی نمونهٔ (۴) می‌سازیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n+1)-\ln n]$$

که آشکارا متباعد است، زیرا $\ln(1+n)\to\infty$.

۴) رشته‌های زیرهم، برهمان اساس، ساخته شده‌اند (α، عددی است دلخواه و مخالف ۱، ۲، ۳، ...):

---

*) اگرجملهٔ a ازرشته عددی منفی باشد، $a=-b$ (و $b>0$)، درآن‌صورت، به‌جای این‌که بنویسند ... $+(-b)+\cdots$، می‌نویسند ... $+b-\cdots$، تأکید می‌کنیم که، دراین‌جا، جملهٔ رشته، نه b، بلکه $(-b)$ است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha+n}-\frac{1}{\alpha+n+1}\right]=\frac{1}{\alpha+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}\equiv$$

$$\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}-\frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

و به‌طور کلی، برای عدد صحیح و دلخواه $p\geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+p)}=\frac{1}{p(\alpha+1)\cdots(\alpha+p)}$$

۵) رشتهٔ زیرهم، ازهمان گونه است:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{2n-1}}-\frac{1}{1-x^{2n}}\right)$$

که در آن، x، عدد تثبیت شدهٔ دلخواهی، مخالف ± 1 است. چون مجموع جزئی nام، برابراست با

$$\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2n}}$$

بنابراین، به‌ازای $|x|<1$، رشته به‌سمت $\frac{x}{1-x}$ و به‌ازای $|x|>1$ به‌سمت $\frac{1}{1-x}$ میل می‌کند.

۶) تباعد رشتهٔ زیر، به‌سادگی، معلوم می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

درواقع، چون جمله‌های این رشته نزولی است، بنابراین، مجموع جزئی nام آن

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

که، همراه با n، تا بی‌نهایت ترقی می‌کند.

۷) بالاخره، نمونهٔ بسط عدد e [۳۷] را می‌آوریم:

$$e=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{۱}{n!}+\cdots=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n!}$$

خواننده می‌تواند، با توجه به‌مقدار تقریبی عدد e در ۳۷، تحقیق کند که چگونه، مجموع‌های جزئی به‌تدریج به‌مقدار تقریبی e، نزدیك می‌شوند.

۳۶۴. قضیه‌های اساسی. اگر در رشتهٔ (۲)، از m جملهٔ اول صرف‌نظر کنیم، به‌رشتهٔ

$$a_{m+۱}+a_{m+۲}+\cdots+a_{m+k}+\cdots=\sum_{n=m+۱}^{\infty}a_n \qquad (۵)$$

می‌رسیم که به‌باقی‌ماندهٔ رشتهٔ (۲) بعد از جملهٔ mام موسوم است.

۱°. اگر رشتهٔ (۲) متقارب باشد، هرکدام از باقی‌مانده‌های (۵) آن نیز متقارب خواهد بود و، برعکس، ازتقارب باقی‌ماندهٔ (۵)، تقارب رشتهٔ نخستین (۲)، نتیجه‌می‌شود. m را تثبیت می‌کنیم ومجموع جزئی kام رشتهٔ (۵) را A'_k می‌نامیم:

$$A'_k=a_{m+۱}+a_{m+۲}+\cdots+a_{m+k}$$

روشن است که

$$A'_k=A_{m+k}-A_m \qquad (۶)$$

اگر رشتهٔ (۲) متقارب باشد، به‌طوری‌که $A_n\to A$، در این صورت، با ترقی نامحدود k، حدمتناهی

$$A'=A-A_m \qquad (۷)$$

برای مجموع A'_k به‌دست می‌آید که تقارب (هم‌گرائی) رشتهٔ (۵) را تأمین می‌کند.

برعکس، اگر معلوم باشدکه رشتهٔ (۵) متقارب است، به‌طوری که $A'_k\to A'$، در آن صورت، برابری (۶) را، با فرض $k=n-m$ (به‌ازای $n>m$)، چنین‌می‌نویسیم:

$$A_n=A_m+A'_{n-m}$$

ازاین‌جا دیده می‌شودکه، با ترقی نامحدود n، مجموع جزئی A_n، دارای حد

$$A=A_m+A' \qquad (۸)$$

است، یعنی رشتهٔ (۲)، متقارب است.

به زبان دیگر،کنار گذاشتن تعدادی متناهی از جمله‌های نخستین (رشته، یا اضافه‌کردن چندجملهٔ تازه به‌ابتدای آن، تأثیری در رفتار رشته (به‌معنای تقارب و تباعد آن) ندارد.

مجموع رشتهٔ (۵) را، درصورتی‌که متقارب باشد، به‌جای A'، با نماد α_m، یعنی با اندیسی نشان می‌دهیم که، بعداز آن، جمله‌های باقی‌مانده آغاز می‌شود، آن‌گاه، رابطه‌های (۸) و (۷)، به‌ترتیب، به‌این صورت درمی‌آیند:

$$A=A_m+\alpha_m,\quad \alpha_m=A-A_m \tag{۹}$$

اگر m را به‌سمت بی‌نهایت میل دهیم، درآن صورت $A_m \to A$ و $\alpha_m \to 0$.

بنابراین:

۲°. اگر رشتهٔ (۲) متقارب باشد، آن‌گاه، مجموع α_n باقی‌ماندهٔ آن بعداز جملهٔ mام، با ترقی m، به‌سمت صفر میل می‌کند.

ویژگی سادهٔ زیررا، دربارهٔ رشته‌های متقارب، یادآوری می‌کنیم:

۳°. اگر جمله‌های رشتهٔ متقارب (۲) را، در ضریب c ضرب کنیم، تقارب آن به‌هم نمی‌خورد (و تنها، مجموع آن، در c ضرب می‌شود).

درواقع، مجموع جزئی $\bar{A}_n$ رشتهٔ

$$ca_1+ca_2+\cdots+ca_n+\cdots$$

به‌روشنی برابر است با

$$\bar{A}_n=ca_1+ca_2+\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+\cdots+a_n)=cA_n$$

که حدآن، برابر با cA می‌شود.

۴°. دو رشتهٔ متقارب

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

و

$$B=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

را می‌توان، جمله به‌جمله با هم جمع (یا از هم تفریق) کرد، به‌طوری که رشتهٔ

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)+\cdots$$

نیز متقارب است و مجموع آن، برابر است با $A\pm B$.

اگر A_n، B_n و C_n، نمایندهٔ مجموع‌های جزئی رشته‌های نامبرده باشند، روشن است که

$$C_n=(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)=$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\pm(b_1+b_2+\cdots+b_n)=A_n\pm B_n$$

با عبور به‌حد، داریم: B_n حد $\pm A_n$ حد $= C_n$ حد، که حکم ما را ثابت می‌کند.

در پایان، به‌یك نکته اشاره می‌کنیم:

۵°. جملهٔ عمومی a_n از یك رشتهٔ متقارب، به‌سمت صفر میل می‌کند:

این مطلب را، به‌صورتی کاملاً مقدماتی، می‌توان ثابت کرد: وقتی که A_n (وهمراه با آن، A_{n-1})، دارای حد متناهی A است، بنابراین

$$a_n = A_n - A_{n-1} \to 0$$

این حکم، شرط لازم تقارب یك رشته است که ما، غالباً، از آن استفاده خواهیم کرد. وقتی که این شرط وجود نداشته باشد، رشته آشکارا متباعد است. ولی، باید به‌این نکتهٔ مهم توجه کرد که این شرط، به‌خودی‌خود، برای تقارب رشته، کافی نیست؛ به‌زبان دیگر، با وجود این شرط بازهم، ممکن است، رشتهٔ مفروض متباعد باشد. نمونه‌هایی از این گونه، چنین‌اند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

که قبلاً، مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۳۶۳، ۳) و ۶)]. تعداد زیادی از این گونه‌رشته‌ها را، بعداً خواهیم دید.

§۲. تقارب رشته‌های مثبت

۳۶۵. شرط تقارب رشته‌های مثبت. به‌مسألهٔ مربوط به تقارب یا تباعد رشته‌ها، می‌پردازیم. این مسأله‌را، می‌توان به‌سادگی، برای رشته‌هایی که جمله‌های غیرمنفی دارند، حل کرد. برای سهولت‌کار، این رشته‌ها را، رشته‌های مثبت می‌نامیم.

فرض می‌کنیم، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (A)$$

مثبت باشد، یعنی $a_n \geqslant 0 \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$، آن‌گاه، معلوم است که

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n$$

یعنی واریانت A_n صعودی‌است، بایادآوری قضیهٔ مربوط به‌واریانت یکنوا [۳۴]، مستقیماً به‌گزارهٔ اساسی زیر، درنظریهٔ رشته‌ها، می‌رسیم:

رشتهٔ مثبت (A) همواره دارای مجموع‌است. این مجموع، وقتی متناهی (ودرنتیجه،

(رشته وقتی متقارب) است که مجموع‌های جزئی (رشته، از بالا کران‌دار باشد، و درصورت خلاف آن، نامتناهی (و رشتهٔ متباعد) است.

همهٔ نشانه‌های تقارب (و تباعد) رشته‌های مثبت، در حساب آخر، براساس همین قضیهٔ ساده، پایه‌گذاری شده‌است. ولی، به‌ندرت می‌توان، برای داوری دربارهٔ خصوصیت رشته، مستقیماً از آن استفاده کرد. نمونه‌هایی می‌آوریم:

۱) رشتهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

که به‌رشتهٔ توافقی (یا همساز، هارمونیك) موسوم است*.

نابرابری بدیهی زیررا داریم:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

اگر از دوجملهٔ اول چشم بپوشیم و بقیهٔ جمله‌های رشتهٔ توافقی را، به‌ترتیب، به‌گروه‌هایی شامل ۲، ۴، ۸، ...، 2^{k-1}، ... جمله، تقسیم کنیم:

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2};\ \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4=2^2};\ \underbrace{\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}}_{8=2^3};\ \cdots;$$

$$\cdots;\ \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}};\ \cdots$$

هرکدام ازاین مجموع‌ها، به‌طور جداگانه، بزرگتر از $\frac{1}{2}$ می‌شود، اگر در رابطهٔ (۱)، به‌جای n، به‌ترتیب، ۲، ۴، ۸، ...، 2^{k-1}، ... بگذاریم، به‌درستی این حکم، متقاعدمی‌شویم. حالا، اگر مجموع جزئی nام رشتهٔ توافقی را H_n بنامیم، معلوم است که

$$H_{2^k}>k\cdot\frac{1}{2}$$

---

*) هرجملهٔ این‌رشته، باآغاز از دومی، واسطهٔ توافقی دو جملهٔ مجاور خود است. [عدد c را، واسطهٔ توافقی دو عدد a و b گویند، به‌شرطی‌که داشته باشیم: $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$].

می‌بینیم که، مجموع‌های جزئی، از بالا، کران‌دار نیستند: رشته دارای مجموع نامتناهی است.

این را هم یادآوری کنیم که، با ترقی n، مقدار H_n بسیار کند ترقی می‌کند؛ مثلاً اولر حساب کرده است:

$$H_{۱۰۰۰}=۷/۴۸\ \ldots;\quad \ldots;\quad H_{۱۰۰۰۰۰۰}=۱۴/۳۹\ \ldots;\quad \ldots$$

بعداً دربارهٔ ترقی H_n، به‌طور دقیق‌تری صحبت خواهیم کرد [۳۶۷، ۱۰)].

۲) حالا، رشتهٔ کلی‌تر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^s}=۱+\frac{۱}{۲^s}+\frac{۱}{۳^s}+\ldots+\frac{۱}{n^s}+\ldots$$

که در آن، s عدد حقیقی غیرمشخصی است. رشتهٔ قبلی را، می‌توان حالت خاصی از این رشته (به‌ازای $s=۱$) دانست. به‌دلیل شباهت با رشتهٔ ۱)، این رشته را هم، ناواگرا می‌نامند.

از آن‌جا که برای $s>۱$، جمله‌های این رشته، به‌ترتیب، بزرگ‌تر از جمله‌های رشتهٔ ۱) هستند، بنابراین، با این فرض، مجموع‌های جزئی هم، مسلماً، از بالا کران‌دار نیستند، به‌نحوی که، رشته ما متباعد می‌شود.

به‌حالتی بپردازیم که $s>۱$ باشد. برای راحتی فرض می‌کنیم: $s=۱+\sigma$، که در آن $\sigma>۰$. شبیه (۱)، در این حالت داریم:

$$\frac{۱}{(n+۱)^s}+\frac{۱}{(n+۲)^s}+\ldots+\frac{۱}{(۲n)^s}<n.\frac{۱}{n^s}=\frac{۱}{n^\sigma}\qquad(۲)$$

شبیه قبل، با جداکردن گروه‌های متوالی جمله‌ها

$$\underbrace{\frac{۱}{۳^s}+\frac{۱}{۴^s}}_{۲};\quad \underbrace{\frac{۱}{۵^s}+\frac{۱}{۶^s}+\frac{۱}{۷^s}+\frac{۱}{۸^s}}_{۲^۲};\quad \underbrace{\frac{۱}{۹^s}+\ldots+\frac{۱}{۱۶^s}}_{۲^۳};\ \ldots$$

$$\ldots;\ \underbrace{\frac{۱}{(۲^{k-۱}+۱)^s}+\ldots+\frac{۱}{(۲^k)^s}}_{۲^{k-۱}};\ \ldots$$

به‌کمک (۲)، به‌سادگی نشان داده می‌شود که این مجموع‌ها، به‌ترتیب، از جمله‌های نظیر تصاعد

$$\frac{۱}{۲^\sigma};\quad \frac{۱}{۴^\sigma}=\frac{۱}{(۲^\sigma)^۲};\quad \frac{۱}{۸^\sigma}=\frac{۱}{(۲^\sigma)^۳};\ \ldots;\ \frac{۱}{(۲^{k-۱})^\sigma}=\frac{۱}{(۲^\sigma)^{k-۱}};\ \ldots$$

کوچکترند. در چنین حالتی، روشن است که، مجموع رشتهٔ مورد نظر هرچه باشد از عدد ثابت

$$L=1+\frac{1}{2^s}+\frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1-\frac{1}{2^\sigma}}$$

کوچکتر است و، در نتیجه، رشتهٔ مفروض، متقارب است.

[مجموع این رشته، که به s بستگی دارد، همان تابع مشهور $\zeta(s)$ ریمان است، که در نظریهٔ عددها، نقش مهمی دارد].

۳۶۶. قضیه‌های مربوط به‌مقایسهٔ رشته‌ها. تقارب یا تباعد یک‌رشتهٔ‌مثبت را، اغلب، از راه مقایسه آن، با رشتهٔ دیگری که تقارب یاتباعد آن برای ما معلوم است، معین می‌کنند. اساس این مقایسه بر قضیهٔ سادهٔ زیر قرار دارد:

قضیه ۱. دو رشتهٔ مثبت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \qquad (A)$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \qquad (B)$$

اگر با شروع ازجایی (مثلاً، برای $n>N$)، نابرابری $a_n\leqslant b_n$ برقرار باشد، درآن‌صورت، از تقارب رشتهٔ (B)، تقارب رشتهٔ (A) و یا، از تباعد رشتهٔ (A)، تباعد رشتهٔ (B) نتیجه می‌شود.

اثبات. چون، با کنار گذاشتن تعدادی متناهی از جمله‌های اولیه، رفتار رشته تغییر نمی‌کند [۳۶۴، ۱°]، بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض کرد که نابرابری $a\leqslant b$، به‌ازای همهٔ مقدارهای ... ، ۳ ، ۲ ، ۱ $=n$، برقرار است. مجموع‌های جزئی رشته‌های (A) و (B) را، به‌ترتیب، A_n و B_n می‌نامیم، خواهیم‌داشت:

$$A_n\leqslant B_n$$

فرض کنیم، رشتهٔ (B) متقارب باشد؛ آن‌وقت، براساس قضیهٔ [۳۶۵]، مجموع‌های B_n کران‌دار هستند:

$$B_n\leqslant L \qquad (n=1, 2, 3, \ldots;\ L=\text{const.})$$

و بنابر نابرابری قبل، به‌طور مسلم، داریم:

$$A_n \leqslant L$$

و این، بنابر همان قضیه، به‌معنای تقارب رشتهٔ (A) است.

گاهی، استفاده از قضیهٔ زیر، که نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱ است، عملی‌تر و ساده‌تر است:

قضیهٔ ۲. اگر حد زیر وجود داشته باشد:

$$\text{حد } \frac{a_n}{b_n} = K^* \quad (0 \leqslant K \leqslant +\infty)$$

در آن صورت، از تقارب رشتهٔ (B)، به‌شرط $K < +\infty$، تقارب رشتهٔ (A)، و از تباعد رشتهٔ (A)، به‌ازای $K > 0$، تباعد رشتهٔ (B) نتیجه می‌شود. [یعنی، به‌ازای $0 < K < +\infty$، هر دو رشته، به‌طور هم‌زمان، متقارب یا متباعد هستند].

اثبات. فرض کنیم، رشتهٔ (B) متقارب و $K < +\infty$ باشد. با انتخاب عدد غیرمشخص $\varepsilon > 0$، با توجه به‌تعریف حد، برای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ n، خواهیم داشت:

$$\frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon \Rightarrow a_n < (K+\varepsilon) b_n$$

با توجه به ۳۴۶، ۳°، هم‌زمان با رشتهٔ (B)، رشتهٔ $\sum (K+\varepsilon) b_n$ هم، که از ضرب جمله‌های (B) در عدد ثابت $K+\varepsilon$ به‌دست آمده است، متقارب خواهد بود. از این جا، با توجه به‌قضیهٔ قبل، تقارب رشتهٔ (A) نتیجه می‌شود.

اگر هم، رشتهٔ (B) متباعد و $K^* > 0$ باشد، آن گاه در این حالت، نسبت معکوس $\frac{b_n}{a_n}$، دارای حد متناهی است. رشتهٔ (A) باید متباعد باشد، زیرا اگر متقارب می‌بود، با توجه به‌آن‌چه ثابت کردیم، رشتهٔ (B) نیز متقارب می‌شد.

قضیهٔ دیگری هم، برای مقایسهٔ دو رشته، می‌آوریم که باز هم نتیجه‌ای از قضیهٔ اول است.

قضیهٔ ۳. اگر با شروع از جایی (مثلاً برای $n > N$)، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}^{**} \qquad (۳)$$

در آن‌صورت، از تقارب رشتهٔ (B)، تقارب رشتهٔ (A)، و یا از تباعد رشتهٔ (A)، تباعد

---

*) ضمناً فرض می‌گیریم که $b_n \neq 0$.

**) ضمناً، a_n و b_n، مخالف صفر فرض می‌شوند.

رشتهٔ (B) نتیجه می‌شود.

اثبات. شبیه قضیهٔ ۱، بدون این‌که به‌کلی بودن قضیه لطمه‌ای وارد آید، می‌توان فرض کرد که نابرابری (۳)، برای همهٔ مقدارهای ... ،۳ ،۲ ،۱ = n درست است. درچنین حالتی داریم:

$$\frac{a_2}{a_1}\leqslant\frac{b_2}{b_1},\quad \frac{a_3}{a_2}\leqslant\frac{b_3}{b_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{b_n}{b_{n-1}}$$

اگر این نابرابری‌ها را، عضو به‌عضو، در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{a_n}{a_1}\leqslant\frac{b_n}{b_1}\quad\text{یا}\quad a_n\leqslant\frac{a_1}{b_1}\cdot b_n\qquad(n=1,2,3,\ldots)$$

اگر رشتهٔ (B) متقارب باشد، همراه با آن، رشتهٔ $\sum\frac{a_1}{b_1}b_n$ هم، که از ضرب جمله‌های آن در ضریب ثابت $\frac{a_1}{b_1}$ به‌دست آمده است، متقارب می‌شود. و، بنابراین، با توجه به‌قضیهٔ ۱، رشتهٔ (A) هم، متقارب می‌شود.

حالا، به‌مثال‌هایی می‌پردازیم که تقارب یا تباعد رشته‌ها را، به کمك قضیه‌های مقایسه‌ای، معین می‌کنند.

۳۶۷. مثال‌ها. ۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ $(a>0)$.

در حالت $a\leqslant 1$ شرط لازم تقارب از بین‌می‌رود [۳۶۴، ۵°] و رشته، متباعداست. درحالت $a>1$، جمله‌های این‌رشته، ازجمله‌های‌نظیر رشتهٔ متقارب $\sum\left(\frac{1}{a}\right)^n$ کوچکتراند و، بنابراین، رشتهٔ مفروض، متقارب است (قضیهٔ ۱).

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. این رشته متقارب است، زیرا

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n!}{2^n(2n-1)!!}<\frac{1}{2^n}\qquad\text{(قضیهٔ ۱)}$$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$ $(0<x<3\pi)$.

چون داریم:

$$۲^n \sin\frac{x}{۳^n} < x\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$$

و رشتهٔ $\sum\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$ متقارب است، رشتهٔ مفروض هم متقارب می‌شود (قضیهٔ ۱).

۴) دوباره، رشتهٔ توافقی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ را در نظر می‌گیریم و آن را، از روی قضیهٔ ۲، با رشتهٔ آشکارا متباعد زیر، مقایسه می‌کنیم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}[\ln(n+۱)-\ln n]=\sum_{n=۱}^{\infty}\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right) \quad [(۳، ۳۶۳]$$

و چون داریم [۷۷، ۵) – (a)]

$$\text{حد}\ \frac{\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right)}{\frac{۱}{n}}=۱$$

و از این‌جا، تباعد رشتهٔ توافقی هم نتیجه می‌شود.

به زبان دیگر: اگر رابطهٔ نموهای محدود را، در مورد تابع $\ln x$ در بازهٔ $[n, n+۱]$، به‌کار بریم، خواهیم داشت:

$$\ln(n+۱)-\ln n=\frac{۱}{n+\theta} \quad (۰<\theta<۱)$$

و درنتیجه، رشتهٔ توافقی، که جمله‌های آن به‌ترتیب بزرگترند، به‌طورمسلم، متباعدمی‌شود (قضیهٔ ۱).

۵) به‌همین ترتیب، می‌توان، تقارب رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۱+\sigma}}$ را(به‌ازای $\sigma>۰$)، بامقایسهٔ آن با رشتهٔ آشکارا متقارب زیر، معلوم کرد:

$$\sum_{n=۲}^{\infty}\left[\frac{۱}{(n-۱)^\sigma}-\frac{۱}{n^\sigma}\right]$$

اگر رابطهٔ نموهای محدود را، درمورد تابع $\frac{۱}{x^\sigma}$ در بازهٔ $[n-۱, n]$ به‌کاربریم، داریم:

$$\frac{۱}{(n-۱)^\sigma}-\frac{۱}{n^\sigma}=\frac{\sigma}{(n-\theta)^{۱+\sigma}} \quad (۰<\theta<۱)$$

به‌این ترتیب، به‌ازای $n \geqslant ۲$:

$$\frac{۱}{n^{۱+\sigma}} < \frac{۱}{\sigma}\left[\frac{۱}{(n-۱)^{\sigma}} - \frac{۱}{n^{\sigma}}\right]$$

از آن‌جا، از روی قضیهٔ ۱، تقارب رشتهٔ مورد نظر، ثابت می‌شود.

۶) برای آن‌که، بـا همین روش، نتیجهٔ تازه‌ای به‌دست آوریم، رشتهٔ $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n \ln n}$ را (که جمله‌های آن، از جمله‌های نظیر رشتهٔ توافقی هم کوچکترند)، در نظر می‌گیریم. رشتهٔ مفروض را با رشتهٔ متباعد زیر مقایسه می‌کنیم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} [\ln \ln(n+۱) - \ln \ln n]$$

با به‌کار بردن رابطهٔ نموهای محدود، در مورد تابع $\ln \ln x$ در بازهٔ $[n, n+۱]$، نتیجه می‌گیریم:

$$\ln \ln(n+۱) - \ln \ln n = \frac{۱}{(n+\theta)\ln(n+\theta)} \quad (۰ < \theta < ۱)$$

از آن‌جا، با توجه به‌قضیهٔ ۱، نتیجه‌می‌گیریم که رشتهٔ مفروض هم، که جمله‌های آن به‌ترتیب بزرگترند، به‌طور مسلم، یك رشتهٔ متباعد است.

۷) مقایسه با رشته‌های توافقی ۴) و ۵)، این امکان را به‌وجود می‌آورد که دربارهٔ رفتار رشته‌های زیادی داوری کنیم. با توجه به‌قضیهٔ ۱:

(a) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n(n+۱)}}$ متباعد است: $\frac{۱}{\sqrt{n(n+۱)}} > \frac{۱}{n+۱}$؛

(b) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n(n^{۲}+۱)}}$ متقارب است: $\frac{۱}{\sqrt{n(n^{۲}+۱)}} < \frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}}$؛

(c) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(\ln n)^{p}}$ $(p > ۰)$ متباعد است: $\frac{۱}{(\ln n)^{p}} > \frac{۱}{n}$ (برای n بـه قدر کافی بزرگ)؛

(d) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n!}{n^{n}}$ متقارب است: $\frac{n!}{n^{n}} < \frac{۲}{n^{۲}}$ (برای $n > ۳$)؛

(e) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{(\ln n)^{\ln n}}$ متقارب است: $\frac{۱}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{۱}{n^{\ln\ln n}}<\frac{۱}{n^{۲}}$ (برای n به قدر کافی بزرگ)؛

(f) $\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ متقارب است: $\frac{۱}{(\ln\ln n)^{\ln n}}=\frac{۱}{n^{\ln\ln\ln n}}<\frac{۱}{n^{۲}}$ (همان شرط)؛

(g) $\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ متباعد است: $\frac{۱}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{۱}{e^{(\ln\ln n)^{۲}}}>\frac{۱}{e^{\ln n}}=\frac{۱}{n}$ (همان شرط).

۸) بنابر قضیهٔ ۲:

(a) $\sum_{n=n_۰}^{\infty}\frac{۱}{(a+bn)^{s}}$ $(b>۰)$ به ازای $s>۱$ متقارب، و به‌ازای $s\leqslant ۱$ متباعد است: $\frac{۱}{(a+bn)^{s}}:\frac{۱}{n^{s}}\to\frac{۱}{b^{s}}$؛

(b) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt[n]{n}}$ متباعد است: $۱\to\frac{۱}{\sqrt[n]{n}}:\frac{۱}{n}$.

(c) $\sum_{n=۱}^{\infty}sin\frac{x}{n}$ $(۰<x<\pi)$ متباعد است: $x\to sin\frac{x}{n}:\frac{۱}{n}$؛

به‌همین ترتیب، رشته‌های $\sum_{n=۱}^{\infty}\ln\left(۱+\frac{x}{n}\right)$ $(x>۰)$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-۱)$ $(a\neq ۱)$ هم متباعدند؛

(d) $\sum_{n=۱}^{\infty}\left(۱-cos\frac{x}{n}\right)$ متقارب است: $\left(۱-cos\frac{x}{n}\right):\frac{۱}{n^{۲}}\to\frac{x^{۲}}{۲}$

۹) اینك مثال‌های پیچیده‌تری از این گونه:

(a) $\sum_{n=۱}^{\infty}\left(۱-\frac{\ln n}{n}\right)^{n}$

نسبت جملهٔ عمومی این رشته را بر $\frac{۱}{n}$، با x_n نشان می‌دهیم:

$$\ln x_n = \ln n + n\ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)$$

با استفاده از بسط $\ln(1+x)$، که دربارهٔ آن در ۱۲۵، ۵) صحبت شده است، می‌توان نوشت:

$$\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + \alpha_n\cdot\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

که در آن $\alpha_n \to 0$ وقتی که $n \to \infty$. بنابراین

$$\ln x_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln^2 n}{n} + \alpha_n\cdot\frac{\ln^2 n}{n} \to 0$$

در نتیجه $x_n \to 1$ و رشتهٔ مفروض، متباعد است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right) \quad \text{(b)}$$

در این‌جا هم، با استفاده از همان بسط، داریم:

$$\ln\frac{2n+1}{2n-1} = \ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right) =$$

$$= \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2 + \beta_n\cdot\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3$$

که در آن $\beta_n \to 0$ وقتی که $n \to \infty$، به‌نحوی که

$$n\ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1 = \frac{2n+3}{3(2n-1)}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 + \beta_n\cdot\frac{8n}{2n-1}\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2$$

به‌این ترتیب، نسبت جملهٔ عمومی رشتهٔ مفروض بر $\frac{1}{(2n-1)^2}$ دارای حد $\frac{1}{2}$ و رشته، متقارب است.

۱۰) بالاخره، این رشته را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$$

می‌دانیم [۱۳۳، ۴] که

$$\ln(1+x) < x \qquad [x \neq 0,\ -1 < x < +\infty)$$

که با استفاده از آن، می‌توان نوشت:

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

و در عین حال

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}$$

بنابراین

$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\Big)<\frac{1}{n^2}$$

به‌این‌ترتیب، جمله‌های رشتهٔ مفروض مثبت و، به‌ترتیب، کوچکتر از جمله‌های رشتهٔ متقارب $\sum\frac{1}{n^2}$ [۳۶۵، ۲)] می‌باشند و، در نتیجه، رشتهٔ مفروض، متقارب است.

اگر مجموع این رشته را C بنامیم، درآن‌صورت، مجموع جزئی

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)=H_n-\ln(n+1)\to C$$

(H_n، مثل همیشه، معرف مجموع جزئی رشتهٔ توافقی است). در این‌جا می‌توان، $\ln(n+1)$ را با $\ln n$ عوض کرد. زیرا، اختلاف آن‌ها برابر است با $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$، که به‌سمت صفر میل می‌کند. بالاخره، اگر γ_n، نمایندهٔ یک بی‌نهایت کوچک باشد، برای H_n این رابطهٔ مهم را خواهیم داشت:

$$H_n=\ln n+C+\gamma_n \qquad (۴)$$

این رابطه، نشان می‌دهد که، با ترقی نامتناهی n، مجموع جزئی H_n از رشتهٔ توافقی، همچون $\ln n$ صعود می‌کند.

ثابت C، در رابطهٔ (۴)، به‌ثابت اولر معروف است. مقدار عددی آن (که راه‌های دیگری هم، برای محاسبهٔ آن وجود دارد)، چنین می‌شود:

$$C=0/577\,215\,664\,90\ldots$$

۳۶۸. معیارهای کوشی و دالامبر. مقایسهٔ رشتهٔ مفروض

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \qquad (A)$$

با رشته‌های مشخصی که، تقارب یا تباعد آن‌ها، روشن است، به صورت‌های دیگری هم، می‌تواند انجام شود.

برای مقایسه، به‌عنوان رشتهٔ (B)، از یك طرف، تصاعد هندسی متقارب

$$\sum q^n = q+q^2+\cdots+q^n+\cdots \quad (0<q<1)$$

و از طرف دیگر، تصاعد متباعد زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$\sum 1 = 1+1+1+1+\cdots+1+\cdots$$

اگر رشتهٔ مورد نظر (A) را، بـا این رشته‌ها مقایسه کنیم، از روی طرح قضیهٔ ۱، به‌معیار زیر می‌رسیم:

معیار کوشی. برای رشتهٔ (A)، واریانت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$c_n = \sqrt[n]{a_n}$$

اگر به‌ازای n به‌قدر کافی بزرگ، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$c_n \leqslant q$$

که در آن، q، عدد ثابت کوچکتر از واحد است، درآن‌صورت، رشتهٔ مفروض متقارب است.

و اگر، با شروع از جائی، داشته باشیم:

$$c_n \geqslant 1$$

در آن‌صورت، رشتهٔ مفروض متباعد است.

در واقع، نابرابری‌های $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ و $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$، به‌ترتیب، هم‌ارزند با $a_n \leqslant q^n$ یا $a_n \geqslant 1$؛ و تنها این می‌ماند که قضیهٔ ۱ را به‌کار ببریم*.

فرض کنیم، واریانت c_n، دارای حد (متناهی یا نامتناهی) باشد:

$$\lim c_n = c$$

آن‌وقت، به‌ازای $c<1$ با رشتهٔ متقارب، و به‌ازای $c>1$ بارشتهٔ متباعد، سر و کاردارایم.

اگر $c<1$، آن‌گاه، عدد مثبت ε کمتر از $1-c$ را انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که $c+\varepsilon<1$. با توجه به‌تعریف حد، برای $n>N$ خواهیم داشت:

$$c-\varepsilon<c_n<c+\varepsilon$$

عدد $c+\varepsilon$، نقش عدد q را در رابطهٔ قبلی، به‌عهده دارد: رشتهٔ متقارب است.

---

*) تباعد رشته را، می‌توان به‌طور ساده و بـا استفاده از نبودن شرط لازم تقارب [۳۶۴، ۵°] هم، روشن کرد.

اگر $\varrho > 1$ (و متناهی)، آن‌گاه، با انتخاب $\varepsilon = \varrho - 1 > 0$، یعنی $\varrho - \varepsilon = 1$، این‌بار، برای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ n، خواهیم داشت. $\varrho_n > 1$: رشته متباعد است. به‌ازای $\varrho = +\infty$ هم، به‌همین نتیجه می‌رسیم.

درحالت $\varrho = 1$، با این معیار نمی‌توانیم، دربارهٔ رفتار (رشته، داوری کنیم.

واریانت ϱ_n را، واریانت کوشی می‌نامند.

اگر مقایسهٔ رشتهٔ (A) را، با رشته‌های نمونه‌ای ومورد سنجش فوق، از روی قضیهٔ ۳ انجام دهیم، درآن صورت، به‌معیار زیرمی‌رسیم:

معیار دالامبر: (j. d'Alembert). برای (رشتهٔ (A)، واریانت

$$\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

را در نظر می‌گیریم. اگر، به‌ازای n به‌قدر کافی بزرگ، نابرابری

$$\mathcal{D}_n \leqslant q$$

برقرار باشد، که درآن، q عبارت است از عدد ثابت کوچکتر از واحد، در آن صورت، (رشتهٔ مفروض متقارب است؛ و اگر، با شروع از جایی

$$\mathcal{D}_n \geqslant 1$$

درآن صورت، (رشتهٔ مفروض متباعد است*.

دراین حالت، بهتر است از شکل حدی معیار استفاده شود:

فرض کنیم، واریانت $\mathcal{D}_n$، دارای حد (متناهی یا نامتناهی) باشد:

$$\text{حد } \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$$

آن‌وقت، اگر $\mathcal{D} < 1$، (رشته متقارب و اگر $\mathcal{D} > 1$، (رشته متباعد است.

اثبات را، می‌توان، کاملاً شبیه حالت معیار کوشی آورد.

درحالت $\mathcal{D} = 1$، این معیار، برای مطالعهٔ رفتار (رشته، چیزی به‌دست نمی‌دهد.

واریانت $\mathcal{D}_n$ را، واریانت دالامبر گویند.

درمثال ۷۷، ۴) دیده‌ایم که، از وجود حد برای واریانت $\mathcal{D}_n$، می‌توان وجود حد برای واریانت ϱ_n را نتیجه گرفت؛ ضمناً، این دوحد، با هم برابرند. به‌این‌ترتیب، هرجا

---

*) دراین‌جا هم، می‌توان تباعد را، مستقیماً، از فقدان شرط لازم تقارب، نتیجه گرفت: اگر داشته باشیم، $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ یا $a_{n+1} \geqslant a_n$، درآن صورت، a_n نمی‌تواند به‌سمت صفرمیل کند.

که بتوانیم، با معیار دالامبر، به‌پرسش مربوط به‌رفتار رشته، پاسخ بدهیم، با معیار کوشی هم می‌توانیم به‌این پاسخ برسیم. درمثل‌هایی که خواهدآمد، روشن می‌شود که حکم‌عکس درست نیست و معیار کوشی نیرومندتر از معیار دالامبر است. با وجود این، در عمل، استفادهٔ از معیار دالامبر، معمولاً، ساده‌تر است.

۳۶۹. معیار راآب. (J. L. Raabe). درحالت‌هایی که‌معیارهای‌سادهٔ فوق، ازعهدهٔ پاسخ به‌رفتار رشته برنیایند، باید به‌معیارهای بغرنج‌تری متوسل شدکه، رشتهٔ موردنظررا با رشته‌های نمونه‌ای دیگری مقایسه می‌کنند،که درآن‌جا، این رشته‌های نمونه‌ای، نسبت به‌تصاعد، به‌اصطلاح «تندتر» متقارب یا متباعد می‌شوند*.

دراین‌جا، معیار «راآب» را می‌آوریم که، درآن، رشتهٔ مفروض (A) را، با رشتهٔ توافقی متقارب

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots\ (s>1)\ (H_s)$$

ورشتهٔ متباعد

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \qquad (H)$$

به‌کمك قضیهٔ ۳، مقایسه می‌کنند. برای این منظور، باید واریانت راآب را درنظر گرفت:

$$\mathcal{R}_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

معیار راآب. اگر برای n به‌اندازهٔ کافی بزرگ، این نابرابری برقرار باشد:

$$\mathcal{R}_n\geqslant r$$

که در آن، r، عدد ثابت بزرگتر از واحد است، درآن صورت، رشتهٔ مفروض متقارب، و اگر با شروع از جایی

$$\mathcal{R}_n<1$$

درآن صورت، رشتهٔ مفروض متباعد است.

به‌این ترتیب، فرض می‌کنیم، برای n به‌قدر کافی بزرگ، داشته باشیم:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>r>1 \quad \text{یا} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{r}{n}$$

---

*) با ۳۷۵، ۷) مقایسه کنید.

عدد دلخواه s، بین ۱ و r را انتخاب می‌کنیم: $1<s<r$. چون داریم [۷۷، ۵)]:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1}{\frac{1}{n}}=s$$

بنابراین، برای n به‌قدرکافی بزرگ، خواهیم داشت:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1}{\frac{1}{n}}<r \quad \text{یا} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^s<1+\frac{r}{n}$$

و درنتیجه

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^s$$

این نابرابری را، می‌توان به‌ترتیب زیر، تبدیل کرد:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=\frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}$$

درسمت راست، نسبت دوجملهٔ متوالی از (H_s) وجـود دارد،که بـا به‌کاربردن قضیهٔ ۳، تقارب رشتهٔ (A) ثابت می‌شود.

اگرهم، با شروع ازجایی داشته باشیم:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1$$

مستقیماً، معلوم می‌شودکه

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

که با به‌کاربردن قضیهٔ ۳ دربارهٔ رشته‌های (A) و (H)، تباعد رشتهٔ (A) نتیجه می‌شود.

معیار راآب هم، معمولاً، به‌صورت حدی به‌کار می‌رود:

فرض کنیم، واریانت $\mathcal{R}_n$، دارای حد (متناهی یا نامتناهی) باشد:

$$\text{حد } \mathcal{R}_n = \mathcal{R}$$

آن‌وقت، به‌ازای $\mathcal{R} > 1$، با رشتهٔ متقارب و، به‌ازای $\mathcal{R} < 1$، رشتهٔ متباعد سروکار داریم.

اگرمعیارهای دالامبر و راآب را بـا هم مقایسه‌کنیم، می‌بینیم کـه، دومی به‌مراتب نیرومندتر از اولی است. اگرحد $\mathcal{D}_n$ حد $= \mathcal{D}$ وجـود داشته ومخالف واحد باشد، درآن صورت، بـرای $\mathcal{R}_n = n\left(1 - \frac{1}{\mathcal{D}_n}\right)$، حد $\mathcal{R}$، به‌ازای $\mathcal{D} < 1$، برابر $+\infty$ و، بـه‌ازای $\mathcal{D} > 1$، برابر $-\infty$ می‌شود. دراین صورت، اگر معیار دالامبر، رفتار رشته را مشخص کند، معیار راآب را هم، مسلماً، می‌توان به‌کار برد. علاوه براین، همهٔ این حالت‌ها، تنها به‌دو مقدار $\pm\infty$، ازبین همهٔ مقدارهای ممکن $\mathcal{R}$ مربوط می‌شود. همهٔ سایرمقدارهای $\mathcal{R}$ (به‌جز $\mathcal{R} = 1$) هم، به‌پرسش مربوط به‌تقارب، پاسخ می‌دهند و، این‌ها، نظیر حالت‌هایی هستندکه ازمعیار دالامبر،کاری ساخته نیست، چون درمورد آن‌ها $\mathcal{D} = 1$ است.

باوجوداین، دراین‌جا هم، برای $\mathcal{R} = 1$، برای پرسش مربوط به‌تقارب رشته، پاسخی نداریم. درچنین‌حالت‌هایی (که بسیارنادرند)، باید بازهم معیارهای ظریف‌تروپیچیده‌تری را پیداکرد [مثلاً، شمارهٔ **۳۷۱** را ببینید].

برویم به‌سراغ مثال‌ها:

۳۷۰. مثال‌ها. ۱) معیارکوشی را، درمورد این رشته‌ها به‌کار می‌بریم:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$؛ $\mathcal{C}_n = \frac{1}{\ln n}$، $\mathcal{C} = 0$. رشته متقارب است؛

(b) $(x > 0)$؛ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$، $\mathcal{C}_n = \frac{x}{n}$، $\mathcal{C} = 0$، رشته متقارب است؛

(c) $(x > 0)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$؛ a_n واریانت مثبت دارای حد a)؛ $\mathcal{C}_n = \frac{x}{a_n}$، اگر $a = 0$، آن‌گاه $\mathcal{C} = +\infty$، ورشته متباعد است. اگر $a = +\infty$، آن‌گاه $\mathcal{C} = 0$ ورشته متقارب است. بالاخره، اگر $0 < a < +\infty$، آن‌گاه $\mathcal{C} = \frac{x}{a}$ و رفتار رشته، بستگی بـه مقـدار x دارد: به‌ازای $x < a$، رشته متقارب و به‌ازای $x > a$، رشته متباعداست. درحالت $x = a$، به‌طـورکلی، نمی‌توان چیزی دربارهٔرفتار رشته گفت. این رفتار، بستگی به‌کیفیت نزدیك شدن a_n به a دارد.

۲) معیار دالامبررا، درمورد رشته‌های زیر به‌کار می‌بریم:

(a) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(x>0)$؛ $\mathcal{D}_n=\frac{x}{n+1}$، $\mathcal{D}=0$. رشته متقارب است؛

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ $(x>0)$؛ $\mathcal{D}_n=x.\frac{n+1}{n}$، $\mathcal{D}=x$. رشته به‌ازای $x<1$ متقارب و به‌ازای $x\geqslant 1$ متباعد است (تباعد رشته برای $x=1$، مستقیماً معلوم می‌شود).

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^s}$ $(x>0, s>0)$؛ $\mathcal{D}_n=x\left(\frac{n}{n+1}\right)^s$، $\mathcal{D}=x$. رشته به‌ازای $x<1$ متقارب و به‌ازای $x>1$ متباعد است. به‌ازای $x=1$، رشتهٔ توافقی به‌دست می‌آید که رفتار آن، به‌طوری که می‌دانیم، بستگی به s دارد.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0)$؛ $\mathcal{D}_n=\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$، $\mathcal{D}=\frac{x}{e}$. رشته به‌ازای $x<e$ متقارب و به‌ازای $x>e$ متباعد است. درحالت $x=e$، شکل حدی معیار دالامبر، ما را به‌نتیجه‌ای نمی‌رساند. ولی از آن‌جاکه واریانت $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، درحالی‌که صعودی‌است، به e نزدیك می‌شود، داریم $\mathcal{D}_n>1$ و، به‌این‌ترتیب، شکل اولیهٔ معیار، نشان می‌دهد که رشته، دراین حالت، متباعد است.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$ $(x>0)$؛ $\mathcal{D}_n=x\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، $\mathcal{D}=x.e$. به‌ازای $x<\frac{1}{e}$ رشته‌ای متقارب و به‌ازای $x>\frac{1}{e}$ رشته‌ای متباعد داریم. به ازای $x=\frac{1}{e}$، به کمك معیار دالامبر، نمی‌توان هیچ اطلاعی از رفتار رشته پیداکرد، زیرا $\mathcal{D}_n$ ازطرف پایین به واحد نزدیك می‌شود. درمثال ۵)، (d)، به‌این حالت برمی‌گردیم.

۳) این رشته را درنظر می‌گیریم:

$$1+a+ab+a^2b+a^2b^2+\ \dots\ +b^nb^{n-1}+a^nb^n+\ \dots$$

که در آن، a و b، دوعدد مثبت متفاوت هستند. دراین‌جا، $a=\mathcal{D}_{2n-1}$ و $b=\mathcal{D}_{2n}$، و معیار دالامبر (درشکل اولیهٔ خود)، تنها وقتی تقارب یا تباعد رشته را مشخص می‌کند که هردو عدد a و b از واحدکوچکتر و یا هردوی آن‌ها از واحد بزرگتر باشند.

در عین‌حال داریم:

$$\mathcal{C}_{2n-1}=\sqrt[2n-1]{a^{n-1}b^{n-1}},\ \mathcal{C}_{2n}=\sqrt[2n]{a^nb^{n-1}}$$

به‌طوری‌که $\mathcal{C}=\sqrt{ab}$. به‌این ترتیب، با معیار کوشی معلوم می‌شود که، به‌ازای $ab<1$، رشته‌ای متقارب و، به‌ازای $ab>1$ (و به‌روشنی به‌ازای $ab=1$)، رشته‌ای متباعد داریم.

۴) رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n$ را در نظر می‌گیریم، که در آن، $x>0$ و منظور از $\tau(n)$، تعداد مقسوم علیه‌های عدد طبیعی n است. با توجه به‌نوع عجیب تغییر تابع $\tau(n)$، در این‌جا، نمی‌توانیم از معیار دالامبر استفاده کنیم، درحالی که معیار کوشی، به‌سادگی، قابل استفاده است:

$$x\leqslant \mathcal{C}_n=\sqrt[n]{\tau(n)}\cdot x\leqslant \sqrt[n]{n}\cdot x$$

به‌نحوی که $\mathcal{C}=x$ و، درنتیجه، رشتهٔ مفروض به‌ازای $x<1$ متقارب و به‌ازای $x>1$ (و به‌روشنی به‌ازای $x=1$) متباعد است.

۵) چند مثال، برای کاربرد معیار راآب می‌آوریم.

$$\text{(a)}\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

ازمعیار دالامبر، درمورد این رشته، نمی‌توان استفاده کرد، زیرا

$$\mathcal{D}_n=\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\to 1$$

(و ضمناً $\mathcal{D}_n<1$). واریانت راآب را تشکیل می‌دهیم:

$$\mathcal{R}_n=n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}-1\right)=\frac{(6n-1)n}{(2n-1)^2}$$

وچون $1<\frac{3}{2}=\mathcal{R}_n$ حد $=\mathcal{R}$، بنابراین، رشته متقارب است.

$$\text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\quad (x>0).$$

چون $\mathcal{D}_n=\frac{n+1}{x+n+1}$ و $\mathcal{D}=1$، نمی‌توانیم از معیار دالامبر استفاده کنیم، ولی داریم: $\mathcal{R}_n=\frac{n}{n+1}x$، به‌طوری‌که $\mathcal{R}=x$. به‌این ترتیب رشتهٔ مفروض، به‌ازای $x<1$ متباعد و به‌ازای $x>1$ متقارب است. به‌ازای $x=1$، رشتهٔ توافقی (بدون جملهٔ اول) به‌دست

می‌آید.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(x+a_1)(2x+a_2)\cdots(nx+a_n)}$، که در آن $x>0$ و a_n، واریانت مثبت و دارای حد متناهی a است.

داریم: $\mathcal{D}_n=\frac{(n+1)x}{(n+1)x+a_{n+1}}$ و $\mathcal{D}=1$ و، سپس، $\mathcal{R}_n=\frac{na_{n+1}}{(n+1)x}$ و $\mathcal{R}=\frac{a}{x}$. بنابراین، رشتهٔ مفروض، به ازای $x<a$ متقارب و به ازای $x>a$ متباعد است. برای $x=a$، درحالت کلی، چیزی نمی‌توان گفت. دراین حالت، رفتار رشته، بستگی به‌نوع نزدیك شدن a_n به a دارد.

(d) بالاخره، این رشته را درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

داریم:

$$\mathcal{R}_n=n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right]$$

برای آن‌که، حد این واریانت محاسبه شود، آن را با عبارت کلی‌تری عوض می‌کنیم:

$$\frac{1}{x}\left[\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-1\right] \quad (x\to 0)$$

که درمورد آن، می‌توان از روش محاسبهٔ دیفرانسیلی استفاده کرد. ازروی قاعدهٔ هوپیتال، با گذر به‌نسبت مشتق‌ها:

$$-\frac{e}{[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^2}\cdot\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\ln(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\right\}=$$

$$=\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}}{x^2}$$

با فرض

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\quad \frac{x}{1+x}=x-x^2+o(x^2)$$

بلافاصله معلوم می‌شود که حد مجهول برابراست با $\frac{1}{2}$. رشته متباعد است.

۳۷۱. معیار کومر. (E. E. Kummer). حالا، ازمعیاری کاملاً کلی صحبت می کنیم که به «کومر» تعلق دارد و آن را می‌توان، به‌عنوان طرحی کلی، برای به‌دست آوردن معیارهای مشخص، درنظر گرفت.

معیار کومر. فرض کنیم

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

دنباله‌ای دلخواه، از عددهای مثبت باشد، به‌نحوی که رشتهٔ

$$\sum_1^\infty \frac{1}{c_n}$$

رشته‌ای متباعد شود*. برای رشتهٔ مورد آزمایش (A). واریانت

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

را تشکیل می‌دهیم. اگر (به‌ازای $n>N$)، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{K}_n \geqslant \delta$$

که در آن، δ عدد مثبت ثابتی است، در آن صورت، رشتهٔ مفروض متقارب است، و اگر (برای $n>N$):

$$\mathcal{K}_n \leqslant 0$$

باشد، درآن صورت، رشتهٔ مفروض متباعد است.

اثبات. فرض می کنیم

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \delta > 0$$

(روشن است که این نابرابری را، می توان برای همهٔ nها، برقرار دانست).

---

*) توجه خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم که، از فرض اخیر، تنها برای اثبات تباعد رشته استفاده خواهیم‌کرد. درمورد معیار تقارب، نیازی به‌آن نداریم.

با ضرب دوطرف نابرابری، در a_{n+1}، داریم:

$$c_n.a_n - c_{n+1}a_{n+1} \geqslant \delta a_{n+1} \qquad (۶)$$

یعنی

$$c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1} > ۰ \quad \text{یا} \quad c_n a_n > c_{n+1}a_{n+1}$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود که متغیر $c_n a_n$، به‌طوریکنوا، نزولی است و، درنتیجه، به‌سمت یك حد متناهی میل می‌کند (زیرا، از پایین کران‌دار است).

بنابراین، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1})$$

متقارب است، زیرا مجموع n جملهٔ اول آن:

$$c_1 a_1 - c_{n+1}a_{n+1}$$

دارای حدی متناهی است. دراین صورت، با توجه به‌نابرابری (۶): ازروی قضیهٔ ۱، نتیجه می‌شود که، رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\delta a_{n+1}$ و، همراه با آن، رشتهٔ مفروض (A)، متقارب است.

واگر، برای $n > N$ داشته باشیم:

$$\mathcal{K}_n = c_n.\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant ۰$$

در آن صورت داریم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$$

وچون رشتهٔ $\sum\frac{1}{c_n}$ متباعد فرض شده است، با توجه به‌قضیهٔ ۳، رشتهٔ مفروض (A) هم، متباعد است.

معیار کومر را، درحالت حدی، می‌توان این‌طور بیان کرد:

فرض کنیم، واریانت $\mathcal{K}_n$ دارای حد (متناهی یا نامتناهی) باشد:

$$\text{حد}\ \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$$

آن وقت، رشتهٔ مفروض، به‌ازای $\mathcal{K}>0$ متقارب و به‌ازای $\mathcal{K}<0$ متباعد است.

اکنون نشان می‌دهیم که، به‌کمك معیار کومر، می‌توان برخی معیارهای مهم را، به‌عنوان حالت‌های خاص آن، به‌دست آورد.

a) مثلاً $c_n=1$ می‌گیریم، تا شرط تباعد رشتهٔ $\sum\frac{1}{c_n}$ هم رعایت شده باشد، داریم:

$$\mathcal{K}_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{\mathcal{D}_n}-1$$

اگر واریانت $\mathcal{D}_n$ به‌سمت حد $\mathcal{D}$ میل کند، آن‌گاه $\mathcal{K}_n$ به‌سمت حد $\mathcal{K}=\frac{1}{\mathcal{D}}-1$ میل می‌کند ($\mathcal{K}=+\infty$، اگر $\mathcal{D}=0$ و $\mathcal{D}=+\infty$، اگر $\mathcal{K}=-1$). به‌ازای $\mathcal{D}>1$، روشن است که داریم: $\mathcal{K}<0$ و، با توجه به‌معیار کومر، رشتهٔ مفروض متباعد است، ولی اگر $\mathcal{D}<1$، آن‌گاه $\mathcal{K}>0$ و رشتهٔ مفروض متقارب است. به‌این‌ترتیب، دوباره، به‌معیار دالامبر رسیدیم.

b) سپس، فرض می‌کنیم $c_n=n$ (و روشن است که رشتهٔ $\sum\frac{1}{n}$ متباعداست). عبارت $\mathcal{K}_n$، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\mathcal{K}_n=n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)=\mathcal{R}_n-1$$

اگر واریانت $\mathcal{R}_n$ به‌سمت حد $\mathcal{R}$ میل کند، در آن صورت، $\mathcal{K}_n$ به‌سمت حد $\mathcal{K}=\mathcal{R}-1$ میل خواهد کرد ($\mathcal{K}=\pm\infty$، اگر $\mathcal{R}=\pm\infty$). به‌ازای $\mathcal{R}>1$ داریم $\mathcal{K}>0$ و، با توجه به‌معیار کومر، رشتهٔ مفروض متقارب، ودرحالت $\mathcal{R}<1$ داریم $\mathcal{K}<0$ ورشتهٔ مفروض متباعد است. دوباره، معیار راآب را به‌دست می‌آوریم.

c) بالاخره، فرض می‌کنیم: $c_n=n\ln n$ ($n\geqslant 2$). این انتخاب پذیرفتنی است، زیرا رشتهٔ $\sum\frac{1}{n\ln n}$ متباعد است. [۳۶۷، ۶)]. دراین حالت داریم:

$$\mathcal{K}_n=n\ln n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\ln(n+1)$$

که می‌توان آن را، به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{K}_n = \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathcal{B}_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

به‌شرطی که واریانت تازهٔ زیررا، با $\mathcal{B}_n$ نشان دهیم:

$$\mathcal{B}_n=\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]=\ln n(\mathcal{R}_n-1)$$

ازاین‌جا، معیار جدیدی به‌دست می‌آید:

معیار برتران. (J. Bertrand). فرض کنیم، واریانت $\mathcal{B}_n$، دارای حدی (متناهی یا نامتناهی) باشد:

$$\mathcal{B}=\text{حد}\ \mathcal{B}_n$$

آن‌وقت، رشتهٔ مفروض، به‌ازای $\mathcal{B}>1$ متقارب و به‌ازای $\mathcal{B}<1$ متباعد است.

در واقع، چون داریم $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n}=\ln e=1$ حد، بنابراین، واریانت کومر $\mathcal{K}_n$، به‌سمت حد $\mathcal{K}=\mathcal{B}-1$ میل می‌کند ($\mathcal{K}=\pm\infty$، اگر $\mathcal{B}=\pm\infty$)، می‌ماند که از معیار کومر استفاده شود.

با مقایسهٔ معیارهای راآب و برتران، می‌توان به‌همان نکته‌ای رسید که درمورد مقایسهٔ معیارهای دالامبر و راآب [۳۶۹] آورده بودیم. این زنجیر بیش ازپیش حساس (ولی، درعین‌حال، پیچیده‌تر) معیارها را، می‌توان، تا بی‌نهایت ادامه داد.

۳۷۲. معیار گوس. (C. F. Gouss). از معیارهای دالامبر، راآب و برتران، به‌سادگی می‌توان، معیار زیر را، که منسوب به گوس است، نتیجه گرفت:

معیار گوس. فرض کنیم، برای رشتهٔ مفروض (A)، بتوان نسبت $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ را، به‌صورت حدی زیر نوشت:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$$

که درآن، λ و μ، مقدارهایی ثابت و θ_n، مقداری است کران‌دار: $|\theta_n|\leqslant L$. آن‌وقت، رشتهٔ مفروض متقارب است، اگر $\lambda>1$ یا $\lambda=1$ و $\mu>1$، و متباعد است، اگر $\lambda<1$ یا اگر $\lambda>1$ و $\mu\leqslant 1$.

حالت $\lambda>1$ و $\lambda<1$، منجر به‌معیار دالامبر می‌شود، زیرا $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\lambda}$ حد. حالا

فرض می‌کنیم $\lambda = ۱$، دراین صورت

$$\mathcal{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n},\quad \mathcal{R} = \mu$$

وحالت $\mu > ۱$ یا $\mu < ۱$، بـا معیار راآب، به‌پایان می‌رسد. بالاخره، اگـرداشته باشیم $\mu = ۱$، درآن صورت، داریم:

$$\mathcal{B}_n = \ln n(\mathcal{R}_n - ۱) = \frac{\ln n}{n}\theta_n$$

چـون $\frac{\ln n}{n}$، وقتی‌که $n \to \infty$، به‌سمت صفرمیل می‌کند، و θ_n کران‌دار است، بنابراین، $\mathcal{B}_n = ۰$ حد $= \mathcal{B}$، و، با توجه به‌معیار برتران، رشتهٔ مفروض متباعد است.

مثال‌ها. ۱) رشتهٔموسوم به‌فوق‌هندسی (هیپرژئومتریك) (گوس) رادرنظرمی‌گیریم:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = ۱ +$$

$$+\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+۱)\cdots(\alpha+n-۱)\cdot\beta(\beta+۱)\cdots(\beta+n-۱)}{n!\cdot\gamma(\gamma+۱)\cdots(\gamma+n-۱)}x^n =$$

$$= ۱ + \frac{\alpha\cdot\beta}{۱\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+۱)\cdot\beta(\beta+۱)}{۱\cdot۲\cdot\gamma(\gamma+۱)}x^۲ +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+۱)(\alpha+۲)\cdot\beta(\beta+۱)(\beta+۲)}{۱\cdot۲\cdot۳\cdot\gamma(\gamma+۱)(\gamma+۲)}x^۳ + \cdots$$

فعلاً با فرض: $x > ۰$، α, β, γ، دراین‌جا

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(۱+n)(\gamma+n)}x \to x$$

به‌طوری‌که، بلافاصله وبا توجـه به‌معیار دالامبر، معلوم می‌شود کـه رشتهٔ مفروض، برای $x < ۱$ متقارب وبـرای $x > ۱$، متباعد است. درحالت $x = ۱$، ایـن نسبت را درنظـر می‌گیریم:

$$\frac{a_n}{a_{n+۱}} = \frac{(۱+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)\left(۱+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(۱+\frac{\alpha}{n}\right)\left(۱+\frac{\beta}{n}\right)}$$

و با استفاده از رابطه‌های

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}}\cdot\frac{1}{n^2},\quad \frac{1}{1+\frac{\beta}{n}}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}$$

آن را، به‌صورت زیر درمی‌آوریم:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$$

که در آن، θ_n، کران‌دار است. با استفاده از معیار گوس، معلوم می‌شود که رشتهٔ مفروض، به‌ازای $\gamma-\alpha-\beta>0$ متقارب، و به‌ازای $\gamma-\alpha-\beta<0$ متباعد است. بعداً، با فرض‌های کلی‌تری نسبت به α، β، γ و x، دوباره به‌رشتهٔ فوق هندسی برمی‌گردیم.

۲) مثال دیگری از کاربرد معیار گوس، می‌تواند رشتهٔ زیر باشد:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^p+\dots+\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p+\dots\quad(p>0)$$

که به‌ازای $p>2$ متقارب، و به‌ازای $p\leqslant 2$ متباعد است، در این‌جا، بنا بر رابطهٔ تیلور داریم:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p=\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-p}=$$

$$=1+\frac{p}{2n}+\frac{p(p+1)}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{(2n)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

از آن‌جا

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\frac{p}{2}}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}\ (\theta_n \text{ کران‌دار است})$$

و غیره.

۳۷۳. معیار انتگرالی ماکلورن-کوشی. این معیار، از لحاظ شکل، با همهٔ قبلی‌ها، متفاوت است و براساس اندیشهٔ مقایسهٔ رشته با انتگرال، بنانهاده شده است؛ این معیار را، درواقع می‌توان، تعمیم روشی دانست که، قبلاً، برای روشن‌کردن تقارب یا تباعد رشته، در مثال‌های ۴)، ۵) و ۶) شمارهٔ **۳۶۷**، به‌کار بردیم.

فرض کنیم، رشته مفروض، به‌صورت زیر باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad (۷)$$

که در آن، $f(n)$ عبارت است ازمقدارتابع $f(x)$ به‌ازای $x=n$ (ومعین برای $x \geqslant 1$)*. این تابع را، پیوسته، مثبت و، به‌طور یکنوا، نزولی فرض می‌کنیم.

یکی از تابع‌های اولیهٔ $F(x)$ را، برای $f(x)$، درنظر می‌گیریم؛ چون مشتق آن $F'(x)=f(x)>0$، پس، $F(x)$ و x، باهم‌صعودی‌اند و، وقتی $x \to \infty$، حتماً دارای حدی متناهی یا نامتناهی است. درحالت اول، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F(n+1)-F(n)] \qquad (۸)$$

متقارب، ودرحالت دوم متباعد است. رشتهٔ مفروض (۷) را، با این رشته مقایسه می‌کنیم.

با توجه به‌دستور نموهای محدود، جملهٔ عمومی رشتهٔ (۸)، به‌این صورت‌درمی‌آید:

$$F(n+1)-F(n)=f(n+\theta) \quad (0<\theta<1)$$

به‌طوری‌که، به‌علت یکنوائی تابع $f(x)$

$$a_{n+1}=f(n+1)<F(n+1)-F(n)<f(n)=a_n \qquad (۹)$$

درحالت تقارب رشتهٔ (۸)، با توجه به قضیهٔ ۱، رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$، که جمله‌های آن ازجمله‌های نظیر (۸) کوچکترند، متقارب می‌شود؛ یعنی رشتهٔ مفروض (۸) هم متقارب است. درحالت تباعد رشتهٔ (۸)، رشتهٔ مفروض (۷) هم متباعد می‌شود، زیرا جمله‌های آن، ازجمله‌های نظیر(۸)، بزرگتراست.

به‌این‌ترتیب، به‌این معیار می‌رسیم (که ابتدا، به‌شکل هندسی، به‌وسیلهٔ ماکلورن پیدا شد، ولی به‌دست فراموشی سپرده شد، وبعداً دوباره به‌وسیلهٔ کوشی، کشف شد).

معیار انتگرالی. با شرطهایی که داشتیم، رشتهٔ (۷)، برحسب آن‌که تابع

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

به‌ازای $x \to +\infty$ دارای حد متناهی باشد یا حد متناهی نداشته باشد، متقارب یا

---

*) مقدار اولیهٔ n را، می‌توان به‌جای ۱، عدد دلخواه n_0 گرفت که، در آن صورت، باید تابع $f(x)$ را، برای مقدارهای $x \geqslant n_0$ درنظر گرفت.

متباعد است.

چند مثال ازکاربرد این معیاررا (به‌جزآن‌چه در ۳۶۷ دیدیم)، می‌آوریم.

۱) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{x\cdot\ln^{۱+\sigma}x}$ $(\sigma>۰)$.

دراین‌جا: $f(x)=\frac{۱}{x\cdot\ln^{۱+\sigma}x}$، $F(x)=-\frac{۱}{\sigma\ln^{\sigma}x}\to ۰$ به‌ازای $x\to+\infty$:
رشته متقارب است.

۲) $\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

داریم: $f(x)=\frac{۱}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$؛ $F(x)=\ln\ln\ln x\to+\infty$: رشته متباعد است.

۳) $\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{n\cdot\ln n(\ln\ln n)^{۱+\sigma}}$ $(\sigma>۰)$.

دراین حالت

$$f(x)=\frac{۱}{x\cdot\ln x(\ln\ln x)^{۱+\sigma}};\quad F(x)=\frac{۱}{\sigma(\ln\ln x)^{\sigma}}\to ۰$$

و رشتهٔ مفروض متقارب است. وغیره.

تابع اولیهٔ $F(x)$ را، به‌صورت انتگرال معین هم می‌توان نوشت:

$$F(x)=\int_{۱}^{x}f(t)\,dt$$

وحدآن را، وقتی $x\to+\infty$، «انتگرال از ۱ تا $+\infty$» می‌نامند* و این‌طورمی‌نویسند:

$$F(+\infty)=\int_{۱}^{+\infty}f(t)\,dt$$

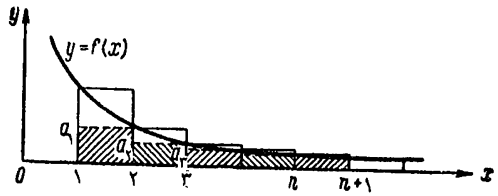
به این ترتیب، رشتهٔ مفروض، برحسب این‌که ایـن انتگرال، مقداری متناهی داشته

---

*) این، به اصطلاح انتگرال ناسره است، که ما درفصل سیزدهم به‌آن خواهیم پرداخت.

باشد یا نداشته باشد، متقارب یا متباعد است.*

وقتی که معیار انتگرالی را، به‌این صورت بنویسیم، می‌توانیم تعبیر هندسی آن را، که به‌اندیشهٔ ماکلورن نزدیك است، بدهیم. اگر منحنی تابع $f(x)$ را رسم کنیم، (شکل ۵۴)، در آن صورت، انتگرال $F(x)$، به‌معنای مساحت شکل محدود به‌این منحنی، محور x و دو مقدار عرض خواهد بود. انتگرال $F(+\infty)$ هم، به‌مفهومی، همچون مقدار مساحت تمامی شکل زیر منحنی نامتناهی ممتد به‌طرف راست است. از طرف دیگر، جمله‌های a_1، a_2، ...، a_n، ... رشتهٔ (۷)، معرف مقدار عرض‌ها، در نقطه‌های ... ، n ، ... ، ۳ ، ۲ ، ۱ $= x$ و یا، مساحت مستطیل‌های به‌قاعدهٔ ۱ و ارتفاع‌های برابر این عرض‌ها می‌باشد.



شکل ۵۴

بنابراین، مجموع رشتهٔ (۷)، چیزی جز مجموع مساحت‌های مستطیل‌های بیرونی نیست و، تنها درجملهٔ اول، با مجموع مساحت‌های مستطیل‌های درونی فرق دارد و، این، نتیجه‌ای را که در بالا به‌دست آوردیم، روشن می‌کند: اگر مساحت شکل منحنی‌الخط، متناهی باشد، در آن صورت، به‌طور بدیهی، مساحت شکل پله‌ای درونی هم متناهی است و رشتهٔ مفروض متقارب است. واگر مساحت شکل منحنی‌الخط نامتناهی باشد، در آن صورت، مساحت شکل پله‌ای بیرونی هم نامتناهی می‌شود، به‌طوری که در این حالت، رشتهٔ مفروض متباعد است.

حالا، چند نکته را، دربارهٔ استفادهٔ بعدی از رابطهٔ (۹)، یادآوری می‌کنیم:

a) درحالت وجود حدمتناهی

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty)$$

می‌توان، برآورد باقی‌مانده را برای رشتهٔ مفروض، به‌سادگی، نشان داد. با جمع نابرابری‌های

$$a_k < F(k) - F(k-1) < a_{k-1}$$

---

*) وقتی که معیار را، به‌این ترتیب، تنظیم کرده باشیم، می‌توان اثبات را، بدون فرض پیوستگی تابع $f(x)$ و تنها با استفاده از انتگرال معین (که برای تابع یکنوا وجود دارد. **۲۹۸**، III) ارائه داد.

به‌ازای $k=n+1, \dots, n+m$، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k < F(n+m)-F(n) < \sum_{k=n}^{n+m-1} a_k$$

با ترقی m تا بی‌نهایت، به‌سمت حد عبور می‌کنیم:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant F(+\infty)-F(n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

یا

$$F(+\infty)-F(n+1) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant F(+\infty)-F(n) \qquad (10)$$

و رابطهٔ (۱۰)، برآورد مطلوب را، هم ازطرف بالا و هم از طرف پایین، نشان‌می‌دهد*.

مثلاً*، برای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ $(\sigma>0)$ داریم:

$$f(x)=\frac{1}{x^{1+\sigma}}, \quad F(x)=\frac{1}{\sigma x^{\sigma}}, \quad F(+\infty)=0$$

و

$$\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\sigma}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \cdot \frac{1}{k^{1+\sigma}} \leqslant \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n^{\sigma}} \qquad (11)$$

---

*) چون

$$F(n+m)-F(n)=\int_{n}^{n+m} f(t)dt$$

بنابراین با عبور به‌حد، وقتی $m \to +\infty$، انتگرال ناسرهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$F(+\infty)-f(n)=\int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

به‌این جهت، نابرابری‌های (۱۰) را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{\infty} f(t)dt \qquad (10a)$$

b) اگر $F(x)$، همراه با x، تا بی‌نهایت ترقی کند، این تابع امکان می‌دهد تا دربارهٔ سرعت رشد مجموع‌های جزئی رشتهٔ مفروض، داوری کنیم. نابرابری‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$0<f(k)-[F(k+1)-F(k)]<f(k)-f(k+1)$$

که باجمع کردن آن‌ها، از $k=1$ تا $k=n$، واریانت صعودی ولی کران‌دار زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-[F(n+1)-F(1)]<f(1)-f(n+1)<f(1)$$

که به سمت یك حد متناهی، میل می‌کند. همین مطلب، در مورد واریانت زیر هم، درست است:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-F(n+1)$$

اگر حد آن‌را C و α_n را، یك بی‌نهایت کوچکی بگیریم، که معرف تفاوت آن، با حدش باشد، در آن‌صورت، به‌این رابطه می‌رسیم:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=F(n+1)+C+\alpha_n$$

مثلاً، برای $f(x)=\frac{1}{x}$ داریم: $F(x)=\ln x$ و، از این‌جا، دوباره، رابطهٔ (۴) شمارهٔ **۳۶۷** به‌دست می‌آید.

۳۷۴. معیار یرماکوف. و. پ. یرماکوف، معیار خاصی آورده است که، تقریباً همان حوزهٔ کاربرد معیار انتگرالی را در بر می‌گیرد، ولی طوری تنظیم شده است که شامل مفهوم محاسبهٔ انتگرالی نمی‌شود.

معیار یرماکوف. مانند پیش، فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$ پیوسته*، مثبت و، برای $x>1$**، به‌طور یکنوا نزولی باشد. آن وقت، اگر برای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ x (مثلاً برای $x\geqslant x_0$) نابرابری زیر برقرار باشد:

$$\frac{f(e^x).e^x}{f(x)}\leqslant q<1$$

---

*) در عمل، شرط پیوستگی را می‌توان حذف کرد. آخرین پاورقی شمارهٔ قبل را ببینید.

) نخستین پاورقی شمارهٔ **۳۷۳ را ببینید.

رشتهٔ (۷) متقارب، و اگر هم (برای $x \geqslant x_0$) داشته باشیم:

$$\frac{f(e^x).e^x}{f(x)} \geqslant 1$$

در آن‌صورت، رشتهٔ (۷) متباعد است.

اثبات. فرض کنیم، نابرابری اول برقرار باشد. به‌ازای $x \geqslant x_0$ دلخواه، خواهیم داشت (با تبدیل $t = e^u$):

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(e^u).e^u du \leqslant q \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

از آن‌جا

$$(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \leqslant q\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt\right] \leqslant$$

$$\leqslant q\left[\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt - \int_{x}^{e^x} f(t)dt\right] \leqslant q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt$$

و چون

$$e^x > x \qquad (۱۲)$$

بنابراین، تفاضل داخل کروشهٔ اخیر، مثبت است، در این حالت

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \leqslant \frac{q}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt$$

با اضافه‌کردن انتگرال $\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt$، به‌دو طرف تساوی، به‌دست می‌آید:

$$\int_{x_0}^{e^x} f(t)dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt = L$$

و به‌خصوص، با درنظرگرفتن (۱۲):

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt \leqslant L \quad (x \leqslant x_0)$$

چون با ترقی x، انتگرال هم ترقی می‌کند، بنابراین، بـرای $x \to \infty$، برای آن حد متناهی وجود دارد:

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$$

و، با توجه به‌معیار انتگرالی، رشتهٔ (۷) متقارب می‌شود.

حالا فرض می‌کنیم نابرابری دوم برقرار باشد. آن‌وقت

$$\int_{[e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \geqslant \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

و، اگر به‌دو طرف نابرابری، انتگرال $\int_{x}^{e^{x_0}} f(t)dt$ را بیفزاییم:

$$\int_{x}^{e^x} f(t)dt \geqslant \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt = \gamma > 0$$

(زیرا، با توجه به (۱۲): $x_0 < e^{x_0}$). حالا، دنبالهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, \cdots.$$

با فرض $x_n = e^{x_{n-1}}$، بنابر آن‌چه ثابت شد، داریم:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt \geqslant \gamma$$

به‌طوری‌که

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \geqslant n\gamma$$

از این‌جا، روشن است که

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt = \lim_{x \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = +\infty$$

و، با توجه به‌معیار انتگرالی، رشتهٔ (۷) متباعد است.

مثال‌های شمارهٔ قبل را، می‌توان بـه سادگی، بـا کمك این معیار هم، مورد مطالعه

قرار داد.

۱) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n\cdot \ln^{۱+\sigma} n}$ $(\sigma>۰)$.

در این حالت: $f(x)=\frac{۱}{x\cdot \ln^{۱+\sigma} x}$ و داریم:

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)}=\frac{\ln^{۱+\sigma} x}{x^{\sigma}}\to ۰ \quad (x\to\infty \text{ وقتی})$$

به‌طوری که، برای x به‌قدر کافی بزرگ، مقدار آن کمتر از کسر کوچکتر از واحد q می‌شود: رشتهٔ متقارب است.

۲) $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n\cdot \ln n\cdot \ln\ln n}$.

در این‌جا: $f(x)=\frac{۱}{x\cdot \ln x\cdot \ln\ln x}$ و داریم:

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)}=\ln\ln x\to\infty \quad (x\to\infty \text{ وقتی})$$

و برای x به‌قدر کافی بزرگ، از واحد تجاوز می‌کند: رشته متباعد است.

۳) $\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n\cdot \ln n\cdot (\ln\ln n)^{۱+\sigma}}$ $(\sigma>۰)$.

این‌بار داریم: $f(x)=\frac{۱}{x\cdot \ln x\cdot (\ln\ln x)^{۱+\sigma}}$ وقتی $x\to\infty$:

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)}=\frac{(\ln\ln x)^{۱+\sigma}}{\ln^{\sigma} x}\to ۰$$

رشته، متقارب است.

در پایان، یادآوری می‌کنیم که، تابع e^x را، که در معیار یرماکوف مورداستفاده قرار گرفت، می‌توان باهر تابع دلخواه $\varphi(x)$ عوض کرد، به‌شرطی که، $\varphi(x)$، تابعی صعودی، یکنوا، مثبت، دارای مشتق پیوسته و صادق در نابرابری

$$\varphi(x)>x \qquad (۱۲^*)$$

باشد (نابرابری (۱۲^*)، جانشین نابرابری (۱۲) می‌شود). اثبات، عین روش بالاست.

به‌این‌ترتیب، با انتخاب‌های مختلف تابع $\varphi(x)$، می‌توان، معیار یرماکوف را، سرچشمه‌ای برای به‌دست آوردن گونه‌های مختلف معیارها دانست.

۳۷۵. ضمیمه و تکمیل. ۱) از برآوردهای (۱۱) استفاده می‌کنیم، تا رفتار تابع ریمان [(۲، ۳۶۵)]

$$\zeta(1+\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}$$

را (که فقط به‌ازای $\sigma>0$ معین است)، به‌ازای نزدیک شدن σ به‌صفر، شرح دهیم.

قبل از هر چیز، اگر در نابرابری‌های اول از نابرابری‌های (۱۱) $n=0$ و در نابرابری دوم آن $n=1$ بگیریم، به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$1\leqslant\sigma\cdot\zeta(1+\sigma)\leqslant 1+\sigma$$

از آن‌جا

$$\lim_{\sigma\to 0}\sigma\cdot\zeta(1+\sigma)=1$$

اگر از برابری روشن زیر آغاز کنیم، می‌توانیم به‌نتیجهٔ دقیق‌تری برسیم:

$$\zeta(1+\sigma)=1+\frac{1}{2^{1+\sigma}}+\cdots+\frac{1}{n^{1+\sigma}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\sigma}}$$

با استفاده از نابرابری (۱۱)، به‌ازای n غیرمشخص:

$$1+\frac{1}{2^{1+\sigma}}+\cdots+\frac{1}{n^{1+\sigma}}+\frac{1}{\sigma}\left[\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}-1\right]<\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}<$$

$$<1+\frac{1}{2^{1+\sigma}}+\cdots+\frac{1}{n^{1+\sigma}}+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{n^{\sigma}}-1\right)$$

که با عبور به‌حد، وقتی $\sigma\to 0$، نتیجه می‌شود:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)=\lim_{\sigma\to 0}\left[\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}\right]\leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\sigma \to 0}}\left[\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}\right]\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n^{*}$$

بالاخره، با توجه به غیرمشخص بودن n، در این جا، n را به‌سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم. از آن‌جا کـه، عبارت‌های اولی و آخری، بنابر (۴) شمارهٔ ۳۶۷، به‌سمت ثابت اولر C میل می‌کنند، بنابراین، حدهای بزرگتر و کوچکتر بر هم منطبق می‌شوند، به‌نحوی که حد عادی وجود دارد و برابر است با:

$$\lim_{\sigma \to 0}\left[\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}\right]=C$$

[این نتیجه‌گیری‌ها، متعلق به دیریکله است].

۲) فرض کنیم، جمله‌های رشتهٔ (A)، به‌طور یکنوا، نزولی باشند، آن‌وقت، رشتهٔ (A)، هم‌زمان با رشتهٔ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k . a_{2^k}$، متقارب یا متباعد است (کوشی).

در واقع، از یك طرف داریم:

$$A_{2^k} < a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})<$$
$$<a_1+2a_2+\cdots+2^k a_{2^k}$$

و از طرف دیگر

$$A_{2^k} = a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k})>$$

$$>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^k a_{2^k})$$

و از این‌جا، نتیجهٔ مطلوب، حاصل می‌شود.

مثلاً، رفتار رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$، بارفتار رشتهٔ $\sum_{0}^{\infty} 1 \equiv \sum_{0}^{\infty} 2^k.\frac{1}{2^k}$ (که آشکارا متباعد

---

*) هنوز نمی‌دانیم، آیا حد عبارت $\frac{1}{\sigma}-\zeta(1+\sigma)$، به‌ازای $\sigma \to 0$، وجود دارد و، بنابراین، از بزرگترین و کوچکترین حدها استفاده می‌کنیم [۴۲]. حد عبارت‌های $\left(1-\frac{1}{n^{\sigma}}\right)\frac{1}{\sigma}$ و $\left(\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}-1\right)\frac{1}{\sigma}$ را بنابر دستور ۷۷، ۵)، (b) پیدا می‌کنیم.

است)، منطبق می‌شود. رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}$ $(\sigma>0)$، همراه با رشتهٔ

$$\sum_{0}^{\infty} 2^k.\frac{1}{2^{k(1+\sigma)}}\equiv\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^{k\sigma}}$$

متقارب است رشتهٔ $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n.\ln n}$ متباعد است، زیرا رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k.\ln 2}\equiv\sum_{1}^{\infty}2^k.\frac{1}{2^k.\ln 2^k}$ متباعد است وغیره.

در این قضیه، می‌توان، به‌جای رشتهٔ مقایسه‌ای $\sum 2^k a_{2^k}$، از رشتهٔ کلی‌تر $\sum_{k=0}^{\infty} m^k.a_{m^k}$ استفاده کرد، که در آن، m عدد طبیعی دلخواهی است.

۳) فرض کنیم، (A) رشته‌ای متقارب و غیرمشخص باشد. دربارهٔ مرتبهٔ کوچکی جملهٔ عمومی a_n، در مقایسه با $\frac{1}{n}$، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

قبل از هر چیز، روشن است که، اگر این بی‌نهایت کوچک‌ها، با هم مقایسه شوند [۶۰]، یعنی، اگر حد زیر وجود داشته باشد:

$$\text{حد}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\text{حد}\, n.a_n=c$$

در آن‌صورت، الزاماً داریم: $c=0$، به‌نحوی که

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (۱۳)$$

در واقع، در غیر این صورت ــ با توجه به‌تباعد رشتهٔ توافقی $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ــ رشتهٔ مفروض هم متباعد می‌شود [۳۶۶، قضیهٔ ۲].

با این همه، وجود چنین حدی، در حالت کلی، حتمی نیست؛ مثلاً این رشته را در نظر می‌گیریم:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10^2}+\cdots$$

تقارب این‌رشته، درمقایسه با رشته $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، واضح است. درعین‌حال، اگر n مجذورکامل

نباشد، در مورد آن داریم: $na_n = \frac{1}{n}$ و اگر n مجذور کامل باشد، داریم: $na_n = 1$.

با وجود این، اگر جمله‌های رشته، به‌طور یکنوا نزولی باشند، شرط (۱۳)، برای تقارب آن، لازم است. در واقع، برای m و $n > m$ دلخواه، داریم:

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + \cdots + a_n < \alpha_m$$

که در آن، α_m عبارت است از باقی‌ماندهٔ رشته. از این‌جا

$$na_n < \frac{n}{n-m} \cdot \alpha_m$$

فرض کنیم، ابتدا، m چنان انتخاب شود که α_m کمتر از عدد دلخواه و مفروض $\varepsilon > 0$ باشد. حالا، اگر فرض کنیم، n آن‌قدر بزرگ باشد که داشته باشیم:

$$\frac{n}{n-m} < \frac{\varepsilon}{\alpha_m}$$

درعین‌حال خواهیم داشت: $na_n < \varepsilon$، چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

در خاتمه، یادآوری می‌کنیم که، حتی در رشته‌های با جمله‌های نزولی یکنوا، شرط (۱۳) به‌هیچ‌وجه کافی برای تقارب نیست. این مطلب، مثلاً، درمورد رشتهٔ $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ روشن است.

۴) اگر رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty} d_n$ متباعد، و D_n معرف مجموع جزئی nام آن باشد، در آن‌صورت، رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ نیز متباعد، و لی رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ $(\sigma > 0)$ متقارب می‌شود [آبل (N.H. Abel) و دینی (U. Dini)].

داریم:

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \cdots + \frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{d_{n+1} + \cdots + d_{n+m}}{D_{n+m}} = 1 - \frac{D_n}{D_{n+m}}$$

n هر قدر بزرگ باشد، همیشه می‌توان m را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$\frac{D_n}{D_{n+m}} < \frac{1}{2}$$

و در نتیجه:

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}}+\cdots+\frac{d_{n+m}}{D_{n+m}}>\frac{1}{2}$$

و برای رشتهٔ $\sum_1^\infty \frac{d_n}{D_n}$، شرط اصلی تقارب نقض می‌شود [۳۶۴، ۵°] و رشتهٔ متباعد است.

برای اثبات تقارب رشتهٔ $\sum_1^\infty \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$، از روش کوشی استفاده می‌کنیم [۳۷۳].

درمورد تابع $\int \frac{dx}{x^{1+\sigma}}=-\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{x^\sigma}$، دستور نموهای محدود را، در بازهٔ از $x=D_{n-1}$ تا $x=D_n$، به‌کار می‌بریم:

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{D_{n-1}^\sigma}-\frac{1}{D_n^\sigma}\right)=\frac{d_n}{\bar{D}_n^{1+\sigma}} \quad (D_{n-1}<\bar{D}_n<D_n)$$

به‌این ترتیب، جمله‌های رشتهٔ مفروض، ازجمله‌های نظیر رشتهٔ متقارب $\sum_1^\infty \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{D_{n-1}^\sigma}-\frac{1}{D_n^\sigma}\right)$ کوچکترند که، درنتیجه، حکم را ثابت می‌کند.

۵) اگر رشتهٔ $\sum_1^\infty c_n$ متقارب و γ_n معرف باقی‌ماندهٔ آن، بعد از جملهٔ nام باشد، در آن صورت، رشتهٔ $\sum_1^\infty \frac{c_n}{\gamma_{n-1}}$ متباعد و، درهمان حال، رشتهٔ

$$\sum_1^\infty \frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}} \quad (0<\sigma<1)$$

متقارب است (دینی). اثبات، مشابه قبلی است.

۶) معیار تقارب زیر، چندی پیش، به‌وسیلهٔ ن.آ. ساپوگوف ثابت شد:

اگر u_n، واریانتی مثبت، صعودی و یکنوا باشد، درآن صورت، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^\infty \left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\left[\text{یا شبیه آن}: \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right)\right]$$

با شرط کران‌دار بودن واریانت، متقارب و، در حالت عکس، متباعد است.

فرض می‌کنیم (به‌ازای $n=1, 2, 3, \ldots$)

$$d_n=u_{n+1}-u_n,\ D_n=\sum_{k=1}^n d_k=u_{n+1}-u_1$$

آن‌وقت، رشتهٔ مفروض، این‌طور نوشته می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n + u_1}$$

و رفتار آن، با رفتار رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$$

یعنی با رفتار رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ مطابقت می‌کند (درحالت تباعد آن، می‌توان به‌نتیجه‌گیری آبل-دینی، ۴) استناد کرد). رشتهٔ اخیرهم، بسته به‌این‌که واریانت u_n کران‌دار باشد یا نباشد، متقارب یا متباعد می‌شود.

۷) دورشتهٔ متقارب زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n$$

گویند رشتهٔ دوم، نسبت به‌رشتهٔ اول، کندتر به‌سمت تقارب می‌رود، به‌شرطی که باقی‌ماندهٔ γ'_n دومی، بی‌نهایت کوچکی از مرتبه‌ای پایین‌تر از باقی‌مانده γ_n اولی باشد:

$$\text{حد} \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} = 0$$

برای هررشتهٔ متقارب $\sum_1^{\infty} c_n$، می‌توان رشتهٔ متقارب کندتری را ساخت. کافی است، مثلا رشتهٔ زیررا درنظر بگیریم:

$$\sum_{n=1} c'_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}\right)^*$$

به‌نحوی که دراین‌حالت: $\gamma'_n = \sqrt{\gamma_n}$.

حالا، دورشتهٔ متباعد درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d'_n$$

گویند، رشتهٔ دوم، نسبت به‌رشتهٔ اول، کندتر به‌سمت تباعد می‌رود، به‌شرطی که مجموع

---

*) γ_0 را برای تمامی مجموع $\sum_1^{\infty} c_n$ می‌گیریم.

جزئی D'_n آن، بی‌نهایت بزرگی از مرتبهٔ پایین‌تر ازمجموع جزئی D_n اولی باشد:

$$\text{حد}\frac{D'_n}{D_n}=0$$

برای هررشتهٔ متباعد $\sum_1^\infty d_n$، می‌توان یک رشتهٔ متباعد کندتر ساخت. برای این منظور می‌توان مثلا، رشتهٔ زیررا اختیارکرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d'_n=\sqrt{D_1}+\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{D_n}-\sqrt{D_{n-1}})$$

در اینجا $D'_n=\sqrt{D_n}$.

به‌کمك رشته‌های آبل ودینی، که در ۴ و ۵) بررسی کردیم، می‌توان نتیجه‌های مشابهی به‌دست آورد. ازاین مثال‌ها، می‌توان به‌حکم مهم واساسی زیررسید: هیچ رشتهٔ متقاربی (متباعدی) وجود ندارد که بتواند، به‌طور عام ومطلق، برای تعیین تقارب(تباعد) سایر رشته‌ها*، مورد مقایسه قرارگیرد.

این مطلب، ازاین‌جا روشن می‌شود که

$$\frac{c_n}{c'_n}=\frac{\gamma_{n-1}-\gamma_n}{\sqrt{\gamma_{n-1}}-\sqrt{\gamma_n}}=\sqrt{\gamma_{n-1}}+\sqrt{\gamma_n}\to 0$$

و

$$\frac{d_n}{d'_n}=\frac{D_n-D_{n-1}}{\sqrt{D_n}-\sqrt{D_{n-1}}}=\sqrt{D_n}+\sqrt{D_{n-1}}\to+\infty$$

۸) دو دنبالهٔ عددی مثبت زیررا درنظرمی‌گیریم:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \quad \text{و} \quad b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

n هرچه باشد، برای nجملهٔ اول این دنباله‌ها، نابرابری کوشی-هولدر

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}$$

و نابرابری مینکووسکی

---

*) به‌کمك هرقضیهٔ دلخواهی از شمارهٔ ۳۶۶.

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}$$

برقرار است [۱۳۳، ۵)، ۷)]. دراین‌جا، k عدددلخواه بزرگتراز واحد و k' عدددیگری، بازهم بزرگتر ازواحد است، که با k در رابطهٔ زیرصدق می‌کند:

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$$

ازاین نابرابری‌ها، باعبوربه‌حد، بدازای $n \to \infty$، می‌توان، نابرابری‌های‌مشابهی، برای رشته‌های نامتناهی، بدست‌آورد:

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}$$

و

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+b_i)^k\right\}^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}$$

ضمناً، ازتقارب رشته‌های سمت‌راست، تقارب رشته‌های سمت چپ، نتیجه می‌شود.

§۳. تقارب رشته‌های غیرمشخص

۳۷۶. شرط عمومی تقارب رشته. بمسالهٔ مربوط به تقارب رشته‌هایی برمی‌گردیم، که جمله‌های آن‌ها، بتوانند علامت‌های دلخـواه داشته باشند. چون، بنابه‌تعریف، تقارب رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \qquad (A)$$

منجر بتقارب دنبالهٔ

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, A_{n+m}, \ldots \qquad (1)$$

می‌شود، که از مجموع‌های جزئی رشتهٔ (A) تشکیل شده است، طبیعی است کـه از اصل تقارب [۳۹] درمورد این دنباله، استفاده کنیم. از دو شمارهٔ n و n'، که نام خواهیم برد، بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای بزند، می‌توان فرض کرد $n' > n$ و $n'=n+m$

گرفت که، در آن، m عدد طبیعی دلخواهی است. اگر به‌یاد بیاوریم که

$$A_{n+m}-A_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}$$

در آن صورت، اصل تقارب مربوط به‌رشته را، می‌توان این‌طور بیان کرد:

برای این که رشتهٔ (A) متقارب باشد، لازم و کافی است که به‌هرعدد $\varepsilon>0$، چنان شمارهٔ N نظیر باشد که، به‌ازای $n>N$، نابرابری

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}|<\varepsilon \qquad (۲)$$

برقرار باشد (برای هرمقدار $m=1, 2, 3, \ldots$)*.

به زبان دیگر: مجموع تعداد دلخواه جمله‌های رشته، بعد از یك جملهٔ به‌قدر کافی دور، باید به‌اندازهٔ دلخواه، کوچك باشد.

اگررشته، متقارب باشد و در نابرابری (۲)، $m=1$ اختیار شود، به‌دست می‌آید:

$$|a_{n+1}|<\varepsilon \quad (n>N \text{ برای})$$

به‌طوری که $a_{n+1}\to 0$ و یا (هم‌ارز آن) $a_n\to 0$ و، دوباره، به‌شرط لازم تقارب رشته می‌رسیم [۳۶۴، ۵°]. محدودیت این شرط لازم، به‌مراتب کمتر از اصل تقارب است: در اصل تقارب، نه‌تنها جمله‌های دور به‌طور جداگانه، بلکه مجموع جمله‌های دورهم (به‌هر تعدادی که انتخاب کنیم)، باید کوچك باشد. مطالعهٔ رشتهٔ توافقی [۳۶۵، ۱)] و نامساوی (۱) درمورد جمله‌های آن، می‌تواند دراین مورد، آموزنده باشد. اگرچه، دراین‌جا، جملهٔ عمومی به‌سمت صفرمیل می‌کند، ولی، نابرابری (۲)، به‌ازای $\varepsilon=\frac{1}{2}$ و $n=m$، حتی برای یك n هم، برقرار نیست ورشتهٔ توافقی متباعد است.

با وجود این، باید گفت که آزمایش شرط کلی تقارب رشته، در حالت‌های مشخص، کار ساده‌ای نیست. به‌همین جهت، باید به‌مطالعهٔ حالت‌هایی بپردازیم، که مسألهٔ تقارب رشته‌ها را، با روش ساده‌تری، به‌نتیجه برسانند.

۳۷۷. تقارب مطلق. در بند قبل دیدیم که، تقارب رشته‌های مثبت را، با دردست‌داشتن معیارهای ساده‌ای، غالباً می‌توان به‌محك آزمایش زد. بنابراین، طبیعی است که، کوشش کنیم، مسألهٔ تقارب رشتهٔ مفروض را، به‌تقارب رشتهٔ مثبت، منجر کنیم.

اگر دررشته‌ای، همهٔ جمله‌ها مثبت نباشند، ولی با شروع ازجائی، همهٔ جمله‌هامثبت

*) هردو مؤلف اصل تقارب ــ بولزانو وکوشی ــ آن را، به‌عنوان شرط تقارب رشتهٔ نامتناهی، تنظیم کرده‌اند.

باشند، در آن صورت، با کنار گذاشتن تعداد کافی از جمله‌های نخستین رشته [۳۶۴، ۱°]، کار را، منجر به بررسی جمله‌های مثبت می‌کنیم. اگر همهٔ جمله‌های رشته منفی باشند یا، دست کم، از جایی به بعد، منفی شود، در آن صورت، با عوض کردن علامت تمامی جمله‌ها، به حالت قبل می‌رسیم [۳۶۴، ۳°]. به این ترتیب، حالت‌های جدید، اساساً آن‌هایی خواهد بود که بین جمله‌های رشته، به تعداد نامتناهی، هم از جمله‌های مثبت و هم از جمله‌های منفی، وجود داشته باشد. در این مورد، غالباً، قضیهٔ کلی زیر، مفید واقع می‌شود:

قضیه. فرض کنیم، رشتهٔ (A)، با جمله‌هایی به علامت‌های دلخواه، داده شده باشد. اگر رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (A^*)$$

که از قدرمطلق جمله‌های آن تشکیل شده‌است، متقارب باشد، در آن صورت، رشتهٔ مفروض هم متقارب است.

اثبات. فوراً و از اصل تقارب نتیجه می‌شود. نابرابری

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}|$$

نشان می‌دهد که، اگر شرط تقارب، برای رشتهٔ (A^*) برقرار باشد، به‌طور مسلم، برای رشتهٔ (A) هم برقرار خواهد بود.

به‌طریق دیگری هم، می‌توان بحث کرد. جمله‌های مثبت رشتهٔ (A) را، به ترتیب، شماره‌گذاری می‌کنیم و، از آن‌ها، رشتهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 + p_2 + \cdots + P_k + \cdots \qquad (P)$$

به‌همین ترتیب، در مورد جمله‌های منفی عمل می‌کنیم و رشتهٔ زیر را، از قدرمطلق این جمله‌ها، تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m = q_1 + q_2 + \cdots + q_m + \cdots \qquad (Q)$$

هرچند جمله که از رشتهٔ (P) یا از رشتهٔ Q انتخاب کنیم، همهٔ آن‌ها، در بین جمله‌های رشتهٔ (A^*) قرار دارند و، در نتیجه، برای همهٔ مجموع‌های جزئی P_n و Q_n داریم:

$$P_n \leqslant A^* \text{ و } Q_n \leqslant A^*$$

یعنی، هردو رشتهٔ (P) و (Q)، متقاربند [۳۶۵]. مجموع‌های آن‌ها را، به ترتیب، P و Q

می‌نامیم.

اگر n جمله از رشتهٔ (A) انتخاب شود، در آن صورت، در ترکیب آن‌ها، k جملهٔ مثبت و m جملهٔ منفی خواهیم داشت، به‌نحوی که

$$A_n = P_k - Q_m$$

دراین‌جا، شماره‌های k و m، وابسته به n هستند. اگر در رشتهٔ (A)، هم‌جمله‌های مثبت وهم جمله‌های منفی، مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل دهند، در آن صورت، به‌ازای $n \to \infty$، به‌طور هم‌زمان $k \to \infty$ و $m \to \infty$.

دراین برابری، باعبور به‌حد، دوباره به‌نتیجهٔ مربوط به‌تقارب رشتهٔ (A) می‌رسیم و، ضمناً، خواهیم داشت:

$$A = P - Q \qquad (۳)$$

می‌توان گفت که، با توجه به فرض‌هایی که داشتیم، مجموع رشتهٔ مفروض برابر است با تفاضل بین مجموع‌های دو رشته، که یکی شامل جمله‌های مثبت و دیگری شامل قدر-مطلق جمله‌های منفی است. ازاین مطلب، در آینده، استفادهٔ فراوان خواهیم کرد.

اگر رشتهٔ (A)، همراه با رشتهٔ (A^*)ـ که شامل قدرمطلق جمله‌های (A) است- متقارب باشد، گویند، رشتهٔ (A) متقارب مطلق است. با توجه به قضیه‌ای که ثابت کردیم، تقارب رشتهٔ (A^*)، برای تقارب مطلق رشتهٔ (A) کافی است.

بعداً خواهیم دید که، ممکن‌است رشتهٔ (A) متقارب، ولی رشتهٔ (A^*) متباعد باشد، دراین حالت، رشتهٔ (A) را، متقارب غیرمطلق گویند.

برای اثبات تقارب مطلق رشتهٔ (A)، می‌توان ازهمهٔ معیارهایی که در بند قبل دیدیم، برای رشتهٔ مثبت (A^*)؛ استفاده کرد. ولی، درمورد معیارهای تباعد، باید احتیاط کرد: حتی درحالت متباعد بودن رشتهٔ (A^*)، ممکن‌است رشتهٔ (A)، متقارب (غیر مطلق) باشد. دراین مورد، معیارهای کوشی و دالامبر استثنا است، زیرا، وقتی به‌کمك آن‌ها، تباعدرشتهٔ (A^*) مسلم شود، به‌معنای آن است که جملهٔ‌عمومی $|a_n|$ ازرشتهٔ (A^*)، به‌سمت صفر میل نمی‌کند که، در آن صورت، a_n هم به‌سمت صفرمیل نمی‌کند، به نحوی که رشتهٔ (A) هم متباعد می‌شود. بنا براین، این معیارها، می‌توانند درمورد هررشتهٔ غیرمشخصی به‌کاررونند. مثلا، این را، درمورد معیار دالامبر (که درعمل بیشتر به‌کار می‌رود) روشن می‌کنیم:

معیار دالامبر. فرض می‌کنیم، برای واریانت $\mathscr{D}_n^* = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$، حدمعین

$$\mathscr{D}^* = \text{حد } \mathscr{D}_n^*$$

وجود داشته باشد، آن‌وقت، به‌ازای $\mathscr{D}^*<1$، رشتهٔ مفروض (A)، متقارب مطلق، و به‌ازای $\mathscr{D}^*>1$، متباعد است.

۳۷۸. مثال‌ها. ۱) معیار دالامبر را، دربارهٔ همهٔ رشته‌های (a) تا (e)، که دربارهٔ آن‌ها، در ۳۷۰، ۲) صحبت کرده‌ایم، به‌کار ببرید.

(a) رشته، به‌ازای همهٔ مقدارهای x، متقارب مطلق است.

(b) رشته، برای $-1<x<1$، متقارب مطلق و برای $x\geqslant 1$ یا $x\leqslant -1$، متباعد است (برای $x=\pm 1$، شرط لازم تقارب، از بین می‌رود).

(c) رشته، به‌ازی $-1<x<1$، متقارب مطلق و به‌ازای $x>1$ یا $x<-1$، متباعد است. درحالت $s>1$، به‌ازای $x=\pm 1$، متقارب مطلق است و درحالت $0<s\leqslant 1$، به‌ازای $x=1$ متباعد است و به‌ازای $x=-1$، فعلا نمی‌توانیم حرفی بزنیم.

(d) رشته، به‌ازای $-e<x<e$ متقارب مطلق و، به‌ازای $x\geqslant e$ یا $x\leqslant -e$، متباعد است (به‌ازای $x=\pm e$، شرط لازم تقارب وجود ندارد).

(e) رشته، به‌ازای $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$ متقارب مطلق و، به‌ازای $x\geqslant \frac{1}{e}$ یا $x<-\frac{1}{e}$، متباعد است (به‌ازای $x=-\frac{1}{e}$، فعلا، مساله باز می‌ماند).

۲) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ $(x\neq -1)$.

داریم:

$$\mathscr{D}_n^*=\frac{|x|}{|1+x^n|},\quad \mathscr{D}^*=\begin{cases}|x| & (-1<x<1)\\ \frac{1}{2} & (x=1)\\ 0 & (x<-1 \text{ یا } x>1)\end{cases}$$

بنابراین، رشتهٔ مفروض، برای همهٔ مقدارهای $x\neq -1$، متقارب مطلق است.

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ $(x\neq \pm 1)$.

در این‌جا

$$\mathscr{D}_n^*=\left|\frac{x-x^{n+1}}{1-x^{n+1}}\right|,\quad \mathscr{D}^*=\begin{cases}|x| & (-1<x<1)\\ 1 & (x>1 \text{ یا } x<-1)\end{cases}$$

بنابراین، به‌ازای $|x|<1$، متقارب مطلق و به‌ازای $|x|>1$، از معیار دالامبر به‌جایی نمی‌رسیم؛ ولی، با توجه به‌ازبین‌رفتن شرط لازم تقارب، می‌توان تباعد رشته را نتیجه گرفت.

۴) به‌رشتهٔ فوق هندسی برمی‌گردیم [۳۷۲]:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

به‌ازای α، β، γ و x دلخواه (پارامترهای α، β و γ، مخالف صفر و مخالف عددهای درست منفی فرض می‌شوند).

با به‌کاربردن معیار دالامبر، به‌صورت‌جدید آن، قانع می‌شویم که این رشته، به‌ازای $|x|<1$ متقارب مطلق و به‌ازای $|x|>1$ متباعد است.

حالا فرض می‌کنیم $x=1$. ازآن‌جا که نسبت

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}\quad(|\theta_n|\leqslant L)$$

به‌ازای n به‌قدرکافی‌بزرگ، مثبت‌می‌شود، بنابراین، جمله‌های رشته، ازجایی به‌بعد، دارای یك علامت خواهند بود و، در این صورت، می‌توان درمورد آن‌ها (یا مقدارهای مطلق آن‌ها)، معیار سابق گوس را به‌کاربردکه نشان می‌دهد، رشتهٔ مفروض به‌ازای $\gamma-\alpha-\beta>0$ متقارب (والبته متقارب مطلق) و به‌ازای $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ متباعد است.

بالاخره، فرض می‌کنیم $x=-1$. ازآن‌چه هم‌اکنون گفته شد، روشن است که، به‌ازای $\gamma-\alpha-\beta>0$، رشته‌ای که‌ازمقدارهای مطلق‌رشتهٔ مفروض $F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$ تشکیل شده است، متقارب می‌شود، به‌نحوی‌که رشتهٔ مفروض، دراین حالت، متقارب مطلق است. به‌ازای $\gamma-\alpha-\beta<-1$، با شروع ازجائی، خواهیم داشت:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1\Rightarrow|a_n|<|a_{n+1}|$$

a به‌سمت صفرمیل نمی‌کند ورشته متباعد است.

درحالت $x=-1$ و $-1\leqslant\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$، فعلا، مسالهٔ مربوط به تقارب $F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$ بازمی‌ماند.

۳۷۹. رشتهٔ توانی. بازهٔ تقارب آن. رشتهٔ توانی به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots\qquad(۴)$$

را در نظر می‌گیریم که مانند «چندجمله‌ای نامتناهی»، برحسب توان‌های صعودی متغیر x، درآمده است (در این‌جا a_0، a_1، a_2، ...، معرف ضریب‌هایی ثابت هستند). قبلاً هم، بارها، با چنین رشته‌های توانی سر و کار داشته‌ایم [مثلاً، در شمارهٔ پیش ۱)ـ (a) تا(e) را ببینید].

می‌خواهیم این مسأله را بررسی کنیم که «حوزهٔ تقارب» رشتهٔ توانی چه‌صورتی دارد، یعنی می‌خواهیم مجموعهٔ $\mathfrak{C}=\{x\}$ از مقدارهای متغیر را، که به‌ازای آن‌هارشتهٔ (۴) متقارب می‌شود، پیدا کنیم. و این، دوباره، مثال مهمی از کاربرد بحث قبلی می‌شود.

پیش‌قضیه. اگر رشتهٔ (۴)، به‌ازای مقدار $x=\bar{x}\neq 0$ متقارب باشد، درآن‌صورت، این رشته به‌ازای هر مقدار دلخواه x، که در نابرابری $|x|<|\bar{x}|$ صدق کند، متقارب مطلق خواهد بود.

از تقارب رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{x}^n=a_0+a_1\bar{x}+a_2\bar{x}^2+\cdots+a_n\bar{x}^n+\cdots$$

نتیجه می‌شود که جملهٔ عمومی آن، به‌سمت صفر میل می‌کند [۳۶۴، ۵°] و، در نتیجه، کران‌دار است [۲۶، ۴°].

$$|a_n\bar{x}^n|\leqslant M \quad (n=0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (5)$$

حالا، x دلخواهی را با شرط $|x|<|\bar{x}|$ انتخاب می‌کنیم و رشتهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|=|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots \qquad (6)$$

از آن‌جا که [(۵) را ببینید]

$$|a_nx^n|=|a_n\bar{x}^n|\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n\leqslant M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n$$

و جمله‌های رشتهٔ (۶)، از جمله‌های نظیر تصاعد هندسی متقارب زیر (با قدر نسبت $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|<1$) کوچکترند:

$$M+M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|+M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^2+\cdots+M\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n+\cdots$$

بنابراین، با توجه به‌قضیهٔ ۱ شمارهٔ ۳۶۶، رشتهٔ (۶) متقارب می‌شود؛ و در این حالت، به‌طوری که می‌دانیم، رشتهٔ (۴) متقارب مطلق می‌شود. آن‌چه لازم بود، ثابت شد.

به‌ازای $x=0$، به‌روشنی، هر رشتهٔ (۴) متقارب می‌شود. ولی رشته‌های توانی وجود دارد که، به‌جز این، حتی برای یك مقدار x هم متقارب نمی‌شود. به‌عنوان نمونهٔ رشتهٔ «همه‌جا متباعد»، می‌توان از رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty} n!x^n$ نام برد که تباعد آن، به‌کمك معیار دالامبر، به‌سادگی روشن می‌شود. این‌گونه رشته‌ها، برای ما جالب نیستند.

به‌این ترتیب، فرض می‌کنیم که برای رشتهٔ (۴)، چنین مقدارهای $x=\bar{x}$ مخالف صفر وجود داشته باشند که، به‌ازای آن‌ها، مجموعهٔ مورد نظر $\{|\bar{x}|\}$ متقارب باشد. این مجموعه، می‌تواند از بالا کران‌دار باشد یا نباشد.

در حالت اخیر، یعنی وقتی که مجموعهٔ موردنظر، کران‌دار از بالا نیست، مقدار x را به‌هر ترتیبی اختیار کنیم، حتماً می‌توان $\bar{x}$ را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $|x|<|\bar{x}|$. آن‌وقت، بنابر پیش قضیه، به‌ازای این مقدار x، رشتهٔ (۴)، متقارب مطلق می‌شود و رشتهٔ «همه‌جا متقارب» است.

اکنون فرض می‌کنیم مجموعهٔ $\{|\bar{x}|\}$ از بالا کران‌دار و R مرز بالای آن‌ها باشد. اگر $|x|>R$، در آن‌صورت، مستقیماً روشن می‌شود که، به‌ازای این مقدار x، رشتهٔ (۴) متباعد است. حالا $|x|<R$ را انتخاب می‌کنیم. طبق تعریف مرز، باید بتوان مقدار $\bar{x}$ را چنان پیدا کرد که داشته باشیم: $R\leqslant|\bar{x}|<|x|$؛ و این، بنابر پیش‌قضیه، به‌معنای تقارب مطلق رشتهٔ (۴) است.

به‌این ترتیب، رشتهٔ (۴)، در بازهٔ باز $(-R, R)$ متقارب مطلق و به‌ازای $x>R$ و $x<-R$ متباعداست. در دوانتهای بازه، یعنی به‌ازای $x=\pm R$، نمی‌توان نظر کلی داد: در این‌جا، می‌تواند تقارب یا تباعد وجود داشته باشد.

مسأله‌ای را که طرح شده بود، حل کردیم.

برای هر رشتهٔ توانی به‌صورت (۴)، تنها اگر در همه‌جا متباعد نباشد، «حوزهٔ تقارب» $\mathfrak{D}$ عبارت است از سراسر بازهٔ از $-R$ تا R، که دو انتهای آن می‌تواند وارد در این حوزه باشد یا نباشد؛ این بازه ممکن است نامتناهی هم باشد. رشتهٔ مفروض، در درون این بازه، متقارب مطلق است.

بازهٔ مذکور را، بازهٔ تقارب [یا بازهٔ هم‌گرائی] و عدد $R(0<R\leqslant+\infty)$ را شعاع تقارب [یا شعاع هم‌گرائی] رشته گویند. اگر به‌مثال‌های ۱)، (a) تا (e) شمارهٔ قبل مراجعه کنیم، به‌سادگی دیده می‌شود که، شعاع تقارب، در حالت‌های مختلف، چنین است:

$$R=+\infty \text{ (a)}\ ،\quad R=1 \text{ (b) و (c)}\ ،\quad R=e \text{ (d)}\ ،\quad R=\frac{1}{e} \text{ (e)}.$$

برای رشته همه‌جا متباعد $R=0$ می‌گیرند: «حوزهٔ تقارب» آن‌عبارت است از یك نقطهٔ $x=0$.

۳۸۰. بیان شعاع تقارب، برحسب ضریب‌ها. حالا، به‌قضیهٔ دقیق‌تری می‌پردازیم که، ضمن آن، نه‌تنها وجود شعاع تقارب ثابت می‌شود، بلکه مقدار آن‌را برحسب ضریب‌های خود رشتهٔ (۴) معین می‌کند.

دنبالهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\rho_1=|a_1|,\ \rho_2=\sqrt{|a_2|},\ \dots,\ \rho_n=\sqrt[n]{|a_n|},\ \dots$$

بزرگترین حد این نباله را [که همیشه وجود دارد، **۴۲**] ρ می‌نامیم، به‌نحوی که

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\rho_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

قضیهٔ کوشی ـ آدامار. شعاع تقارب رشتهٔ (۴)، عبارت است از مقدار معکوس بزرگترین حد ρ، از واریانت $\rho_n=\sqrt[n]{|a_n|}$:

$$R=\frac{1}{\rho}$$

(درضمن، در حالت $\rho=0$ داریم $R=+\infty$ و درحالت $\rho=+\infty$ داریم: $R=0$).

[این قضیه را کوشی پیدا کرد، ولی به‌دست فراموشی سپرده‌شد. آداامار (J. Hadamard)، دوباره، آن‌را کشف کرد و کاربردهای مهم آن‌را نشان داد].

اثبات. حالت I: $\rho=0$. ثابت می‌کنیم، در این حالت $R=+\infty$، یعنی به‌ازای x دلخواه، رشتهٔ (۴)، متقارب مطلق است.

چون دنبالهٔ $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ از جمله‌های مثبت تشکیل شده است، بنابراین از $\rho=0$ نتیجه می‌شود که، این دنباله، دارای حدی معین است:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$$

از این‌جا، وقتی $n\to\infty$، برای x دلخواه، واریانت کوشی

$$c_n=\sqrt[n]{|a_n|\cdot|x|^n}=|x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$$

بنابراین، باتوجه به‌معیار کوشی [۳۶۸]، رشته‌ای که ازقدرمطلق جمله‌های رشتهٔ (۱) تشکیل شده است، متقارب می‌شود، یعنی خود رشتهٔ (۱) متقارب مطلق است.

حالت II: $\rho=+\infty$. ثابت می‌کنیم که در این حالت $R=0$، یعنی به ازای هر $x\neq 0$، رشتهٔ (۱) متباعد است.

چون

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$$

بنابراین، چنان دنبالهٔ جزئی $\{n_i\}$ می‌توان یافت که

$$\lim_{i\to\infty}\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|}=+\infty$$

در نتیجه، به‌ازای هر $x\neq 0$، چنان شمارهٔ i_0 پیدا می‌شود که، برای هر $i>i_0$، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|}>\frac{1}{|x|}\quad\text{یا}\quad |a_{n_i}\cdot x^{n_i}|>1$$

می‌بینیم که، در این حالت، شرط لازم تقارب رشته برقرار نیست (جملهٔ عمومی رشته، به‌سمت صفر میل نمی‌کند). در نتیجه، رشتهٔ (۴) متباعد می‌شود.

حالت III: ρ، عددی است مثبت و متناهی: $0<\rho<+\infty$. ثابت می‌کنیم، در این حالت، $R=\frac{1}{\rho}$، یعنی رشتهٔ مفروض، به‌ازای $|x|<\frac{1}{\rho}$، متقارب مطلق و، به‌ازای $|x|>\frac{1}{\rho}$، متباعد است. x دلخواه را، باشرط $|x|<\frac{1}{\rho}$ انتخاب می‌کنیم. $\varepsilon>0$ را آن‌قدر کوچك اختیار می‌کنیم تا نابرابری

$$|x|<\frac{1}{\rho+\varepsilon}$$

برقرار شود. از روی این ε، همیشه می‌توان چنان عدد N_ε را پیدا کرد تا برای هر $n>N_\varepsilon$ داشته باشیم:

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\rho+\varepsilon$$

براساس ویژگی اول بزرگترین حد دنباله [۴۲]، از این‌جا نتیجه می‌شود که، به‌ازای هر $n>N_\varepsilon$، واریانت کوشی

$$c_n=\sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|}=|x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}<|x|\cdot(\rho+\varepsilon)<1$$

و با توجه به‌معیار کوشی، رشته‌ای که‌از مقدارهای‌مطلق‌جمله‌های رشتهٔ (۴) تشکیل‌شده باشد، متقارب وخود رشتهٔ (۴)، متقارب مطلق می‌شود.

اکنون x دلخواه را، بـا شرط $|x|>\frac{1}{\rho}$، انتخاب می‌کنیم. ε را آن‌قـدر کـوچك می‌گیریم تا

$$|x|>\frac{1}{\rho-\varepsilon}$$

از روی ویژگی دوم بزرگترین حد [۴۲]، به‌ازای n به‌قدرکافی بزرگ، نابرابری

$$\sqrt[n]{|a_n|}>\rho-\varepsilon$$

برآورده می‌شود، به‌نحوی که

$$\sqrt[n]{|a_nx^n|}>|x|\cdot(\rho-\varepsilon)>1$$

در نتیجه، برای n به‌قدرکافی بزرگ، جملهٔ عمومی رشتهٔ

$$|a_nx^n|>1$$

و رشتهٔ (۴) متباعد است.

۳۸۱. رشته‌های متناوب. رشته‌هایی را متناوب گویندکه جمله‌های آن‌ها، به‌نوبت، دارای علامت مثبت و منفی باشند. بهتراست رشته‌های‌متناوب را طوری بنویسیم که‌علامت آن‌ها آشکار باشد، مثلاً

$$c_1-c_2+c_3-c_4+\cdots+(-1)^{n-1}c_n+\cdots\quad(c_n>0)\qquad(7)$$

در ارتباط با رشته‌های متناوب، قضیهٔ سادهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ لایب نیتس. اگر جمله‌هـای رشتهٔ متناوب، از لحاظ قدر مطلق، به‌طور یکنوا نزولی باشند:

$$c_{n+1}<c_n \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \qquad (8)$$

و به‌سمت صفر میل کنند:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

در آن‌صورت رشتهٔ مفروض، متقارب می‌شود.

اثبات. مجموع جزئی مرتبهٔ زوج C_{2m} را، می‌توان چنین نوشت:

$$C_{2m}=(c_1-c_2)+(c_3-c_4)+\cdots+(c_{2m-1}-c_{2m})$$

چون، با توجه به (۸)، مقدار هر پرانتز عددی است مثبت، روشن است که، با ترقی m، مجموع C_{2m} هم ترقی می‌کند. از طرف دیگر، اگر C_{2m} را این‌طور بنویسیم:

$$C_{2m}=c_1-(c_2-c_3)-\cdots-(c_{2m-2}-c_{2m-1})-c_{2m}$$

در آن‌صورت، به‌سادگی معلوم می‌شود که C_{2m} از بالا کران‌دار است:

$$C_{2m}<c_1$$

دراین‌حالت، از روی قضیهٔ مربوط به‌واریانت یکنوا [۳۴]، با ترقی نامتناهی m، مجموع جزئی C_{2m}، دارای حد متناهی است:

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m}=C$$

اگر به مجموع جزئی مرتبهٔ فرد C_{2m-1} عبور کنیم، به‌روشنی داریم: $C_{2m-1}=C_{2m}+c_{2m}$، و چون جملهٔ عمومی به سمت صفر میل می‌کند، در این مورد هم داریم:

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m-1}=C$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که C، مجموع رشتهٔ مفروض است.

یادداشت. دیدیم که مجموع جزئی مرتبهٔ زوج C_{2m}، در حال ترقی، به‌مجموع C نزدیک می‌شود. اگر C_{2m-1} را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$C_{2m-1}=c_1-(c_1-c_2)-\cdots-(C_{2m-2}-C_{2m-1})$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که مجموع جزئی مرتبهٔ فرد، در حال تنزل، به‌سمت C میل می‌کند. به‌این ترتیب، همیشه

$$C_{2m}<C<C_{2m-1}$$

و در حالت خاص، می‌توان نوشت:

$$0<C<c_1$$

از این جا، می‌توان برآورد ساده و راحتی بـرای باقی‌ماندهٔ رشتهٔ مورد بـررسی به‌دست آورد (خود باقی‌مانده هم، یك رشتهٔ متناوب است). مثلاً، برای

$$\gamma_{2m}=c_{2m+1}-c_{2m+2}+\cdots$$

به‌روشنی داریم:

$$0<\gamma_{2m}<c_{2m+1}$$

برعکس برای

$$\gamma_{2m-1}=-c_{2m}+c_{2m+1}-\cdots=-(c_{2m}-c_{2m+1}+\cdots)$$

خواهیم داشت

$$\gamma_{2m-1}<0,\quad |\gamma_{2m-1}|<c_{2m}$$

به‌این ترتیب، درهمهٔ حالت‌ها، باقی‌ماندهٔ رشتهٔ از گونهٔ لایب نیتسی*، دارای علامت جملهٔ اول خودش بوده و از لحاظ قدر مطلق، کمتر از آن است.

این یادداشت، برای محاسبه‌های تقریبی به‌کمك رشته‌ها، مورد استفاده قرارمی‌گیرد [۴۰۹ را ببینید].

۳۸۲. مثال‌ها. ۱) نمونه‌های سادهٔ رشته‌های لایب نیتسی عبارتند از

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

$$\text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

اثبات تقارب هر دو رشته را، می‌توان از قضیه‌ای که ثابت کردیم، نتیجه گرفت.

درعین حال، رشته‌هایی کـه از قدر مطلق جمله‌هـای این دو رشته تشکیل شده‌اند، متباعدند: درمورد رشتهٔ (a)، رشتهٔ توافقی و درمورد رشتهٔ (b)، رشتهٔ زیر به‌دست‌می‌آید:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

---

*) رشته‌های متناوبی را، که در قضیهٔ لایب نیتس صدق کنند، این‌طور می‌نامند.

تباعد رشتهٔ اخیر، از آن‌جا روشن می‌شود که، برای مجموع جزئی آن، داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}H_k$$

به‌این ترتیب، دو رشتهٔ (a) و (b)، نخستین نمونه‌های رشته‌های متقارب غیرمطلق* را برای ما، تشکیل می‌دهند [خواهیم دید که مجموع رشتهٔ اول $\ln 2$ و مجموع رشتهٔ دوم $\frac{\pi}{4}$ است. ۳۸۸، ۲) و ۴۰۵ و ۴۰۴].

۲) با توجه به‌قضیهٔ لایب نیتس، رشته‌های زیر متقارب هستند:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^s n},\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n(\ln\ln n)^s}\qquad (s>0)$$

اگر همهٔ جمله‌ها را، با قدرمطلق‌های آن‌ها عوض کنیم، به‌طوری که می‌دانیم، به‌ازای $s>1$، تقارب رشته‌ها و به‌ازای $s\leqslant 1$، تباعد آن‌ها حاصل می‌شود. به‌این ترتیب، رشته‌های مفروض، به‌ازای $s>1$، متقارب‌مطلق و به‌ازای $s\leqslant 1$، متقارب غیرمطلق‌هستند.

اکنون می‌توانیم در مورد رشتهٔ توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^s}$، که در ۳۷۰ و ۳۷۸ موردبررسی قرار دادیم ــ در انتهای $x=-1$ بازهٔ تقارب خود، داوری کنیم: به‌ازای $s\leqslant 1$ متقارب است، ولی متقارب مطلق نیست.

۳) رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ را، به ازای $x\neq 0$ دلخواه، در نظر می‌گیریم. قضیهٔ لایب نیتس را، نه‌برای خود این رشته، بلکه برای باقی‌ماندهٔ به‌قدرکافی دور آن (دور، از لحاظ شماره) به‌کارمی‌بریم. در واقع، به‌ازای n به‌قدرکافی بزرگ، $\sin\frac{x}{n}$ همان‌علامت x را دارد و، از لحاظ قدر مطلق، با ترقی n، تنزل می‌کند. بنابراین، رشته متقارب است [و معلوم است که متقارب غیرمطلق؛ ۳۶۷، ۸) (c) را ببینید].

۴) برای این‌که روشن کنیم، شرط نزولی یکنوا بودن عددهای c_n در قضیهٔ لایب‌نیتس، به‌هیچ‌وجه، شرطی اضافی نیست، رشتهٔ متناوب زیر را در نظر می‌گیریم:

---

*) رشته‌های متقارب غیرمطلق را، در کتاب‌های فارسی، نیمه مطلق، متقارب‌مشروط، نیمه‌همگرا و غیر آن نیز گفته‌اند. م.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$$

که جملهٔ عمومی آن، به‌سمت صفرمیل می‌کند. مجموع $2n$ جملهٔ این رشته، برابر است با

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}-1}-\frac{1}{\sqrt{k}+1}\right)=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2}{k-1}=2H_n$$

که همراه با n، به‌طور نامتناهی ترقی می‌کند: رشته متباعد است. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد، یکنوائی نزولی، هربار ضمن عبور ازجملهٔ $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ به‌جملهٔ $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$، از بین می‌رود.

به‌همین منظور، می‌توان رشتهٔ متباعد

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$$

را درنظر گرفت، که بررسی آن را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۵) رشتهٔ اخیر، بهانه‌ای است برای این یادداشت. اگر آن را با رشتهٔ متقارب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ مقایسه کنیم، معلوم می‌شود که نسبت جمله‌های عمومی آن‌ها، به‌یکدیگر، به‌سمت ۱ میل می‌کند. به‌این ترتیب قضیهٔ ۲، شمارهٔ ۳۶۶، در نظریهٔ رشته‌های با جمله‌های با علامت‌های دلخواه، مشابهی ندارد.

۶) استفادهٔ از رشته‌های متباعد درمحاسبه‌ها، وانجام عمل روی مجموع‌های نامتناهی آن‌ها، ممکن است منتهی به‌پارادوکس بشود. به‌عنوان نمونه، ازیکی ازآن‌ها یادمی‌کنیم.

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=0!$$

اگرهمین تبدیل را درمورد رشتهٔ متقارب

$$p=1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots \qquad (s>0)$$

به‌کار بریم، نتیجه می‌گیریم که

$$p=\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)q$$

که در آن

$$q=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

به‌ازای $s<1$ (در این حالت، رشتهٔ اخیر متباعد است)، دوباره به‌پارادوکس می‌رسیم: $p<0$ [با **۳۸۱**، یادداشت، مقایسه کنید]. به‌ازای $s>1$، با رشته‌های متباعد سروکار داریم و به‌نتیجهٔ درست می‌رسیم.

۳۸۳. تبدیل آبل. اغلب پیش می‌آید که با مجموعی از حاصل‌ضرب زوج‌ها، به‌صورت زیر، سروکار داریم:

$$S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_m\beta_m \qquad (9)$$

ضمناً، در بسیاری موردها، استفادهٔ از تبدیل مقدماتی زیر ــ که به‌وسیلهٔ آبل (N. H. Abel) پیشنهاد شده است ــ می‌تواند مفید باشد.

اگر مجموع‌های

$$B_1=\beta_1,\ B_2=\beta_1+\beta_2,\ B_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3,\ \ldots,$$
$$B_m=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m$$

را در بررسی خود وارد کنیم، آن‌وقت، با بیان عامل‌های β_i برحسب مجموع‌ها

$$\beta_1=B_1,\ \beta_2=B_2-B_1,\ \beta_3=B_3-B_2,\ \ldots,$$
$$\beta_m=B_m-B_{m-1}$$

مجموع S را، می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$S=\alpha_1B_1+\alpha_2(B_2-B_1)+\alpha_3(B_3-B_2)+\cdots+\alpha_m(B_m-B_{m-1})$$

اگر پرانتزها را باز و جمله‌ها را، به‌ترتیب دیگری گروه‌بندی کنیم، به‌صورت نهائی زیر می‌رسیم:

$$S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=(\alpha_1-\alpha_2)B_1+(\alpha_2-\alpha_3)B_2+\cdots+$$

$$+(\alpha_{m-1}-\alpha_m)B_{m-1}+\alpha_m B_m=\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_m B_m^{*} \qquad (10)$$

[اگر آن را به‌صورت

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i=\alpha_m B_m-\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)B_i$$

بنویسیم، آن‌وقت روشن می‌شود که، این رابطه، برای مجموع‌های متناهی عبارت است از رابطه‌ای شبیه انتگرال گیری جزء به‌جزء، برای انتگرال‌ها: دیفرانسیل با تفاضل و انتگرال با مجموع عوض شده است].

حالا، براساس رابطهٔ (۱۰)، برآورد زیررا، برای مجموع رشتهٔ مذکور، می‌آوریم:

پیش قضیه. اگر ضریب‌های α_i صعود نکنند (یا نزول نکنند) ومجموع‌های B_i، از لحاظ قدرمطلق، به‌وسیلهٔ عدد L کران‌دار باشند:

$$|B_i|\leqslant L \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

در آن صورت

$$|S|=\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\right|\leqslant L(|\alpha_1|+2|\alpha_m|)$$

درواقع، چون همهٔ تفاضل‌ها در (۱۰) دارای یك علامت هستند، داریم:

$$|S|\leqslant\sum_{i=1}^{m-1}|\alpha_i-\alpha_{i+1}|\cdot L+|\alpha_m|\cdot L=$$

$$=L(|\alpha_1-\alpha_m|+|\alpha_m|)\leqslant L(|\alpha_1|+2|\alpha_m|)$$

به‌سادگی دیده می‌شود که، اگرضریب α_i صعود نکند و مثبت باشد، درآن صورت، برآورد را می‌توان ساده کرد:

$$|S|=\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\right|\leqslant L\cdot\alpha_1 \qquad (11)$$

ازاین برآوردها، بارها و به‌دلیل‌های مختلف، استفاده خواهیم کرد. فعلا، ازآن، به‌عنوان

---

*) درواقع، برای اثبات قضیهٔ دوم مربوط به‌مقدارهای میانگین هم، ازتبدیل مشابهی استفاده کردیم [۳۰۶].

معیار تقارب، که کلی‌تر از معیار لایب‌نیتس است، استفاده می‌کنیم.

۳۸۴. معیارهای آبل و دیریکله. رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \qquad (W)$$

را، که در آن، $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی از عددهای حقیقی هستند، در نظر می‌گیریم. هر کدام از فرض‌های زیر، به‌طور جداگانه، تقارب این رشته را تامین می‌کند.

معیار آبل. اگر رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad (B)$$

متقارب و عددهای a_n دنباله‌ای یکنوا و کران‌دار را تشکیل بدهند

$$|a_n| \leqslant K \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

در آن صورت، رشتهٔ (W) متقارب است.

معیار دیریکله. اگر همهٔ مجموع‌های جزئی رشتهٔ (B) کران‌دار باشند*:

$$|B_n| \leqslant M \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

و عددهای a_n، دنباله‌ای یکنوا را تشکیل دهند که به‌سمت صفر میل می‌کند:

$$\text{حد } a_n = 0$$

در آن صورت، رشتهٔ (W) متقارب می‌شود.

در هر دو حالت، برای اثبات تقارب رشتهٔ (W)، به اصل تقارب [۳۷۶] متوسل می‌شویم. به این جهت، مجموع

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} b_{n+i}$$

را در نظر می‌گیریم، که اگر در آن، $\beta_i = b_{n+i}$ و $a_i = a_{n+i}$ و بگیریم، به‌همان صورت (۹) است. کوشش می‌کنیم، این مجموع را، به کمک پیش قضیه، برآورد کنیم.

با فرض‌های آبل، برای $\varepsilon > 0$ مفروض، چنان شمارهٔ N پیدا می‌شود که، به‌ازای $n > N$، نابرابری

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

---

*) این فرض، گسترده‌تر از فرض تقارب رشتهٔ (B) است.

برای p دلخواه برقرار باشد (اصل تقارب). در نتیجه، برای عدد L مذکور در پیش‌قضیه، می‌توان ε را اختیار کرد. آن‌وقت، برای $n>N$ و $m=1, 2, 3, \dots$ داریم:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \leqslant \varepsilon(|a_{n+1}|+2|a_{n+m}|) \leqslant 3K.\varepsilon$$

که این هم، تقارب (W) را ثابت می‌کند.

با فرض دیریکله، برای $\varepsilon>0$ مفروض، چنان شمارهٔ N پیدا می‌شود که، به‌ازای $n>N$، داشته باشیم:

$$|a_n|<\varepsilon$$

به‌جز آن، معلوم است که

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\dots+b_{n+p}| = |B_{n+p}-B_n| \leqslant 2M$$

و می‌توان، در پیش‌قضیه، $L=2M$ قرارداد. آن‌وقت، به‌ازای $n>N$ و $m=1, 2, 3, \dots$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \leqslant 2M.(|a_{n+1}|+2|a_{n+m}|) \leqslant 6M.\varepsilon$$

و تقارب رشتهٔ (W) ثابت می‌شود.

یادداشت. معیار آبل را، می‌توان از معیار دیریکله نتیجه گرفت. درواقع، از گزارهٔ آبل نتیجه می‌شود که، a_n دارای حدمتناهی a است. اگر رشتهٔ (W) را، به‌صورت مجموع رشته‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n + a\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

بنویسیم، رشتهٔ دوم بنا به‌فرض متقارب می‌شود و درمورد اولی هم، می‌توان معیار دیریکله را به‌کار برد.

۳۸۵. مثال‌ها. ۱) اگر a_n یکنوای نزولی باشد و به‌سمت صفر میل کند و داشته باشیم: $b_n=(-1)^{n-1}$، در آن‌صورت، شرط‌های قضیهٔ دیریکله برقرارند. در نتیجه، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1-a_2+a_3-\dots+(-1)^{n-1}a_n+\dots$$

متقارب می‌شود و، به‌این ترتیب، قضیهٔ لایب‌نیتس، به‌عنوان حالت خاصی از قضیهٔ دیریکله به‌دست می‌آید.

۲) با همان فرض‌ها نسبت به a_n، رشته‌های زیررا درنظر می‌گیریم (به‌ازای x

دلخواه):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin nx, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$$

اگر در اتحادهای (۱) و (۲) شمارهٔ ۳۰۷ـ که در آن‌جا به بهانهٔ دیگری ثابت شده بودندـ $a = 0$ و $h = x$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin ix = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos ix = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

تنها با این فرض که x صورت $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) را نداشته باشد. به‌این ترتیب، تنها با شرط $x \neq 2k\pi$، هردو مجموع، به‌ازای n نامشخص، از لحاظ قدرمطلق، با عدد $\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$ کران‌دار هستند.

با توجه به‌معیار دیریکله، هردو رشته، به‌ازای مقدار دلخواه $x \neq 2k\pi$، متقارب می‌شوند؛ ضمناً، رشتهٔ اول، به‌ازای $x = 2k\pi$ هم متقارب است، زیرا همهٔ جمله‌های آن برابر صفر می‌شوند.

به‌ویژه، مثلاً، رشته‌های زیر متقارب‌اند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}, \ldots$$

۳) رشته‌های به‌صورت زیر، بسیار جالب‌اند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \qquad (۱۲)$$

که در آن، $\{a_n\}$، دنباله‌ای نامشخص از عددهای حقیقی است. این رشته‌ها را، رشته‌های دیریکله می‌نامند.

برای این رشته‌ها، پیش قضیه‌ای مشابه پیش قضیهٔ شمارهٔ ۳۷۹، دربارهٔ رشته‌های

توانی، ثابت کرد:

اگر رشتهٔ (۱۲)، به‌ازای یك مقدار $x=\bar{x}$ متقارب باشد، درآن صورت، به‌ازای هر $x<\bar{x}$ هم، متقارب خواهد بود.

این حکم، بلافاصله، ازقضیهٔ آبل نتیجه می‌شود، زیرا، به‌ازای $x<\bar{x}$، رشتهٔ (۱۲) ازرشتهٔ متقارب

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\bar{x}}}$$

با ضرب جمله‌های آن درعامل‌های یکنوای نزولی ومثبت $\frac{1}{n^{x-\bar{x}}}$ $(n=1,2,3,\dots)$ به‌دست می‌آید.

دربین رشته‌های (۱۲)، رشته‌های «همه‌جا متقارب» از قبیل $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n^x}$ و رشته‌های «همه‌جا متباعد» مثل $\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{n^x}$ وجود دارد. اگراین حالت‌ها راکنار بگذاریم، به‌کمك پیش‌قضیه‌ای که آوردیم، می‌توان به‌سادگی، وجود طول λ، نقطهٔ مرزی تقارب را ثابت کرد، به‌نحوی که، رشتهٔ (۱۲) به‌ازای $x>\lambda$ متقارب و به‌ازای $x<\lambda$ متباعد باشد. مثلا، برای رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$، به‌روشنی، داریم: $\lambda=1$ و برای رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ داریم: $\lambda=0$.

اگرمایل باشیم، می‌توان، برای رشتهٔ «همه‌جا متقارب» $\lambda=-\infty$ وبرای رشته «همه‌جا متباعد» $\lambda=+\infty$ گرفت.

خواننده، به‌روشنی، شباهت با رشته‌های توانی را ملاحظه می‌کند: درهردوحالت «حوزهٔ تقارب»، تمامی بازه را دربرمی‌گیرد. ولی، تفاوت اساسی هم، بین آن‌ها وجود دارد: دراین‌جا، ممکن است، حوزهٔ تقارب مطلق برحوزهٔ تقارب، به‌طورکلی، منطبق نباشد. مثلا، رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$، به‌ازای $x>0$ متقارب است، درحالی که تنها به‌ازای $x>1$ متقارب مطلق می‌شود.

۴) رشتهٔ زیر را، که با همان مقدارهای ضریب‌های a_n تشکیل شده است، با رشتهٔ (۱۲) دیریکله مقایسه کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdots(x+n)} \qquad (۱۳)$$

ضمناً، طبیعی است که x را، مخالف 0، -1، -2، ... به‌حساب خواهیم آورد.

این حکم را، که متعلق به لانـدو (E. Landou) است، خواهیم داشت: رشته‌های (۱۲) و (۱۳)، با هم متقارب می‌شوند، یعنی اگـر به‌ازای مقداری از x، یکی ازاین دو رشته متقارب باشد، دیگری هم، به‌ازای همان مقدار x متقارب خواهد بود.

رشتهٔ (۱۳) را، می‌توان ازرشتهٔ (۱۲) دیریکله، وبا ضرب جمله‌های آن، به‌ترتیب، درعامل‌های

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \qquad (14)$$

به‌دست آورد. برای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ n، این ضریب‌ها، علامت معینی راپیدا می‌کنند و، علاوه برآن، ازجایی به‌بعد، تغییری یکنوا دارند.

درواقع، نسبت ضریب $(n+1)$ام برضریب nام چنین می‌شود:

$$\frac{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}}$$

ولی [۱۲۵، ۴)]

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}=1+\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

وبه‌همین ترتیب

$$\frac{1}{1+\frac{x+1}{n}}=1-\frac{x+1}{n}+\frac{(x+1)^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ازآن‌جا

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}}=1+\frac{(x+1)x}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ازرابطهٔ اخیرروشن است که، نسبت مذکور، سرانجام، به‌ازای $x(x+1)>0$ بـزرگتر از واحد و به‌ازای $x(x+1)<0$ کوچکتر ازواحد می‌شود.

برای این‌که کران‌دار بودن ضریب‌های (۱۴) را ثابت کنیم، براین مطلب [که بعداً،

درشمارهٔ ۴۰۲، ۱۰) ثابت‌خواهد شد]، توافق می‌کنیم که، به‌ازای $n \to \infty$، برای‌عبارت (۱۴)، حد متناهی وجود دارد. به‌این ترتیب، با توجه به‌معیار آبل، تقارب رشتهٔ (۱۲)، به‌معنای تقارب رشتهٔ (۱۳) است.

چون این‌حد (به‌طوری که خواهیم دید)، همیشه مخالف صفراست، می‌توان‌درمورد ضریب‌های معکوس نسبت‌های (۱۴) هم، به نتیجه‌های مشابهی رسید. آن وقت، با توجه به‌همان قضیه، تقارب رشتهٔ (۱۳)، به‌معنای تقارب رشتهٔ (۱۲) خواهد بود. و به‌این‌ترتیب، همهٔ مطلب ثابت شد.

۵) نوع مشابه تناظری را، می‌توان بین رفتار رشتهٔ موسوم به‌رشته لامبر (J. H. Lambert)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \qquad (۱۵)$$

ورشتهٔ توانی [۳۷۹]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad (۱۶)$$

با همان ضریب‌های a_n (بدیهی است، به‌استثنای مقدارهای $x = \pm 1$) برقرار کرد. دقیق‌تر بگوییم:

اگر رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (A)$$

متقارب باشد، آن‌وقت، رشتهٔ لامبر (۱۵)، به ازای همهٔ مقدارهای x، متقارب می‌شود؛ در حالت‌خلاف، به‌ازای مقدارهایی از x متقارب می‌شود که، برای آن‌ها، رشتهٔ توانی (۱۶) متقارب باشد [کنوپ (K. Knopp)].

(a) ابتدا فرض می‌کنیم، رشتهٔ (A) متباعد باشد، به‌طوری که برای شعاع تقارب رشتهٔ (A) داشته باشیم: $R \leqslant 1$، ثابت می‌کنیم که، برای $|x| < 1$، رفتار رشته‌های (۱۵) و (۱۶) یکسان است.

اگر رشتهٔ (۱۵) متقارب باشد، در آن صورت، رشتهٔ حاصل از ضرب جمله‌های آن

در x^n* به‌دست می‌آید و، درنتیجه، رشتهٔ (۱۶) که به‌صورت تفاضل دورشته است [۳۶۴، ۴°] متقارب می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{x^n}{1-x^n} - a_n \cdot \frac{x^n}{1-x^n} \cdot x^n \right]$$

اکنون فرض می‌کنیم، رشتهٔ (۱۶) متقارب باشد، آن‌وقت، ازروی معیار آبل، رشتهٔ حاصل ازضرب جمله‌های آن، درعامل نزولی یکنوای $\frac{1}{1-x^{2n}}$، متقارب می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \cdot \frac{x^n}{1-x^{2n}}, \text{ درست مثل } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \cdot \frac{1}{1-x^{2n}}$$

بنابراین، رشتهٔ (۱۵) هم، که مجموع این دورشته است، متقارب می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n x^n \cdot \frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^n \cdot \frac{x^n}{1-x^{2n}} \right]$$

رشتهٔ (۱۶)، برای $|x|>1$، آشکارا متباعد است؛ تاکید می‌کنیم که، به‌ازای این مقدارهای x، رشتهٔ (۱۵) هم متباعد می‌شود. درحقیقت، درحالت خلاف، از تقارب رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

تقارب رشته‌های زیر نتیجه می‌شود [۳۶۴، ۴°]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n},$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right]$$

---

*) اگریك رشته، ومثلا $\sum_{1}^{\infty} b_n$، متقارب باشد، به‌این معنی است که رشتهٔ توانی $\sum_{1}^{\infty} b_n x^n$، به‌ازای $x=1$، متقارب است و، آن‌وقت، از روی پیش قضیهٔ شمارهٔ ۳۷۹، این رشته، به‌ازای هر $|x|<1$ متقارب می‌شود. ازاین نکته، درمتن استفاده خواهیم کرد.

علی‌رغم فرض.

(b) اگر رشتهٔ (A) متقارب باشد، (به‌طوری‌که $R \geqslant 1$)، آن‌گاه، برای $|x| < 1$، رشتهٔ (۱۶) متقارب می‌شود و تقارب رشتهٔ (A) هم، مانند پیش، اثبات می‌شود. می‌مانند نشان دهیم که رشتهٔ (۱۵)، به‌ازای $|x| > 1$ متقارب است.

درحقیقت، داریم: $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ ورشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

به‌طوری‌که گفتیم، متقارب می‌شود و، درنتیجه، رشتهٔ زیرهم متقارب می‌شود [۳۶۴، ۴°]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right]$$

۶) درپایان، به‌عنوان نمونه‌ای ازکاربرد مستقیم تبدیل آبل (۱۵)، اتحاد زیررا می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$$

که درآن

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ضمناً، $|x|$، نه‌تنها کمتر ازشعاع تقارب R رشتهٔ اول، بلکه کمتر ازواحد هم فرض می‌شود. درواقع داریم:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i (x^i - x^{i+1}) + A_n x^n$$

ازاین‌جا، به‌ازای $n \to \infty$، وقتی برابری مطلوب برقرار می‌شود که $A_n x^n \to 0$. برای این منظور، عدد r را، با شرطهای زیر، انتخاب می‌کنیم:

$$|x| < r < R,\ r \neq 1$$

آن‌وقت، $|a_i| r^i \leqslant L$ (برای $i = 0, 1, 2, \ldots$) و

$$|A_n x^n| \leqslant L\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\cdots+\frac{1}{r^n}\right)|x|^n = \frac{L}{1-r}\left(\frac{|x|}{r}\right)^n - \frac{Lr}{1-r}|x|^n$$

عبارت آخرهم، با توجه به‌فرض‌های موجود، بدروشنی بسمت صفرمیل می‌کند.

§۴. ویژگی‌های رشته‌های متقارب

۳۸۶. ویژگی شرکت‌پذیری. مفهوم مجموع رشتهٔ نامتناهی ــ که متضمن گذر به‌حد است ــ از اساس، با مفهوم مجموع تعداد متناهی عامل‌ها (که درحساب وجبرمورد بررسی قرار می‌گیرد) فرق دارد. البته، ویژگی‌هایی از مجموع‌های عادی را می‌توان، درمورد مجموع رشته‌های نامتناهی هم به‌کاربرد، ولی غالباً، این‌کاربرد همراه با شرطهایی است که باید مورد مطالعه قرار گیرند. در بعضی موردها هم، ویژگی‌های عادی مجموع‌ها، به‌صورت حیرت‌آوری، بی‌معنی می‌شود. بنابراین، به‌طورکلی، باید در این مساله، با احتیاط کامل عمل کرد.

رشتهٔ متقارب زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (A)$$

جمله‌های آن را، به‌طریقی دلخواه، گروه‌بندی می‌کنیم، بدون این‌که ردیف یا جای آن‌ها را عوض کنیم:

$$a_1 + \cdots + a_{n_1};\ a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2};\ \cdots;\ a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k};\ \cdots$$

دراین‌جا $\{n_k\}$ عبارت است از دنباله‌ای جزئی وصعودی ازشماره‌هایی‌که ازرشتهٔ طبیعی عددها، درآمده است.

قضیه. رشته‌ای که از این مجموع‌ها تشکیل می‌شود:

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots +$$
$$+ (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots \qquad (\tilde{A})$$

همیشه متقارب است و مجموعی برابر مجموع رشتهٔ (A) دارد.

به‌زبان دیگر: رشتهٔ متقارب، دارای ویژگی شرکت‌پذیری است.

درواقع، دنبالهٔ مجموع‌های جزئی رشتهٔ جدید

$$\tilde{A}_1,\ \tilde{A}_2,\ \ldots,\ \tilde{A}_k,\ \ldots$$

چیزی جز دنبالهٔ مجموع‌های جزئی

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}, \ldots$$

از رشتهٔ اولیه نیست. وهمین موضوع [۴۵] حکم را ثابت می‌کند.

تا این‌جا، شباهت کاملی بـا مجموع‌های عادی می‌بینیم، ولی اگـر، مثلاً، ویژگی شرکت‌پذیـری را، درحالت عکس آزمایش کنیم، ایـن شباهت ازبیـن می‌رود. اگررشتهٔ متقارب $(\widetilde{A})$ـ که عضوهای آن، هرکدام به‌طورجداگانه، مجموع تعدادی متناهی ازجمله‌ها هستند، مفروض باشد، با حذف پرانتزها، رشتهٔ جدید (A) بدست می‌آیدکه ممکن است متباعد باشد.

اینك مثال ساده‌ای ازاین وضع. رشته‌های

$$(۱-۱)+(۱-۱)+(۱-۱)+\ldots=۰+۰+۰+\ldots=۰$$

و

$$۱-(۱-۱)-(۱-۱)-\ldots=۱-۰-۰-\ldots=۱$$

به‌روشنی متقارب‌اند، درحالی‌که با حذف پرانتزها، به‌رشتهٔ

$$۱-۱+۱-۱+\ldots$$

می‌رسیم که متباعد است.

البته اگر، با حذف پرانتزها، به‌رشتهٔ متقارب (A) برسیم، درآن صورت، مجموع‌آن، همان مجموع رشتهٔ $(\widetilde{A})$ خواهد بود. این مطلب، نتیجه‌ای است از آن‌چه در بالا گفتیم.

با بعضی شرط‌ها، می‌توان ازپیش، تقارب رشتهٔ (A) را تضمین‌کرد. حالت‌ساده‌ای ازاین‌گونه، وقتی‌است‌که همهٔ جمله‌هائی که درداخل‌هریك ازپرانتزهای (A) قرارگرفته‌اند، هم‌علامت باشند.*

درواقع، در چنین حالتی، با تغییر n از n_{k-1} تا n_k، مجموع جـزئی A_n به‌طـور یکنوا تغییرمی‌کند و، درنتیجه، بین دومقدار $A_{n_{k-1}}=\widetilde{A}_{k-1}$ و $A_{n_k}=\widetilde{A}_k$ قرار می‌گیرد. وقتی‌که k به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد، اختلاف مجموع‌های‌اخیر، ازمجموع A رشتهٔ $(\widetilde{A})$ به‌دلخواه‌کوچك می‌شود و، بنابراین. همین وضع درمورد مجموع A_n هـم ـ وقتی کـه n به‌قدرکافی بزرگ باشد ـ درست است، بطوری‌که $A_n \to \widetilde{A}$.

ازاین ملاحظه‌ها، بارها، درآینده استفاده خواهیم‌کرد.

---

*) این علامت ـ ازیك پرانتز به‌پرانتز دیگر، می‌تواند عوض شود.

اکنون به‌یك مثال می‌پردازیم.

مثال. تقارب رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$ را ثابت کنید.

دراین‌جا، ابتداسه‌جملهٔ منفی، پشت‌سرآن ۵ جملهٔ مثبت وغیره‌می‌آید. اگرگروه‌بندی جمله‌ها را، طوری انجام دهیم‌که، جمله‌های هم علامت در یك گروه قرارگیرند، به‌رشتهٔ متناوب زیرمی‌رسیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right] \qquad (1)$$

نابرابری

$$\frac{2}{k+1}<\overbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots}^{k}+\overbrace{\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}^{k+1}<\frac{2}{k}$$

به‌سادگی ثابت می‌شود. درواقع، مجموع k جملهٔ اول کوچکتر از $k.\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$، ومجموع $(k+1)$ جملهٔ آخر کوچکتراز $(k+1)\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}$ است، بنابراین، تمامی مجموع، کوچکتراز $\frac{2}{k}$ می‌شود. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که جمله‌های رشتهٔ (۱)، درحال نزولی یکنوا، ازلحاظ قدرمطلق به‌سمت صفرمیل می‌کنند؛ آن‌وقت، با توجه به‌قضیهٔ لایب‌نیتس، رشتهٔ (۱) متقارب می‌شود و، درنتیجه، بنابرملاحظه‌های بالا، رشتهٔ مفروض هم، متقارب می‌شود.

۳۸۷. ویژگی جابه‌جائی رشته‌های متقارب مطلق. رشتهٔ متقارب (A) با مجموع A را درنظر می‌گیریم. اگرجمله‌های آن را، به‌ترتیب دلخواه، جابه‌جاکنیم، رشتهٔ جدیدی به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a'_k=a'_1+a'_2+\cdots+a'_k+\cdots \qquad (A')$$

هرجملهٔ a'_k ازاین رشته، یك جملهٔ معین a_{n_k} ازرشتهٔ اولیه است*.

آیارشتهٔ (A′) متقارب‌است و، درحالت متقارب بودن، آیا مجموع آن، بامجموع رشتهٔ اولیهٔ (A) یکی است؟ با بررسی این پرسش، به‌اختلاف جدی تقارب مطلق وتقارب غیرمطلق رشته‌ها، پی‌خواهیم برد.

---

*) ضمناً، دنبالهٔ $\{n_k\}$، بدون‌حذف ویا تکرار ــ با تقریب ترتیب ــ همان‌رشتهٔ عددهای طبیعی را تشکیل می‌دهد.

قضیه. اگر رشتهٔ (A) متقارب مطلق باشد، در آن‌صورت، رشتهٔ (A′)، که از جابه‌جا شدن جمله‌های آن به‌دست آمده است، نیز متقارب است و دارای همان مجموع رشتهٔ اولیه است. به‌زبان دیگر: رشته‌ای که متقارب مطلق باشد، دارای ویژگی جابه‌جائی است.

اثبات. (a) اثبات را با دو روش می‌دهیم. ابتدا فرض می‌کنیم، رشتهٔ (A) مثبت باشد.

مجموع جزئی غیرمشخص A'_k از رشتهٔ (A′) را در نظر می‌گیریم. چون

$$a'_1 = a_{n_1},\ a'_2 = a_{n_2},\ \dots,\ a'_k = a_{n_k}$$

اگر n'، بزرگترین از همهٔ شماره‌های n_1، n_2، ...، n_k را انتخاب کنیم، به‌روشنی خواهیم داشت: $A'_k \leqslant A_{n'}$ و، در نتیجه، به‌طور مسلم

$$A'_k \leqslant A$$

در این حالت، (A′) متقارب است [۳۶۵] و مجموع A' آن از A تجاوز نمی‌کند:

$$A' \leqslant A$$

ولی رشتهٔ (A) از (A′)، با جابه‌جائی جمله‌ها، به‌دست آمده است، بنابراین، به‌همان ترتیب

$$A \leqslant A'$$

که با مقایسهٔ نابرابری‌های حاصل، به‌برابری مطلوب می‌رسیم: $A = A'$.

(b) حالا فرض می‌کنیم (A)، رشته‌ای متقارب مطلق و غیرمشخص باشد.

چون رشتهٔ مثبت

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \qquad (A^*)$$

متقارب است، بنابراثبات قبل، با جابه‌جائی دلخواه جمله‌ها، متقارب باقی می‌ماند، آن‌گاه، از روی قضیهٔ شمارهٔ ۳۷۷، ضمناً، رشتهٔ (A) هم، تقارب (مطلق) خود را حفظ می‌کند.

علاوه براین، در ۳۷۷ دیدیم که در حالت تقارب مطلق رشتهٔ (A)، مجموع آن، این‌طور بیان می‌شود:

$$A = P - Q$$

که در آن، P و Q عبارتند از مجموع رشته‌های مثبت

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \qquad (P)$$

و

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m \qquad (Q)$$

که به‌ترتیب، از جمله‌های مثبت و قدرمطلق جمله‌های منفی رشتهٔ (A) تشکیل شده‌اند.

نقل مکان جمله‌ها در رشتهٔ (A)، موجب نقل مکان جمله‌ها در رشته‌های (P) و(Q) می‌شود، ولی (بنابر آن‌چه ثابت کردیم)، بر روی مجموع‌های P و Q اثری نمی‌گذارد. درنتیجه، مجموع رشتهٔ (A) هم، به‌همان مقدار سابق خود، باقی می‌ماند. آن‌چه لازم بود، ثابت شد.

۳۸۸. حالت تقارب غیرمطلق رشته‌ها. حالا، به‌بررسی تقارب غیر مطلق رشته‌ها می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که آن‌ها، دارای ویژگی جابه‌جائی نیستند؛ در چنین حالتی، وقتی که جمله‌های رشته جابه‌جا شوند، ممکن است مجموع آن تغییر کند یا حتی، تقارب آن ازبین برود.

فرض کنیم رشتهٔ (A) متقارب باشد، ولی نه متقارب مطلق. از تقارب آن نتیجه می‌شود $a_n = 0$ حد [۳۶۴، ۵°]. اما، دربارهٔ رشته‌های (P) و (Q) ــ که در شمارهٔ پیش از آن‌ها یادکردیم ــ باید گفت که هر چند به‌روشنی

$$\lim_{k\to\infty} p_k = 0, \quad \lim_{m\to\infty} q_m = 0 \qquad (۲)$$

ولی، در حالت مفروض، هر دوی آن‌ها متباعدند.

در واقع، برابری‌های زیر را داریم:

$$A_n = P_k - Q_m, \quad A_n^* = P_k + Q_m \qquad (۳)$$

اگر k و m، حاکی از تعداد جمله‌های مثبت و منفی در ترکیب n جملهٔ نخستین رشتهٔ(A) باشند، تأکید می‌کنیم که از سه شمارهٔ n، k و m، می‌توان یکی را به‌دلخواه انتخاب کرد و دوتای دیگر را، از آن‌ها به دست آورد. از تقارب یکی از دو رشتهٔ (P) و (Q)، با توجه به‌برابری اول (۳)، تقارب دیگری نتیجه می‌شود؛ و تقارب هر دوی آن‌ها، بنابر دومین برابری (۳)، موجب تقارب رشتهٔ (A*) می‌شود، که برخلاف فرض است.

اکنون، قضیهٔ معروف زیر را، که به‌ریمان تعلق دارد، ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ریمان. اگر رشتهٔ (A) متقارب‌غیرمطلق باشد، در آن‌صورت، عدد B(متناهی

یا برابر $\pm\infty$) را هر جور از قبل اختیار کنیم، می‌توان جمله‌ها را طوری در این رشته قرار داد که رشتهٔ تبدیل شده، مجموعی برابر B داشته باشد.

اثبات. حالت B متناهی را شرح می‌دهیم. قبلاً یادآوری می‌کنیم که، بنابر **۳۶۴**، ۱°، نتیجه می‌شود که همهٔ باقی‌مانده‌های رشته‌های متباعد (P) و (Q) نیز متباعدند، به‌طوری که در هر کدام از این رشته‌ها، باشروع ازهرجای دلخواه، می‌توان آن‌قدر جمله اختیار کرد که مجموع آن‌ها، از هر عدد دلخواه تجاوز کند.

با استفاده از این نکته، به‌ترتیب زیر، جمله‌های رشتهٔ (A) را جابه‌جا می‌کنیم.

ابتدا آن‌قدر جملهٔ مثبت از رشته را (به‌همان ترتیبی که در رشته قرار گرفته‌اند) انتخاب می‌کنیم تا مجموع آن‌ها، از عدد B تجاوز کند:

$$p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}>B$$

به‌دنبال آن‌ها، جمله‌های منفی را (به‌همان ترتیبی که در رشتهٔ مفروض قرار دارند) می‌نویسیم؛ از این جمله‌ها، آن‌قدر انتخاب می‌کنیم تا جمع کل از B کمتر شود:

$$p_1+p_2+\cdots+p_{k_1}-q_1-q_2-\cdots-q_{m_1}<B$$

پس از آن، دوباره، جمله‌های مثبت را قرار می‌دهیم (از جمله‌های باقی‌مانده) تا داشته باشیم:

$$p_1+\cdots+p_{k_1}-q_1-\cdots-q_{m_1}+p_{k_1+1}+\cdots+p_{k_2}>B$$

و سپس، آن‌قدر جملهٔ منفی (از جمله‌های باقی‌مانده) تا به‌دست آید:

$$p_1+\cdots+p_{k_1}-q_1-\cdots-q_{m_1}+p_{k_1+1}+\cdots+p_{k_2}-q_{m_1+1}-\cdots-q_{m_2}<B$$

و همین‌طور تا آخر. اگر این روش را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، روشن است که، به‌هرجملهٔ رشتهٔ (A) و، ضمناً، با علامت خودش، در جای معینی برخورد می‌کنیم.

اگر هربار، ضمن نوشتن جمله‌های p یا q، بیشتر از آن‌چه برای عملی شدن نابرابری مطلوب لازم است، انتخاب نکنیم، انحراف از عدد B از این یا آن‌طرف، از لحاظ قدر مطلق، از آخرین جملهٔ نوشته شده تجاوز نمی‌کند. دراین‌صورت، از (۲) معلوم است که رشتهٔ

$$(p_1+\cdots+p_{k_1})-(q+\cdots+q_{m_1})+\cdots+$$
$$+(p_{k_{i-1}+1}+\cdots+p_{k_i})-(q_{m_{i-1}+1}+\cdots+q_{m_i})+\cdots$$

دارای مجموع B است. بنابر ملاحظهٔ شمارهٔ **۳۶۸**، این نتیجه، بعد از بازکردن پرانتزها هم، درست باقی می‌ماند.

اگر $B=+\infty$، آن وقت با انتخاب دنباله‌ای از عددهای B_i که تا بی‌نهایت صعودی است، می‌توان عددهای مثبت را با این شرط اختیار کرد که مجموع‌ها، به‌ترتیب، بزرگتر از B_1، B_2، B_3، ... بشود؛ و از جمله‌های منفی، تنها یك عدد بعد از هر گروه مثبت قرارداد. بااین روش، روشن است که رشتهٔ مفروض، دارای مجموعی برابر $+\infty$ می‌شود. به‌طور مشابهی می‌توان رشته را با مجموع $-\infty$ به‌دست آورد.*

نتیجهٔ حاصل، این واقعیت را تأیید می‌کند که، تحقق تقارب غیرمطلق، به خاطر استهلاك متقابل جمله‌های مثبت و منفی عملی می‌شود و، به‌همین مناسبت، اساساً به‌ترتیبی مربوط می‌شود که این جمله‌ها، به‌دنبال هم می‌آیند، در حالی که تحقق تقارب مطلق، بر پایهٔ سرعت نزول این جمله‌ها و مستقل از ترتیب آن‌هاست.

مثال‌ها. ۱) رشتهٔ متقارب غیرمطلق زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}}+\ldots \qquad (۴)$$

که مجموع آن، به‌طوری که به‌سادگی می‌توان نشان داد [۲] را ببینید]، برابر است با $\ln 2$. جمله‌های آن‌را طوری جابه‌جا می‌کنیم که، بعد از هر جملهٔ مثبت، دو جملهٔ منفی بیاید:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}}+\ldots \qquad (۵)$$

با این جابه‌جائی، مجموع رشته، نصف می‌شود.

درواقع، اگر مجموع‌های جزئی این‌دو رشته را، به‌ترتیب، A'_n و A_n بنامیم، داریم:

$$A'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}A_{2m}$$

به‌طوری که $A'_{3m}\to\frac{1}{2}\ln 2$. از آن‌جا که

---

*) خواننده به‌سادگی می‌فهمد که جمله‌های رشتهٔ مفروض را چگونه باید جابه‌جا کرد تا مجموع‌های جزئی رشتهٔ تبدیل شده، بزرگترین و کوچکترین حدی، برابر دو عدد معلوم از پیش داده شدهٔ B و $C>B$ داشته باشد.

$$A'_{۴m-۱}=A'_{۴m}+\frac{۱}{۴m},\quad A'_{۴m-۲}=A'_{۴m-۱}+\frac{۱}{۴m-۲}$$

به‌سمت همان حد $\frac{۱}{۲}\ln ۲$ میل می‌کنند، بنابراین، رشتهٔ (۵) متقارب است ومجموعی‌برابر $\frac{۱}{۲}\ln ۲$ دارد.

۲) بـا آغاز از رابطهٔ مربوط مجموع جزئی H_n از رشتهٔ توافقی [۳۶۷، (۴)]، می‌توان نتیجهٔ کلی‌تری را به‌دست آورد:

$$H_n=۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n}=\ln n+C+\gamma_n$$

که درآن، C ثابت اولر و γ_n بی‌نهایت‌کوچك است. از این‌جا، قبل از همه داریم:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲m}=\frac{۱}{۲}\ln m+\frac{۱}{۲}C+\frac{۱}{۲}\gamma_m,$$

$$۱+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲k-۱}=H_{۲k}-\frac{۱}{۲}H_k=$$

$$=\ln ۲+\frac{۱}{۲}\ln k+\frac{۱}{۲}C+\gamma_{۲k}-\frac{۱}{۲}\gamma_k$$

اکنون، قرار می‌گذاریم که جمله‌های رشتهٔ (۴)، به‌این ترتیب باشند: ابتدا p جملهٔ مثبت و q جملهٔ منفی را جا بدهیم، سپس دوباره p جملهٔ مثبت و q جملهٔ منفی، تـا آخر. برای آن‌که مجموع رشتهٔ

$$۱+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲p-۱}-\frac{۱}{۲}-\dots-\frac{۱}{۲q}+\frac{۱}{۲p+۱}+$$

$$+\dots+\frac{۱}{۴p-۱}-\frac{۱}{۲q+۲}-\dots \qquad (۶)$$

را معین کنیم، راحت‌تر است‌که گروه‌های متوالی p یا q جمله‌ای را، یکی کنیم. مجموع جزئی $\widetilde{A}_{۲n}$، که از این راه به‌دست می‌آید، برابر است با

$$\widetilde{A}_{۲n}=\ln\left(۲\sqrt{\frac{p}{q}}\right)+\alpha_n \quad (\alpha_n\to ۰)$$

و به‌سمت $\ln\left(۲\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$ میل می‌کند. مجموع $\tilde{A}_{۲n-۱}$ نیز، به‌سمت همین حد میل می‌کند. بالاخره، بنابر یادداشت شمارهٔ **۳۸۶**، رشتهٔ (۶) هم، همان مجموع $\ln\left(۲\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$ را خواهد داشت.

درحالت خاص، برای رشتهٔ (۴)، $\ln ۲ (p=q=۱)$ و برای رشتهٔ (۵)، همان‌طور که در ۱) دیدیم، $\frac{۱}{۲}\ln ۲ (p=۱، q=۲)$ به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب

$$۱+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۴}+\dots=\frac{۳}{۲}\ln ۲، \quad (p=۲,\ q=۱)$$

$$۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۴}-\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۵}-\dots=۰ \quad (p=۱,\ q=۴)$$

و همین‌طور تا آخر.

می‌بینیم که تعداد گروه‌های متوالی جمله‌های مثبت و منفی را، باز هم، از گروهی به گروهی تغییر دهیم، می‌توان به سادگی، قانونی برای این تغییر انتخاب کرد تامجموع رشتهٔ تبدیل‌شده، برابر با مقدار از پیش تعیین شده باشد. تحقیق دراین باره را، به‌خواننده وا می‌گذاریم.

۳۸۹. ضرب رشته‌ها. دربارهٔ جمع (یا تفریق) جمله به‌جملهٔ دو رشتهٔ متقارب و، همچنین، دربارهٔ ضرب جمله به جملهٔ یك رشتهٔ متقارب دریك عدد ثابت، در **۳۶۴**، ۳° و ۴°، صحبت کرده‌ایم. اکنون به‌مسألهٔ ضرب رشته‌ها می‌پردازیم.

دو رشتهٔ متقارب زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n=a_۱+a_۲+\dots+a_n+\dots \qquad (A)$$

و

$$B=\sum_{m=۱}^{\infty}b_n=b_۱+b_۲+\dots+b_m+\dots \qquad (B)$$

با پیروی ازقاعدهٔ ضرب مجموع‌های متناهی، در این‌جاهم، همهٔ حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی جمله‌های این رشته‌ها را در نظر می‌گیریم: a_ib_k؛ و از آن‌ها، ماتریس مستطیلی نامتناهی

زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$
\begin{array}{l}
a_1b_1 \quad a_2b_1 \quad a_3b_1 \cdots a_ib_1 \cdots \\
a_1b_2 \quad a_2b_2 \quad a_3b_2 \cdots a_ib_2 \cdots \\
a_1b_3 \quad a_2b_3 \quad a_3b_3 \cdots a_ib_3 \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1b_k \quad a_2b_k \quad a_3b_k \cdots a_ib_k \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\qquad (۷)
$$

این حاصل‌ضرب‌ها را، با روش‌های بسیاری، می‌توان به‌صورت دنباله‌ای ساده درآورد. مثلاً، می‌توان حاصل‌ضرب را، به‌صورت قطری یا مربعی نوشت:

$$
\begin{array}{l}
a_1b_1 \quad a_1b_2 \quad a_1b_3 \cdots \\
a_2b_1 \quad a_2b_2 \quad a_2b_3 \cdots \\
a_3b_1 \quad a_3b_2 \quad a_3b_3 \cdots \\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a_1b_1 \quad a_2b_1 \quad a_3b_1 \cdots \\
a_1b_2 \quad a_2b_2 \quad a_3b_2 \cdots \\
a_1b_3 \quad a_2b_3 \quad a_3b_3 \cdots \\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

که به‌ترتیب، به‌دنباله‌های زیر تبدیل می‌شوند:

$$a_1b_1;\ a_1b_2,\ a_2b_1;\ a_1b_3;\ a_2b_2,\ a_3b_1;\ \cdots \qquad (۸)$$

یا

$$a_1b_1;\ a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1;\ a_1b_3,\ a_2b_3,\ a_3b_3,\ a_3b_2,\ a_3b_1;\ \cdots \qquad (۹)$$

رشته‌هایی که از این دنباله‌ها تشکیل شده باشند، به حاصل‌ضرب دو رشتهٔ (A) و (B) موسوم‌اند.

قضیهٔ کوشی. اگر رشته‌های (A) و (B) متقارب مطلق باشند، در آن صورت، حاصل‌ضرب آن‌ها هم، به‌هر ردیفی که از صورت ضرب (۷) انتخاب شود، متقارب می‌شود و مجموع آن، برابر است با حاصل‌ضرب AB مجموع‌ها.

اثبات. بنا به فرض، رشته‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (A^*)$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m| + \cdots \qquad (B^*)$$

متقاربند، یعنی دارای مجموع‌های متناهی مثلاً A^* و B^* می‌باشند. حاصل‌ضرب‌های (۷) را، به هر ترتیبی دلخواه، به‌صورت دنباله باز می‌کنیم و، از آن‌ها، رشتهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s}b_{k_s} = a_{i_1}b_{k_1} + a_{i_2}b_{k_2} + \cdots + a_{i_s}b_{k_s} + \cdots \qquad (10)$$

برای اثبات تقارب رشتهٔ متناظری که از قدرمطلق‌ها تشکیل شده است:

$$\sum_{s=1}^{\infty}|a_{i_s}b_{k_s}| = |a_{i_1}b_{k_1}| + |a_{i_2}b_{k_2}| + \cdots + |a_{i_s}b_{k_s}| + \cdots \qquad (11)$$

مجموع جزئی sام آن را در نظر می‌گیریم. اگر بزرگترین عدد را در بین اندیس‌های i_1، k_1، i_2، k_2، ...، i_s، k_s، با ν نشان دهیم، در آن‌صورت، بدیهی است

$$|a_{i_1}b_{k_1}| + |a_{i_2}b_{k_2}| + \cdots + |a_{i_s}b_{k_s}| \leqslant (|a_1| + |a_2| + \cdots$$

$$\cdots + |a_\nu|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_\nu|) \leqslant A^*.B^*$$

از این‌جا [۳۶۵] تقارب رشتهٔ (۱۱) و، درنتیجه، تقارب مطلق رشتهٔ (۱۰) نتیجه می‌شود.

می‌ماند تعیین مجموع آن. حق داریم جمله‌های رشتهٔ (۱۰) را، که در این وضع راحت‌تر است، بدهیم، زیرا این رشته، به‌دلیل تقارب مطلق آن، دارای ویژگی جابه‌جائی است [۳۸۷]. با جابه‌جا کردن این جمله‌ها از روی قاعدهٔ مربع‌ها، مثل (۹)، گروه‌های متوالی را، که یک مربع را از دیگری مشخص می‌سازند، جدا می‌کنیم:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) +$$

$$+ (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots \qquad (12)$$

اگر طبق معمول، مجموع‌های جزئی رشته‌های (A) و (B) را با A_n و B_m نشان دهیم، در آن‌صورت، برای رشتهٔ (۱۲)، این مجموع‌های جزئی را خواهیم داشت:

$$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots, A_kB_k, \ldots$$

که به‌سمت حاصل‌ضرب AB میل می‌کنند و به‌این ترتیب، AB، نه‌تنها مجموع رشتهٔ (۱۲)، بلکه مجموع رشتهٔ (۱۰) هم خواهد بود.

درعمل، برای ضرب رشته‌ها، اغلب استفاده از روش قطرها، مثل (۸)، برای جابه‌جا کردن حاصل‌ضرب‌های (۷)، راحت‌تر به‌نظر می‌آید. در این مورد، معمولاً، جمله‌های واقع بر یك قطر را، یکی می‌کنند:

$$AB=a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots \qquad (۱۳)$$

کوشی هم، درست به‌همین صورت، حاصل‌ضرب دو رشته را ارائه کرد. از این به‌بعد، وقتی‌که رشته را به‌این‌صورت نوشته باشند، آن‌را حاصل‌ضرب رشته‌های (A) و (B) به‌شکل کوشی خواهیم نامید.

مثلاً، فرض کنید، دو رشتهٔ توانی درهم ضرب شوند:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_mx^m=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m+\cdots$$

[ضمناً، x در درون بازه‌های تقارب نظیر، واقع است، **۳۷۹**]. آن‌وقت، بدون اشکال فهمیده می‌شود که، این روش، پاسخ‌گوی درآوردن جمله‌های متشابه، در حاصل‌ضرب است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\cdot\sum_{m=0}^{\infty} b_mx^m=$$

$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$

به‌این ترتیب، حاصل‌ضرب دو رشتهٔ توانی در شکل کوشی هم، مستقیماً، به‌صورت توانی درمی‌آید.

۳۹۰. مثال‌ها. در همهٔ مثال‌ها، به‌جز آخری، حاصل‌ضرب رشته‌ها به‌شکل کوشی پیدا شده‌اند.

۱) اگر رشتهٔ

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

را، با این روش، در خودش ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲}=\sum_{۱}^{\infty}nx^{n-۱}=۱+۲x+۳x^۲+\dots+nx^{n-۱}+\dots$$

۲) حاصل‌ضرب رشته‌های

$$\frac{۱}{۱+x}=\sum_{۰}^{\infty}(-۱)^n x^n=۱-x+x^۲-\dots+(-۱)^n x^n+\dots$$

و

$$\sum_{۱}^{\infty}(-۱)^{m-۱}\frac{x^m}{m}=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\dots+(-۱)^m\frac{x^m}{m}+\dots \qquad (۱۴)$$

(که در آن $|x|<۱$)، این نتیجه را می‌دهد:

$$\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^{k-۱}H_k x^k=x-\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)x^۲+\dots$$

$$\dots+(-۱)^{k-۱}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{k}\right)x^k+\dots$$

بعداً [در ۴۰۵] خواهیم دید که مجموع رشتهٔ (۱۴) برابر است با $\ln(۱+x)$، به‌طوری که بسط اخیر، معرف تابع $\dfrac{\ln(۱+x)}{۱+x}$ است.

۳) این عبارت را به‌توان برسانید (z، دلخواه است):

$$\left\{۱+\sum_{\mu=۱}^{\infty}(-۱)^{\mu}\frac{z^{۲\mu}}{۲^{۲\mu}.(\mu!)^۲}\right\}^۲$$

راهنمائی. از رابطهٔ زیر، که اثباتی مقدماتی دارد، استفاده کنید.

$$\sum_{\mu=۰}^{\nu}(C_\nu^\mu)^۲=C_{۲\nu}^{\nu}=\frac{(۲\nu)!}{(\nu!)^۲}$$

پاسخ: $۱+\sum_{\nu=۱}^{\infty}(-۱)^{\nu}\dfrac{(۲\nu!)z^{۲\nu}}{۲^{۲\nu}.(\nu!)^۴}$.

۴) اتحاد [۳۸۵، ۶) را ببینید]

$$\sum_{n=۰}^{\infty}A_n x^n=\frac{۱}{۱-x}\sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^n$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$$(A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

به‌سادگی، و از راه ضرب جمله به‌جمله، ثابت می‌شود.

ضمناً، اگر در بازهٔ $(-R, R)$ $(0 < R \leqslant 1)$، یکی از دو رشتهٔ متقارب باشد، تقارب رشتهٔ دیگر هم، در همان بازه، نتیجه می‌شود.

۵) درستی این اتحاد را ثابت کنید $(a > 0)$:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a+2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^2}{a+4} + \cdots\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left[1 + \frac{a+1}{a+2}x + \frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)}x^2 + \cdots\right]$$

۶) به‌طوری که می‌دانیم [۳۷۸، ۱)، (a)]، رشتهٔ

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

به‌ازای همهٔ مقدار x، متقارب مطلق است. مجموع آن‌را $E(x)$ می‌نامیم.

اگر x را به y تبدیل کنیم، رشته مشابهی با مجموع $E(y)$ به دست می‌آید. حاصل‌ضرب دو رشته به‌شکل کوشی، چنین است:

$$1\cdot\frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!}\cdot\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x^n}{n!}\cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

به‌این ترتیب، برای تابع $E(x)$، که هنوز برای‌ما معلوم نیست، به‌ازای‌مقدارهای حقیقی و غیرمشخص x و y، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$E(x)\cdot y(y) = E(x+y)$$

از همین‌جا می‌توان نتیجه گرفت‌که $E(x)$ یك تابع نمائی است [۴۳۹، ۳)؛ با ۷۵، ۱° مقایسه کنید].

۷) به‌کمك معیار دالامبر، به‌آسانی ثابت می‌شودکه رشته‌های

$$C(x)=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots,$$

$$S(x)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\dots$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای x، متقارب مطلق هستند. با ضرب این رشته‌ها، می‌توان رابطه‌های زیررا اثبات کرد:

$$C(x+y)=C(x)\cdot C(y)-S(x)\cdot S(y)$$

$$S(x+y)=S(x)\cdot C(y)+C(x)\cdot S(y)$$

چون درواقع، $S(x)$ و $C(x)$، چیزی جز $\sin x$ و $\cos x$ نیستند [۴۰۴]، این رابطه‌ها، همان قضیه‌های جمع مربوط به‌این تابع‌هاست.

۸) درپایان، رشتهٔ مثبت زیررا مطالعه می‌کنیم:

$$\zeta(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

که به‌ازای $x>1$ متقارب است [۳۶۵، ۲)]. ومعرف تابع ζ ریمان است. مجذور آن را، به‌کمك ضرب رشته‌ها، محاسبه می‌کنیم.

همهٔ حاصل‌ضرب‌های ممکن

$$\frac{1}{n^x}\cdot\frac{1}{m^x}=\frac{1}{(n\cdot m)^x}$$

را طوری جابه‌جا می‌کنیم که همهٔ جمله‌هایی که دارای یك مخرج $k=n\cdot m$ هستند، در ردیف هم قرارگیرند و، سپس، آن‌ها را یکی می‌کنیم. هر k متناظر با تعدادی جمله‌های برابر با هم است. تعداد این جمله‌ها برابر است با تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد k یعنی $\tau(k)$. به‌این‌ترتیب، داریم:

$$[\zeta(x)]^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau(k)}{k^x}$$

۳۹۱. قضیهٔ کلی در نظریهٔ حد. برای این‌که بحث شمارهٔ بعد و، همچنین، بحث‌های

آینده را ساده‌تر کنیم، قضیه‌ای از نظریهٔ حد را ثابت می‌کنیم که تعمیم وسیع‌تری از قضیهٔ کوشی و شتولتس است [۳۳]. این قضیه، متعلق به تپلیتس (O. Töplitz) است. این قضیه را، با دو روش ثابت خواهیم کرد.

I. فرض کنیم، ضریب‌های t_{nm} $(1 \leqslant m \leqslant n)$ از ماتریس «مثلثی» نامتناهی

$$\begin{array}{l} t_{11} \\ t_{21} \quad t_{22} \\ t_{31} \quad t_{32} \quad t_{33} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t_{n1} \quad t_{n2} \quad t_{n3} \cdots t_{nn} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \qquad (15)$$

با دو شرط زیر سازگار باشند:

(a) عنصرهای واقع در هر ستون دلخواه، به‌سمت صفر میل کنند؛ یعنی به‌ازای $n \to \infty$، $t_{nm} \to 0$ (m، تثبیت شده است).

(b) مجموع قدرمطلق‌های عنصرهای واقع در هر سطر دلخواه، همه، با یک عدد ثابت، کران‌دار باشند:

$$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nn}| \leqslant K \quad (K = \text{const.})$$

آن‌وقت، اگر واریانت $x_n \to 0$، همین وضع برای واریانت

$$x'_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n$$

هم‌که از مقدارهای واریانت اول به‌کمک ضریب‌های ماتریس (۱۵) تشکیل شده است ــ درست است.

اثبات. ازروی $\varepsilon > 0$، چنان m پیدا می‌شود که، به‌ازای $n > m$ داشته باشیم: $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$. به‌ازای این nها، با استفاده از (b) داریم:

$$|x'_n| < |t_{n1}x_1 + \cdots + t_{nm}x_m| + \frac{\varepsilon}{2}$$

چون در این‌جا، m مقدار ثابتی است، با توجه به (a)، چنان $N \geqslant m$ وجود دارد که،

به‌ازای $n>N$، جملهٔ اول سمت راست هم از $\frac{\varepsilon}{۲}$ کوچکتر باشد، که در نتیجه، خواهیم داشت: $|x'_n|<\varepsilon$.

II. فرض کنیم، ضریب‌های t_{nm}، علاوه برشرطهای (a) و (b)، با شرط زیر همسازگار باشند:

$$(B) \qquad {}^{*}T_n=t_{n۱}+t_{n۲}+\cdots+t_{nn}\to ۱ \quad (n\to\infty \text{ به‌ازای})$$

آن‌وقت، اگر واریانت $x_n\to a$ (a — متناهی)، آن‌گاه همچنین

$$x'_n=t_{n۱}x_۱+t_{n۲}x_۲+\cdots+t_{nn}x_n\to a$$

اثبات. عبارت x'_n را، می‌توان چنین نوشت:

$$x'_n=t_{n۱}(x_۱-a)+t_{n۲}(x_۲-a)+\cdots+t_{nn}(x_n-a)+T_n\cdot a$$

که با استفاده ازقضیهٔ I دربارهٔ واریانت $x_n-a\to ۰$، و با اتکای بر (B)، مستقیماً به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۱°. قضیهٔ کوشی [۳۳] را، ازاین‌جا، به‌این ترتیب می‌توان به‌دست آورد که قرار دهیم:

$$t_{n۱}=t_{n۲}=\cdots=t_{nn}=\frac{۱}{n}$$

برقراربودن شرطهای (a)، (b) و (B)، روشن است.

۲°. با حفظ علامت گذاری‌های سابق، به‌قضیهٔ شتولتس [۳۳] برمی‌گردیم. به‌این ترتیب، فرض‌می‌کنیم دو واریانت x_n و y_n داشته باشیم، به‌نحوی که واریانت دوم، به‌طور یکنوا، به‌سمت $+\infty$ میل کند. فرض می‌کنیم که واریانت

$$\frac{x_n-x_{n-۱}}{y_n-y_{n-۱}}\to a$$

$$(n=۱, ۲, ۳, \ldots;\ x_۰=y_۰=۰)$$

وقضیهٔ II را، با فرض $t_{nm}=\dfrac{y_m-y_{m-۱}}{y_n}$، برای آن به‌کار می‌بریم.

برقراری شرطهای (a)، (b) و (B)، به سادگی قابل تحقیق است. آن‌وقت، نتیجه

---

*) درکاربردها، معمولاً $T_n\equiv ۱$.

می‌گیریم که واریانت

$$\frac{x_n}{y_n}=\sum_{n=1}^{n} t_{nm}\frac{x_m-x_{m-1}}{y_m-y_{m-1}}\to a$$

یك رشته از نتیجه‌های مفید دیگر قضیهٔ تپلیتس را می‌آوریم.

۳°. فرض کنیم دو واریانت $x_n\to 0$ و $y_n\to 0$ داده شود و، ضمناً، دومی درشرط زیر صدق کند:

$$|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant K\quad (n=1, 2, 3, \ldots;\ K=\text{const.})$$

آن‌وقت، برای واریانت زیرهم داریم:

$$z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1\to 0$$

که درواقع، کاربرد ساده‌ای است ازقضیهٔ I به‌ازای $t_{nm}=y_{n-m+1}$.

۴°. اگر واریانت $x_n\to a$ و واریانت $y_n\to b$، در آن صورت برای واریانت زیر داریم:

$$z_n=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}\to ab$$

ابتدا حالت $a=0$ را درنظرمی‌گیریم که، در آن‌صورت، باید ثابت کنیم: $z_n\to 0$؛ که اگر درنتیجهٔ ۳°، y_n را با $\frac{y_n}{n}$ عوض کنیم، به‌سادگی به‌دست می‌آید. شرطی که در آن‌جا، برای y_n داشتیم، با درنظرگرفتن این‌که y_n کران‌دار است: $|y_n|\leqslant K$، به‌سادگی قابل تحقیق است.

به‌حالت کلی برمی‌گردیم و z_n را این‌طور می‌نویسیم:

$$z_n=\frac{(x_1-a)y_n+(x_2-a)y_{n-1}+\cdots+(x_n-a)y_1}{n}+$$

$$+a\cdot\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

جملهٔ اول سمت راست، با توجه به آن‌چه هم‌اکنون ثابت کردیم، به‌سمت صفرمیل می‌کند. جملهٔ دوم‌هم، به‌سمت ab میل می‌کند، زیرا ضریب a، باتوجه به‌قضیهٔ کوشی (۱°)، دارای حد b است.

۵°. اگر $x_n\to a$، در آن صورت

$$x'_n=\frac{۱۰x_۰+C_n^۱x_۱+C_n^۲x_۲+\cdots+C_n^nx_n}{۲^n}\to a^*$$

از قضیهٔ II، بااین فرض استفاده می‌کنیم که

$$t_{nm}=\frac{C_n^m}{۲^n}$$

چون $C_n^m<n^m$ و $\frac{n^m}{۲^n}\to ۰$ [۳۲، ۹])، پس شرط (a) برقرار است. برقراری‌شرط‌های (b) و (B)، مستقیماً و ازاین‌جا ناشی می‌شود که داریم:

$$\sum_{m=۰}^{\infty}C_n^m=۲^n$$

۶°. اگر $x_n\to a$ و $z=\text{const}\cdot(z>۰)$، در آن صورت داریم:

$$x'_n=\frac{۱۰x_۰+C_n^۱z\cdot x_۱+C_n^۲z^۲\cdot x^۲+\cdots+C_n^nz^n\cdot x_n}{(۱+z)^n}\to a$$

این، تعمیم ساده‌ای ازحکم قبلی است ومشابه آن ثابت می‌شود. ضریب‌ها را به‌ردیف عکس هم می‌توان قرارداد، به‌نحوی که

$$x''_n=\frac{z^n\cdot x_۰+C_n^۱z^{n-۱}\cdot x_۱+C_n^۲z^{n-۲}\cdot x_۲+\cdots+۱۰x_n}{(۱+z)^n}$$

۳۹۲. قضیه‌های بعدی‌مربوط به‌ضرب رشته‌ها. همان‌طور که‌مرتنس(F. Mertens) ثابت کرده است. می‌توان نتیجه کوشی را، به‌صورت کلی‌تری گسترش داد.

قضیهٔ مرتنس. اگر رشته‌های (A) و (B) متقارب و، دست‌کم، یکی ازآن‌ها متقارب مطلق باشد، درآن صورت، بسط (۱۳) درست است.

اثبات. فرض می‌کنیم، مثلا، رشتهٔ (A) متقارب مطلق، یعنی رشتهٔ (A^*) متقارب باشد جمله‌های قطر nام را، یکی می‌کنیم و قرار می‌گذاریم:

$$c_n=a_۱b_n+a_۲b_{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}b_۲+a_nb$$

و

---

*) روشن است، این‌که شماره‌گذاری مقدارهای واریانت را، به‌جای ۱، از ۰ آغاز کرده‌ایم، مطلب چندان مهمی نیست.

$$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

به‌طوری که باید ثابت کرد: $C_n \to AB$.

قبل ازهمه، به‌سادگی دیده می‌شود که

$$C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_{n-1} B_2 + a_n B_1 \qquad (16)$$

اگر فرض کنیم $B_m = B - \beta_m$ (که در آن، باقی‌مانده β_m، به‌ازای $m \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند)، مجموع C_n را می‌توان این‌طور نوشت:

$$C_n = A_n B - \gamma_n \qquad (\gamma_n = a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_2 + a_n\beta_1)$$

چون $A_n \to A$، بنابراین، مساله به‌اثبات رابطهٔ $\gamma_n = 0$ حد منجر می‌شود.

ولی این حکم، مستقیماً از ۳۹۱.۳° (به‌ازای $x_n = \beta_n$ و $y_n = a_n$) نتیجه می‌شود، با این شرط که درنظر بگیریم:

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leqslant A^*$$

که در آن، A^* عبارت است ازمجموع رشتهٔ $(|A|)^*$، که بنابه‌فرض متقارب است.

به‌عنوان مثالی از کاربرد قضیه، به‌مسألهٔ ۴) شمارهٔ ۳۹۰ برمی‌گردیم. حالا می‌بینیم که برابری مذکور در آن‌جا، ضمناً در دوانتهای $x = \pm R$، بازهٔ تقارب رشتهٔ $\sum_0^\infty a_n x^n$، محقق‌است، به‌شرطی که $R < 1$ و رشته دراین‌انتها، متقارب باشد (ولو متقارب‌غیرمطلق).

توجه کنیم، اگر هردو رشتهٔ (A) و (B)، تنها متقارب غیرمطلق باشند، نمی‌توان تقارب رشتهٔ (۱۳) را تضمین کرد. به‌عنوان نمونه، ضرب رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

(که می‌دانیم متقارب غیرمطلق است [۳۸۲، ۲)]) را درخودش، آزمایش می‌کنیم. در این حالت داریم:

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{i}\cdot\sqrt{n-i+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right)$$

چون هرجملهٔ داخل پرانتز از $\frac{1}{n}$ بزرگتراست، پس $|c_n| > 1$ (به‌ازای $n > 1$) و رشتهٔ

$\sum_{1}^{\infty} c_n$ متباعد است [۳۶۴، ۵°].

ولی اگر با رشتهٔ متقارب غیرمطلق زیر [۳۸۲، ۱)]، به‌همین‌ترتیب عمل کنیم:

$$\ln ۲ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-1}}{n} = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \cdots + (-۱)^{n-1}\frac{۱}{n} + \cdots$$

معلوم می‌شود که

$$c_n = (-۱)^{n-1}\left[\frac{۱}{۱\cdot n} + \frac{۱}{۲\cdot(n-۱)} + \cdots + \frac{۱}{i\cdot(n-i+۱)} + \cdots + \frac{۱}{n\cdot ۱}\right] =$$

$$= (-۱)^{n-1}\frac{۲}{n+۱}\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n}\right)$$

دراین‌جا، با ترقی n، $|c_n|$ به‌طور نزولی یکنوا، به‌سمت صفرمیل می‌کند، به‌طوری‌که [بنا به‌قضیهٔ لایب‌نیتس، ۳۸۱]، رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty} c_n$ متقارب است. مجموع آن چطور؟ آیا برابر $(\ln ۲)^{۲}$ است؟ قضیهٔ زیر، به‌این پرسش پاسخ می‌دهد.

قضیهٔ آبل. اگر برای دورشتهٔ متقارب (A) و(B)، حاصل‌ضرب آن‌ها به‌شکل کوشی، متقارب باشد، درآن صورت، مجموع آن، الزاماً، برابر AB، است.

اثبات. با حفظ نمادهای قبلی، از (۱۴) به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$C_۱ + C_۲ + \cdots + C_n = A_۱B_n + A_۲B_{n-۱} + \cdots + A_nB_۱$$

این برابری را جمله به‌جمله بر n تقسیم می‌کنیم و، به‌ازای $n \to \infty$، به‌سمت حدمی‌رویم. چون $C_n \to C$. ازروی قضیهٔ کوشی [۳۳ وهمچنین ۳۹۱. ۱° را ببینید]، برای واسطهٔ حسابی آن‌ها هم داریم:

$$\frac{C_۱ + C_۲ + \cdots + C_n}{n} \to C$$

ازطرف دیگر، بنابر ۳۹۱، ۴° (اگر درآن‌جا $x_n = A_n$ و $y_n = B_n$ بگذاریم):

$$\frac{A_۱B_n + A_۲B_{n-۱} + \cdots + A_nB_۱}{n} \to AB$$

ازآن‌جا $C = AB$، آن‌چه لازم به‌اثبات بود.

§۵. رشته‌های دوگانه و تکراری

۳۹۳. رشته‌های تکراری. مجموعهٔ نامتناهی عددهای

$$a_i^{(k)} \quad (i = ۱, ۲, ۳, \ldots; k = ۱, ۲, ۳, \ldots)$$

وابسته به‌دو عدد طبیعی را درنظر می‌گیریم. آن را، به صورت تنظیمی از یك ماتریس مستطیلی نامتناهی تصور می‌کنیم:

$$\begin{array}{llll} a_۱^{(۱)} & a_۲^{(۱)} & a_۳^{(۱)} \ldots a_i^{(۱)} & \ldots \\ a_۱^{(۲)} & a_۲^{(۲)} & a_۳^{(۲)} \ldots a_i^{(۲)} & \ldots \\ a_۱^{(۳)} & a_۲^{(۳)} & a_۳^{(۳)} \ldots a_i^{(۳)} & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ a_۱^{(k)} & a_۲^{(k)} & a_۳^{(k)} \ldots a_i^{(k)} & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \end{array} \qquad (۱)$$

این ماتریس را، ماتریس مستطیلی نامتناهی، با دو ورودی می‌نامند.

اکنون به‌مفهوم رشتهٔ تکراری، که به‌ماتریس به‌صورت (۱) مربوط‌است، می‌پردازیم.

اگر در ماتریس مستطیلی نامتناهی، هرسطر را، به‌طور جداگانه، جمع کنیم، دنبالهٔ نامتناهی رشته‌های به‌صورت زیررا به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{(k)} \qquad (۲)$$

اگر دوباره، این دنباله را، به‌صورت مجموع درآوریم، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \sum_{i=۱}^{\infty} a_i^{(k)} \qquad (۳)$$

این نماد را،رشتهٔ تکراری گویند. اگرسطرها را با ستون‌ها عوض‌کنیم، یعنی اگرجمله‌های ماتریس نامتناهی را، از روی ستون‌ها جمع کنیم، آن‌گاه، رشتهٔ تکراری دوم به دست می‌آید:

$$\sum_{i=۱}^{\infty} \sum_{k=۱}^{\infty} a_i^{(k)} \qquad (۴)$$

رشتهٔ تکراری (۳) را وقتی متقاربگویند که، اولا همهٔرشته‌های سطری (۲) متقارب

باشند (مجموع‌های آن‌ها را، به‌ترتیب، با $A^{(k)}$ نشان می‌دهیم.) ثانیاً، رشتهٔ

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$$

متقارب باشد، که مجموع آن، همان مجموع رشتهٔ تکراری (۳) می‌شود. همهٔ این‌ها را، برای رشتهٔ (۴) هم می‌توان گفت.

عنصرهای ماتریس (۱) را، باروش‌های‌مختلفی، می‌توان به‌صورت یك‌دنبالهٔ‌معمولی درآورد:

$$u_1, u_2, \dots, u_r, \dots \qquad (۵)$$

و ازروی‌آن، رشتهٔ سادهٔ زیررا تشکیل داد:

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r \qquad (۶)$$

[ما قبلاً دراین‌باره، درارتباط باماتریس ویژه (۷) شمارهٔ **۳۸۹** صحبت کرده‌ایم]. برعکس، اگر دنبالهٔ معمولی (۵) را داشته باشیم، با تقسیم همهٔ جمله‌های آن (بدون توجه به‌وضع قرارگرفتن آن‌ها) به‌مجموعهٔ نامتناهی گروه‌های نامتناهی، می‌توان آن را، به‌طریق‌های گوناگون، به‌صورت ماتریس‌های با دو ورودی (۱) درآورد و، سپس، ازروی این ماتریس، رشتهٔ تکراری (۳) را تشکیل داد. به‌طور طبیعی، این پرسش پیش می‌آیدکه بین رشته‌های (۶) و (۳)ـ که ازجمله‌های یکسان تشکیل شده‌اندـ چه ارتباطی وجود دارد؟

قضیهٔ ۱. اگر رشتهٔ (۶) به سمت مجموع U، به طور مطلق متقارب باشد، در آن صورت، هرطورکه جمله‌های آن به‌صورت ماتریس (۱) قرارگرفته باشند، رشتهٔ تکراری (۳) نیز متقارب و، ضمناً، دارای همان مجموع است.

اثبات. رشتهٔ

$$\sum_{r=1}^{\infty} |u_r| \qquad (۶^*)$$

بنابه‌فرض متقارب است، مجموع آن را U^* می‌نامیم.

آن‌وقت، قبل از هرچیز، برای هر n و k داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i^{(k)}| \leqslant U^*$$

از این‌جا، تقارب رشتهٔ $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^{(k)}|$ نتیجه می‌شود [۳۶۵]، یعنی رشتهٔ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ هم، به ازای

k دلخواه، متقارب می‌شود [۳۷۷].

سپس، به‌ازای $\varepsilon>0$ دلخواه، چنان r_0 پیدا می‌شود که داشته باشیم:

$$\sum_{r=r_0+1}^{\infty}|u_r|<\varepsilon \qquad (۷)$$

درنتیجه، به‌طور مسلم داریم:

$$\left|\sum_{r=r_0+1}^{\infty}u_r\right|=\left|U-\sum_{r=1}^{r_0}u_r\right|<\varepsilon \qquad (۸)$$

جمله‌های u_1، u_2، ...، u_r رشتهٔ (۶)، در n سطر اول و در m ستون اول ماتریس (۱) واقع‌اند، درصورتی‌که n و m به‌قدرکافی بزرگ باشند و مثلاً $n>n_0$ و $m>m_0$، آن‌وقت، برای n و m مفروض، عبارت

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_i^{(k)}-\sum_{r=1}^{r_0}u_r$$

مجموع گروه‌های جمله‌های u_r، با شمارهٔ بزرگتر از r_0، و با توجه به (۷)، از لحاظ قدر مطلق، کوچکتر از ε است. باگذر به‌حد، به‌ازای $m\to\infty$ (برای $n>n_0$) نتیجه می‌شود:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}A^{(k)}-\sum_{r=1}^{r_0}u_r\right|\leqslant\varepsilon$$

به‌نحوی که، درارتباط با (۸)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}A^{(k)}-U\right|<2\varepsilon$$

که از آن‌جا، تقارب رشتهٔ تکراری (۳)، به‌خصوص با مجموع U، نتیجه می‌شود.

یادداشت. ممکن است، بعضی سطرهای ماتریس (۱)، از تعداد محدودی جمله‌ها، تشکیل شده باشند، نتیجه را، برای این حالت هم، می‌توان به‌سادگی گسترش داد.

اگر به‌یاد بیاوریم که در ۳۸۶، جمله‌های رشتهٔ ساده را، بدون خراب کردن وضع قرارگرفتن آن‌ها، به‌گروه‌های متناهی تقسیم کردیم، روشن می‌شود که، قضیهٔ ۱، ویژگی شرکت‌پذیری وجابه‌جائی رشتهٔ متقارب مطلق را (با هم)، به‌صورت گسترده‌تری تنظیم می‌کند.

قضیهٔ عکس، تنها با شرطهای تازه‌ای دربارهٔ رفتار رشته، درست است.

قضیهٔ ۲. رشتهٔ تکراری (۳) را در نظرمی‌گیریم. اگر جمله‌های آن را، با قدرمطلق آن‌ها عوض کنیم و یک رشتهٔ متقارب به‌دست آوریم، آن‌وقت، نه تنها رشتهٔ (۳)، بلکه رشتهٔ

سادهٔ (۶) هم،که ازهمان جمله‌های رشتهٔ (۳) وبا ترتیب دلخواه تشکیل شده است،متقارب می‌شود و، ضمناً، با همان مجموع.

اثبات. بنابه‌فرض، رشتهٔ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_i^{(k)}|$$

متقارب است. فرض می‌کنیم، مجموع آن برابر A^* باشد. به‌ازای n و m دلخواه داریم:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|a_i^{(k)}|<A^* \qquad (۹)$$

حالا، مجموع جزئی دلخواه رشتهٔ (*۶) را انتخاب می‌کنیم:

$$U_r^*=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_r|$$

به‌ازای n و m به‌قدر کافی بزرگ، جمله‌های u_1، u_2، ...، u_r در n سطراول و در m ستون اول ماتریس (۱) واقع خواهند بود. آن‌گاه، از (۹) نتیجه می‌شود:

$$U_r^*<A^*$$

ورشتهٔ (۹) متقارب، یعنی رشتهٔ (۶) متقارب مطلق می‌شود.

می‌ماندکه قضیهٔ ۱ را به‌کاربریم:

چون، هرچه دربارهٔ رشتهٔ (۳) گفتیم، به‌روشنی، برای رشتهٔ تکراری (۴) هم درست است، می‌توان گزارهٔ زیررا، به‌عنوان نتیجه‌ای ازقضیهٔ بالا،آورد (که اغلب می‌تواندمفید واقع شود).*

قضیهٔ ۳. ماتریس (۱) را درنظر می‌گیریم. اگر به‌ازای تعویض جمله‌های رشتهٔ (۳) با قدرمطلق‌های آن‌ها، رشته‌ای متقارب به‌دست آید، درآن صورت، هردو رشتهٔ تکراری (۳) و (۴) متقارب می‌شوند و دارای همان مجموع می‌باشند.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

۳۹۴. رشتهٔ دوگانه. مفهوم رشتهٔ دوگانه هم ، با ماتریس مستطیلی نامتناهی مربوط است:

$$a_1^{(1)}+a_2^{(1)}+a_3^{(1)}+\cdots+a_i^{(1)}+\cdots$$
$$+a_1^{(2)}+a_2^{(2)}+a_3^{(2)}+\cdots+a_i^{(2)}+\cdots$$

---

*) درادبیات آلمانی، این‌گزاره را «grosser Umordnungssatz» می‌نامند.

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_1^{(k)}+a_2^{(k)}+a_3^{(k)}+\cdots+a_i^{(k)}+\cdots$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots=\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)} \qquad (10)$$

با اکتفا به m ستون و n سطر اول، مجموع متناهی زیر را، که مجموع جزئی رشتهٔ مفروض نامیده می‌شود، در نظر می‌گیریم:

$$A_m^{(n)}=\sum_{i,k=1}^{i=m,k=n}a_i^{(k)}$$

عددهای m و n را، هم‌زمان ومستقل از یکدیگر، بزرگ می‌کنیم وبه‌سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم. حد (متناهی یا نامتناهی)

$$A=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}A_m^{(n)}$$

را، مجموع رشتهٔ دوگانه می‌نامند ومی‌نویسند:

$$A=\sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

اگر رشتهٔ (۱۰) دارای مجموع متناهی باشد، آن را متقارب و، درحالت خلاف، متباعد گویند.

به‌عنوان مثال، به‌ماتریس (۷) بند قبل برمی‌گردیم که جملهٔ عمومی آن چنین بود:

$$c_i^{(k)}=a_ib_k$$

دراین حالت، مجموع جزئی (با حفظ نشانه‌های قبلی)، به‌روشنی، برابراست با

$$C_m^{(n)}=A_mB_n$$

به‌نحوی که، رشتهٔ دوگانهٔ نظیرماتریس نامبرده، همیشه متقارب و دارای مجموع زیراست:

$$C=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}A_mB_n=AB^*$$

---

*) به‌این ترتیب، اگرحاصل‌ضرب دو رشتهٔ‌سادهٔ متقارب را به‌صورت یک رشتهٔ دوگانه درنظر بگیریم، مجموع رشتهٔ اخیر، همیشه برابر با حاصل‌ضرب AB خواهد بود؛ دشواری وقتی پیش می‌آید که بخواهیم همین حکم را درمورد حاصل‌ضرب رشته‌ها، به‌صورت یک رشتهٔ ساده، ثابت کنیم.

قضیه‌های [۳۶۴، ۳° و ۴°] مربوط به‌ضرب جمله‌های رشتهٔ متقارب در عدد ثابت، و جمع و تفریق جمله به‌جملهٔ دو رشتهٔ متقارب را، به‌سادگی، می‌توان در مورد رشته‌های دوگانه هم به‌کار برد که، انجام آن‌را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

همچنین، برای تقارب رشته‌های دوگانه، میل جملهٔ عمومی به سمت صفر، ضرورت دارد:

$$\lim_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}} a_i^{(k)} = 0$$

[با ۳۶۴، ۵° مقایسه کنید]. این مطلب‌را می‌توان، به‌سادگی و بلافاصله، از رابطهٔ زیر نتیجه گرفت:

$$a_i^{(k)} = A_i^{(k)} - A_{i-1}^{(k)} - A_i^{(k-1)} + A_{i-1}^{(k-1)}$$

طبیعی است به‌فکر مقایسهٔ رشتهٔ دوگانهٔ (۱۰) با رشته‌های تکراری (۳) و (۴)ـ که در بالا بررسی کردیم ـ بیفتیم. چون داریم:

$$A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)}\right\}$$

بنابراین، اگر n را تثبیت کنیم و، به‌ازای $m \to \infty$، به‌سمت حد عبور کنیم (با این‌فرض که، رشته‌های سطرها متقاربند)، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{m\to\infty} A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}$$

حالا، معلوم می‌شود که رشتهٔ تکراری (۳)، چیزی جز حد تکراری زیر نیست:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} A_m^{(n)}$$

مسألهٔ مربوط به‌برابری مجموع دو رشتهٔ تکراری (۳) و (۴) هم، به‌صورت حالت‌خاصی از مسألهٔ مربوط به‌برابری دو حد تکراری درمی‌آید.

اگر قضیهٔ شمارهٔ **۱۶۸** مربوط به‌حدهای دوگانه و تکراری را، در مورد حالت موردنظر به‌کار بریم، به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم*:

قضیهٔ ۴. اگر ۱) رشتهٔ دوگانهٔ (۱۰) متقارب باشد و ۲) همهٔ رشته‌ها در سطرها متقارب باشند، درآن صورت رشتهٔ تکراری (۳) متقارب می‌شود ودارای همان مجموع رشتهٔ

---

*) دراین‌جا، m و n درنقش متغیرهای مستقل و مجموع جزئی $A_m^{(n)}$ درنقش تابعی از آن‌هاست.

دوگانه است.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$$

قضیهٔ مشابهی هم، برای رشتهٔ تکراری دوم (۴) وجود دارد.

مسألهٔ مربوط به‌تقارب رشتهٔ دوگانهٔ (۱۰)، برای‌حالت رشته‌های‌مثبت، یعنی‌رشته‌های با جمله‌های نامنفی $a_i^{(k)} \geqslant 0$، به‌طور ساده، حل می‌شود.

قضیهٔ ۵. برای‌تقارب‌رشتهٔ (۱۰)، اگر $a_i^{(k)} \geqslant 0$ باشد،لازم‌وکافی‌است‌که‌مجموع‌های جزئی آن کران‌دار باشند.

اثبات. لازم بودن شرط روشن است و تنها، به‌اثبات کافی بودن آن می‌پردازیم. فرض‌کنیم $A_m^{(n)} \leqslant L$. مرز بالای مجموعهٔ مجموع‌های $A_m^{(n)}$ را در نظر می‌گیریم:

$$A = \sup\{A_m^{(n)}\}$$

و ثابت می‌کنیم‌که همین مرز، عبارت است از مجموع رشتهٔ ما.

$\varepsilon > 0$ دلخواه را انتخاب می‌کنیم. از روی‌تعریف مرز بالا، می‌توان‌مجموع‌جزئی $A_{m_0}^{(n_0)}$ را پیدا کرد‌که، برای آن، داشته باشیم:

$$A_{m_0}^{(n_0)} > A - \varepsilon$$

اگر $m > m_0$ و $n > n_0$ اختیار شود، در آن‌صورت، به‌طور مسلم داریم:

$$A_m^{(n)} > A - \varepsilon$$

زیرا، بدیهی است‌که $A_m^{(n)}$، با ترقی دو اندیس n و m، ترقی می‌کند.

از آن‌جاکه هر مجموع جزئی، از A تجاوز نمی‌کند، می‌توان نوشت:

$$|A_m^{(n)} - A| < \varepsilon \quad (n > n_0, m > m_0)$$

و این به‌معنای آن‌است‌که

$$A = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} A_m^{(n)}$$

یعنی، رشتهٔ (۱۰) متقارب است.

براساس این قضیه، می‌توان قضیهٔ مربوط به‌مقایسهٔ رشته‌های دوگانهٔ مثبت را، که با قضیهٔ ۱ شمارهٔ **۳۶۶** شباهت دارد، ثابت‌کرد، که ما آن‌را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اکنون، به‌بررسی رشته‌های دوگانه‌ای می‌پردازیم‌که ازماتریسی تشکیل‌شده‌باشدکه

همهٔ عضوهای آن، مثبت نباشند. بدیهی است، همچون حالت رشته‌های ساده، می‌توانیم حالت‌هایی را کنار بگذاریم که، در آن‌ها، همهٔ عضوهای ماتریس منفی و یا، تنها تعدادی متناهی از عضوهای آن، مثبت یا منفی باشند؛ زیرا همهٔ این حالت‌ها، مستقیماً به‌حالتی که هم‌اکنون موردبررسی قرار دادیم، منجر می‌شوند. بنابراین، فرض می‌کنیم که هم‌عضوهای منفی وهم‌عضوهای مثبت در ماتریس (۱)، یعنی در رشتهٔ (۱۰)، مجموعه‌هایی نامتناهی را تشکیل دهند.

به‌جز ماتریس (۱)، ماتریس قدرمطلق عضوها را هم، درست می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \left|a_1^{(1)}\right| \quad \left|a_2^{(1)}\right| \cdots \left|a_i^{(1)}\right| \cdots \\ \left|a_1^{(2)}\right| \quad \left|a_2^{(2)}\right| \cdots \left|a_i^{(2)}\right| \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left|a_1^{(k)}\right| \quad \left|a_2^{(k)}\right| \cdots \left|a_i^{(k)}\right| \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \rightarrow$$

و از روی این ماتریس، رشتهٔ دوگانهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right| \qquad (10^*)$$

شبیه قضیهٔ شمارهٔ ۳۷۷، دربارهٔ رشته‌های ساده، در این‌جا هم داریم:

قضیهٔ ۶. اگر رشتهٔ (۱۰*)، که از قدرمطلق‌های جمله‌های رشتهٔ مفروض (۱۰) تشکیل شده است، متقارب باشد، در آن‌صورت، رشتهٔ مفروض هم متقارب است.

اثبات. $a_i^{(k)}$ را به‌صورت

$$a_i^{(k)} = p_i^{(k)} - q_i^{(k)}$$

در می‌آوریم که، در آن، داریم:

$$p_i^{(k)} = \frac{\left|a_i^{(k)}\right| + a_i^{(k)}}{2}, \quad q_i^{(k)} = \frac{\left|a_i^{(k)}\right| - a_i^{(k)}}{2}$$

چون $p_i^{(k)} \leqslant \left|a_i^{(k)}\right|$ و $q_i^{(k)} \leqslant \left|a_i^{(k)}\right|$، بنابراین، از تقارب رشتهٔ دوگانهٔ (۱۰*)، تقارب رشته‌های دوگانهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} p_i^{(k)} = P, \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} q_i^{(k)} = Q$$

ولی، در این‌صورت، رشتهٔ

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \equiv \sum_{i,k=1}^{\infty} (p_i^{(k)} - q_i^{(k)})$$

هم متقارب می‌شود و مجموع آن چنین است:

$$A = P - Q$$

اگر هم رشتهٔ (۱۰) و هم رشتهٔ (*۱۰) متقارب باشند، رشتهٔ (۱۰) را متقارب مطلق گویند؛ ولی اگر رشتهٔ (۱۰) متقارب و رشتهٔ (*۱۰) متباعد باشد، رشتهٔ (۱۰) را متقارب غیرمطلق گویند.

حالا به‌قضیه‌ای می‌پردازیم که ارتباط بین رشتهٔ دوگانهٔ (۱۰) و رشتهٔ سادهٔ (۶) را ــ که از همان جمله‌ها تشکیل شده است ــ نشان می‌دهد. این قضیه، شبیه قضیه‌های ۱ و ۲ است.

قضیهٔ ۷. رشتهٔ دوگانهٔ (۱۰) و رشتهٔ سادهٔ (۶) ــ شامل همان جمله‌ها ــ را درنظر می‌گیریم. آن‌وقت، تقارب مطلق یکی از آن‌ها، تقارب مطلق دیگری و، ضمناً، برابری مجموع آن‌ها را، ایجاب می‌کند.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم، رشتهٔ دوگانهٔ (۱۰) متقارب مطلق، یعنی رشتهٔ (*۱۰) متقارب باشد. مجموع رشتهٔ اخیر را با A^* نشان می‌دهیم. با اختیار عدد طبیعی و دلخواه r، مجموع جزئی رشتهٔ (*۶) را تشکیل می‌دهیم:

$$U_r^* = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r|$$

شبیه اثبات قضیهٔ ۲، نابرابری $U_r^* < A^*$، به‌سادگی، ثابت می‌شود و، همراه با آن، رشتهٔ (۶) متقارب می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم، رشتهٔ سادهٔ (۶) متقارب مطلق، یعنی رشتهٔ (*۶) متقارب باشد، مجموع آن‌را U^* می‌نامیم. مجموع جزئی

$$A_m^{*(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} [a_i^{(k)}]$$

از رشتهٔ (*۱۰) هر چه باشد، می‌توان r را آن‌قدر بزرگ گرفت که همهٔ جمله‌های این مجموع، بین r جملهٔ اول رشتهٔ (*۶) واقع باشند، به‌طوری که

$$A_m^{*(n)} < U^*$$

در این‌صورت، باتوجه به‌قضیهٔ ۵، رشتهٔ دوگانهٔ (*۱۰) متقارب، یعنی رشتهٔ (۱۰) متقارب

مطلق می‌شود.

بالاخره، برای محاسبهٔ مجموع U از رشتهٔ (۶) ــ با توجه به‌تقارب مطلق آن ــ می‌توان جمله‌های آن‌را، در ترتیب دلخواهی، که برای این منظور راحت‌تر است، قرار داد [۳۸۷]. ما این‌جمله‌ها را از روی‌مربع طرح (۱) منظم می‌کنیم؛ اگر ضمناً،جمله‌های هر مربع را جدا از مربع بعدی با هم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$U=\lim_{n\to\infty} A_n^{(n)}=A$$

که اثبات هم انجام می‌پذیرد.

اگر قضیه‌های ۱، ۲ و ۷ را با هم مقایسه کنیم، می‌توان نتیجه را به‌این ترتیب‌تنظیم کرد:

نتیجه. فرض کنیم، ماتریس (۱) و دنبالهٔ (۵)، از جمله‌های یکسانی تشکیل شده باشند، آن‌گاه رشتهٔ دوگانهٔ (۱۰) و رشته‌های‌تکراری (۳) و (۴) و، بالاخره، رشتهٔ‌سادهٔ (۶) ــ به‌شرطی که دست‌کم یکی از آن‌ها، با تبدیل جمله‌هایش به‌قدرمطلق‌های آن‌ها متقارب باشد ــ هر چهار تا متقارب می‌شوند و مجموعی برابر دارند.

روشن است که، در حالت رشته‌های مثبت (یعنی به‌ازای $a_i^{(k)}\geqslant 0$)، کافی است‌یکی از این‌چهار رشته متقارب باشد، تااین‌که بقیه‌هم متقارب شوند و، ضمناً، باهمان‌مجموع.

۳۹۵. مثال‌ها. ۱) ماتریس زیر، مثال جالبی به‌دست می‌دهد ($0<x<1$):

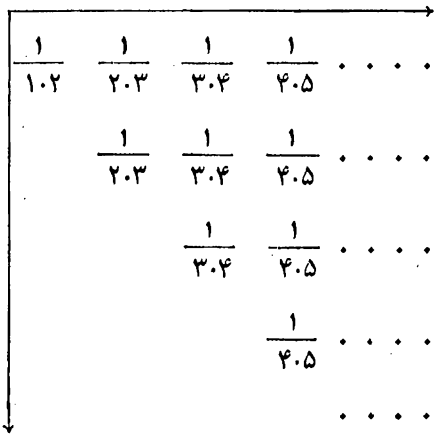
x	$-x^2$	x^2	$-x^3$	x^3	...
$x(1-x)$	$-x^2(1-x^2)$	$x^2(1-x^2)$	$-x^3(1-x^3)$	$x^3(1-x^3)$	...
$x(1-x)^2$	$-x^2(1-x^2)^2$	$x^2(1-x^2)^2$	$-x^3(1-x^3)^2$	$x^3(1-x^3)^2$	...
. . . . .					

در این‌جا، رشته‌های سطرها، متقارب مطلق هستند و مجموع‌های آن‌ها، به‌ترتیب، برابر است با x، $x(1-x)$، $x(1-x)^2$، ... رشتهٔ شامل این مجموع‌ها هم، متقارب مطلق است و مجموعی برابر ۱ دارد. ضمناً دیگر رشته‌های تکراری متقارب نیستند، زیرا مجموع رشته‌های مربوط به‌ستون‌ها، یك در میان، برابر $+1$ و -1 می‌شود.

این‌واقعیت، به‌هیچ‌وجه، قضیهٔ ۲ را نقض نمی‌کند، زیرا برای ماتریس‌قدرمطلق‌ها، حتی یکی از رشته‌های تکراری، متقارب نمی‌شود. می‌بینیم که، حتی فرض تقارب مطلق رشته‌های مربوط به‌سطرها (ویا ستون‌ها) وتقارب‌مطلق رشته‌های تشکیل‌شده ازمجموع‌های

آن‌ها هم نمی‌تواند شرط مربوط به‌تقارب رشته‌های تکراری‌را برای ماتریس‌قدرمطلق‌ها، تغییر دهد.

۲) «پارادوکس یوهان برنولی» را، که معروف است، می‌آوریم. ماتریس‌مثبت‌زیر را در نظر می‌گیریم (جمله‌های دور دست را، می‌توان صفر گرفت):



و مجموع دو رشتهٔ تکراری نظیر آن را، برابر قرار می‌دهیم. اگر ابتدا، برحسب سطرها جمع کنیم، درآن‌صورت، مجموع‌های [با ۲۵، ۹) مقایسه کنید] ۱، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$، ... به‌دست می‌آیدکه، از آن‌ها، رشتهٔ توافقی تشکیل می‌شود؛ مجموع آن‌را s می‌نامیم. با جمع کردن از روی ستون‌ها (تعداد جمله‌های هر ستون متناهی است!) به‌نتیجه‌های $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$، ... می‌رسیم که، از آن‌ها، رشتهٔ توافقی، بدون جملهٔ اول، تشکیل می‌شود؛ و مجموع آن، برابر است با $s-1$ و بنابراین: $s=s-1$.

ولی روشن است که وجود این «پارادوکس»، تنها به‌معنای اثبات این واقعیت‌است که، مجموع s نمی‌تواند متناهی باشد، یعنی رشتهٔ توافقی متباعد است (اثبات، با برهان خلف!)

۳) فرض کنیم، q همهٔ توان‌های با پایه‌ها و نماهای طبیعی (بزرگتر از واحد) و ضمناً، هرکدام را یك‌بار، بپیماید. ثابت کنید:

$$G=\sum_{q}\frac{1}{1-q}=1$$

[خ. گولدباخ (Ch.Goldbach)].

اگر m، همهٔ مقدارهای طبیعی (بزرگتر از واحد) را، که توان نیستند، اختیار کند، داریم:

$$G=\sum_m\frac{1}{m^2-1}+\sum_m\frac{1}{m^3-1}+\dots=\sum_m\left\{\frac{1}{m^2-1}+\frac{1}{m^3-1}+\dots\right\}=$$

$$=\sum_m\left\{\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^4}+\frac{1}{m^6}+\dots\right)+\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^6}+\frac{1}{m^9}+\dots\right)+\dots\right\}=$$

$$=\sum_m\left\{\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\dots\right)+\left(\frac{1}{m^4}+\frac{1}{m^6}+\dots\right)+\left(\frac{1}{m^6}+\frac{1}{m^9}+\dots\right)+\dots\right\}=$$

$$=\sum_m\left\{\frac{1}{m(m-1)}+\frac{1}{m^2(m^2-1)}+\frac{1}{m^3(m^3-1)}+\dots\right\}$$

و از آن‌جا

$$G=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$$

که در آن، n همهٔ مقدارهای طبیعی را، با آغاز از ۲، می‌پیماید، به‌طوری که، در واقع: $G=1$ [۹، ۳۵].

[تفصیل استدلال را، با استناد به قضیه‌هائی که ثابت کرده‌ایم، به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم].

مقایسهٔ این نتیجه، با نتیجهٔ شتاینر (J. Steiner) جالب است:

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m^k}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}=1$$

(در این‌جا، توان‌ها می‌توانند بیش از یک‌بار ظاهر شوند).

۴) ماتریس با جملهٔ عمومی $a_i^{(k)}$ را در نظر می‌گیریم:

$$a_i^{(k)}=\frac{(k-1)!}{i(i+1)\dots(i+k)}=\frac{(i-1)!}{k(k+1)\dots(k+i)}$$

با استفاده از رابطهٔ زیر، که در ۳۶۳، ۴) ثابت کردیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\dots(\alpha+n+p)}=\frac{1}{p(\alpha+1)\dots(\alpha+p)}\qquad(11)$$

(به‌ازای $\alpha=0$ و $p=k$)، جمله‌های سطر kام را، به‌سادگی، باهم جمع می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}=\frac{(k-1)!}{k\cdot k!}=\frac{1}{k^2}$$

از این‌جا، برای مجموع، رشتهٔ تکراری زیر داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \qquad (12)$$

با توجه به‌تقارن عبارت $a_i^{(k)}$، نسبت به i و k، رشتهٔ تکراری دوم، بـا اولی متحد است و برابرکردن مجموع‌های آن‌ها، چیز تازه‌ای به‌دست نمی‌دهد.

اکنون ماتریس را، بـه این ترتیب، تغییر شکل می‌دهیم: در سطر mام، $(m-1)$ جملهٔ اولیهٔ قبلی را حفظ می‌کنیم و به‌جای جملهٔ mام، مجموع r_m بقیهٔ جمله‌های سطر mام را، باآغاز ازجملهٔ mام، می‌گذاریم و بقیهٔ جمله‌ها را حذف می‌کنیم. برای ماتریس جدید

$$\begin{array}{llllll}
r_1 & & & & & \\
a_1^{(2)} & r_2 & & & & \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & r_3 & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & a_3^{(m)} & \cdots\ a_{m-1}^{(m)} & r_m & \\
a_1^{(m+1)} & a_2^{(m+1)} & a_3^{(m+1)} & \cdots\ a_{m-1}^{(m+1)} & a_m^{(m+1)} & r_{m+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

مجموع رشته‌های برحسب سطرها، و همراه باآن‌ها، مجموع رشتهٔ تکراری اول، مثل‌سابق خواهندبود [(۱۲) را ببینید]. برای‌مجموع رشته‌ها برحسب‌ستون‌ها، ابتدا محاسبه‌می‌کنیم:

$$r_m=\sum_{i=m}^{\infty}\frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdots(i+m)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m-1)!}{(m-1+n)\cdots(2m-1+n)}=\frac{(m-1)!}{m^2(m+1)\cdots(2m-1)}$$

در این‌جا، دوباره، از رابطهٔ (۱۱) به‌ازای $\alpha=m-1$ و $p=m$ استفاده‌کردیم.مجموع

جمله‌های بقیهٔ ستون mام هم، برابر است با

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdots(i+m)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m+n)(m+n+1)\cdots(2m+n)} = \frac{(m-1)!}{m(m+1)\cdots(2m)}$$

[در (۱۱). $\alpha = p = m$ قرار می‌دهیم]. سرانجام، مجموع جمله‌های ستون mام، برابر می‌شوند با

$$3 \cdot \frac{(m-1)!}{m(m+1)\cdots(2m-1)\cdot 2m} = 3 \cdot \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}$$

اگر، باتوجه به‌قضیهٔ ۳، مجموع‌های دو رشتهٔ تکراری را برابر قراردهیم، به‌رابطهٔ‌جالب زیر می‌رسیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!} \qquad (13)$$

از آن‌جا که رشتهٔ سمت راست، سریع‌تر به‌سمت تقارب می‌رود، محاسبهٔ تقریبی مجموع رشتهٔ مهم واقع درسمت چپ را، ساده‌ترمی کند. علاوه‌برآن، همان‌طورکه‌خواهیم دید [۴۴۰، ۷]، این‌رابطه، امکان می‌دهد تا مجموع رشتهٔ اول را «به‌صورتی متناهی» بیان کنیم: این مجموع، برابر است با $\frac{\pi^2}{6}$ (این نتیجه، متعلق به‌اولر است).

۵) رشتهٔ لامبرت

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{1-x^k}$$

را، در حالت $|x| < 1$، مورد بررسی قرار می‌دهیم. قبلاً دیده‌ایم [۳۸۵، ۵)] که، با این‌شرط، رشتهٔ لامبرت به‌ازای مقدارهایی‌از x متقارب می‌شودکه رشتهٔ توانی زیرمتقارب است:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

فرض می‌کنیم‌که شعاع تقارب R این رشته، مثبت باشد [۳۷۹] و، ضمناً، $|x| < R$ در نظر می‌گیریم.

روشن است که

$$\frac{x^k}{1-x^k}=x^k+x^{2k}+\cdots+x^{ik}+\cdots$$

اکنون، ماتریس این جمله‌ها را، با ضرب آن‌ها در a_k، و قرار دادن توان‌های یکسان x در یك ستون، تشکیل می‌دهیم (جاهای خالی را، می‌توان با صفر پر کرد):

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & a_1x^4 & a_1x^5 & a_1x^6 & a_1x^7 & a_1x^8 & a_1x^9 & a_1x^{10}\cdots \\
 & a_2x^2 & & a_2x^4 & & a_2x^6 & & a_2x^8 & & a_2x^{10}\cdots \\
 & & a_3x^3 & & & a_3x^6 & & & a_3x^9 & \cdots \\
 & & & a_4x^4 & & & & a_4x^8 & & \cdots \\
 & & & & a_5x^5 & & & & & a_5x^{10}\cdots \\
 & & & & & a_6x^6 & & & & \cdots \\
 & & & & & & a_7x^7 & & & \cdots \\
 & & & & & & & a_8x^8 & & \cdots \\
 & & & & & & & & a_9x^9 & \cdots \\
 & & & & & & & & & a_{10}x^{10}\cdots \\
 & & & & & & & & & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

رشتهٔ تکراری ازروی سطرها، درست‌دارای مجموع $\varphi(x)$ است. چون رشتهٔ‌توانی و همراه با آن رشتهٔ لامبرت، با تبدیل x به $|x|$ و a_k به $|a_k|$، متقارب می‌شود، می‌توان از قضیهٔ ۳ استفاده‌کرد و از روی ستون‌ها، جمع‌کرد. بسط رشتهٔ $\varphi(x)$ را، به‌رشتهٔ توانی، به‌دست می‌آوریم:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^n,\quad \text{ضمناً}\quad \alpha_n=\sum_{k/n}^{\infty}a_k$$

نشانهٔ k/n به‌معنای آن است کـه مجموع، تنها بر مقسوم علیه‌های k از عدد n گسترش می‌یابد.

مثلاً* با فرض $a_k=1$ و یا $a_k=k$، به‌ترتیب، خواهیم داشت:

---

*) در هر دو حالت، به‌سادگی تحقیق می‌شودکـه $R=1$. به‌نحوی‌کـه کافی است، به‌طور ساده، $|x|<1$ در نظر بگیریم.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n).x^n,\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n$$

که در آن $\tau(n)$ تعداد و $\sigma(n)$ مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد n است.

۶) همان جمله‌ها را، به‌طریقی دیگر و بدون ازقلم انداختن آن‌ها، تنظیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{|cccccc}
a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & a_1x_4 & \cdots \\
a_2x^2 & a_2x^4 & a_2x^6 & a_2x^8 & \cdots \\
a_3x^3 & a_3x^6 & a_3x^9 & a_3x^{12} & \cdots \\
a_4x^4 & a_4x^8 & a_4x^{12} & a_4x^{16} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\downarrow & & & &
\end{array}$$

برحسب سطرها، همان مجموع‌ها را حفظ می‌کنیم، برحسب ستون‌ها هم، به‌ترتیب، $f(x)$، $f(x^2)$، $f(x^3)$، $f(x^4)$، ... را به‌دست می‌آوریم. به‌این‌ترتیب، به‌اتحادی می‌رسیم که φ و f را، به‌هم پیوند می‌دهد:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f(x^n)$$

مثلاً، با اختیار $a_k=a^k$، که در آن $|a|\leqslant 1$، خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{ax}{1-ax}$$

به‌نحوی که

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ax)^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a.x^n}{1-a.x^n}\quad(|a|\leqslant 1,\ |x|<1)$$

۷) نتیجهٔ حاصل را می‌توان تعمیم داد. دورشتهٔ توانی زیررا درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n,\qquad g(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_mx^m$$

به‌مقدارهایی از x اکتفا می‌کنیم که برای آن‌ها داشته باشیم: $|x|<1$ و هردو رشته متقارب مطلق شوند.

ماتریسی با جمله‌های $a_nb_mx^{mn}$ تشکیل می‌دهیم. چون (برای $m>1$ و $n>1$)

دادیم: $mn \geqslant m+n$، بنابراین

$$|a_n b_m x^{mn}| \leqslant |a_n x^n| \cdot |b_m x^m|$$

ازاین‌جا به‌سادگی نتیجه می‌شود که رشتهٔ دوگانهٔ متناظر با ماتریس مفروض، متقارب مطلق است. با برابر قراردادن مجموع‌های رشته‌های تکراری، اتحاد زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m f(x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n)$$

که از آن‌جا، به‌ازای $b_m = 1$، اتحاد تمرین پیش حاصل می‌شود [به‌طوری‌که $g(x) = \frac{x}{1-x}$].

۸) رشتهٔ

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} x^i y^k$$

ازضرب رشته‌های $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ و $\sum_{k=0}^{\infty} y^k$ به‌دست می‌آید که، به‌ازای $|x| < 1$ و $|y| < 1$، متقارب (مطلق) است؛ برای این مقدارها، رشتهٔ دوگانه هم، متقارب (مطلق) می‌شود. درحالت $|x| > 1$ یا $|y| > 1$، شرط لازم تقارب ازبین می‌رود: جملهٔ عمومی به‌سمت صفر میل نمی‌کند و رشته متباعد می‌شود. به‌سادگی و به‌طور مستقیم تحقیق می‌شود که درحالت $|x| = 1$ یا $|y| = 1$ هم، رشته‌ای متباعد خواهیم داشت.

۹) این رشته را درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha k^\beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

این رشته هم، ازضرب رشته‌های $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ و $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}$ به‌دست می‌آید که به‌ازای $\alpha > 1$ و $\beta > 1$ متقارب است، به‌طوری‌که رشتهٔ دوگانه هم، با این فرض‌ها، متقارب می‌شود.

اگرداشته باشیم $\alpha \leqslant 1$ (یا $\beta \leqslant 1$)، درآن صورت، رشتهٔ دوگانه متباعد می‌شود، زیرا همهٔ رشته‌های برحسب سطرها (برحسب ستون‌ها) متباعد می‌شوند (نتیجهٔ شمارهٔ پیش را ببینید).

۱۰) تقارب رشتهٔ زیررا بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k)^\sigma} \quad (\sigma > 0)$$

برای این منظور، بـا بسط جمله‌ها از روی قطـر، آن را به‌صورت رشته‌ای ساده درمی‌آوریم. چون جمله‌های واقع بریك قطر برابرند، بـا یکی‌کردن آن‌ها، به این رشته می‌رسیم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)\frac{۱}{n^{\sigma}}$$

اگرنابرابری‌های روشن

$$\frac{۱}{۲}n\leqslant n-۱<n$$

را بر n^{σ} تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{n^{\sigma-۱}}\leqslant(n-۱)\cdot\frac{۱}{n^{\sigma}}<\frac{۱}{n^{\sigma-۱}}$$

ازاین‌جا روشن می‌شود کـه، رشتهٔ سادهٔ حاصل، به‌ازای $\sigma>۱$ متقارب و به‌ازای $\sigma\leqslant ۱$ متباعد است، که با توجه به‌قضیهٔ ۷، همین حکم برای رشتهٔ دوگانه هم درست است.

۱۱) حالا، رشتهٔ بغرنج‌تری را بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{i,k=۱}^{\infty}a_i^{(k)}\equiv\sum_{i,k=۱}^{\infty}\frac{۱}{(Ai^{۲}+۲Bik+Ck^{۲})^{\rho}}\quad(\rho>۰)$$

که در آن، صورت $Ax^{۲}+۲Bxy+Cy^{۲}$، معین ومثبت‌فرض می‌شود، به‌نحوی که‌داریم: $\Delta=AC-B^{۲}>۰$ وهمچنین $A, C>۰$.

اگر بزرگترین عـدد ازعددهای $|A|$، $|B|$ و $|C|$ را L بنامیم، بدیهی است کـه

$$Ai^{۲}+۲Bik+Ck^{۲}\leqslant L(i+k)^{۲},\ a_i^{(k)}\geqslant\frac{۱}{L^{\rho}}\cdot\frac{۱}{(i+k)^{۲\rho}}$$

دراین‌حالت، از (۱۰) برمی‌آید که، برای $\rho\leqslant ۱$، رشتهٔ مفروض متباعد است.

ازطرف دیگرداریم:

$$Ai^{۲}+۲Bik+Ck^{۲}=\frac{۱}{C}[(AC-B^{۲})i^{۲}+(Bi+Ck)^{۲}]\geqslant\frac{\Delta}{C}i^{۲}$$

به‌نحوی که

$$a_i^{(k)}\leqslant\frac{C^{\rho}}{\Delta^{\rho}}\cdot\frac{۱}{i^{۲\rho}}$$

وبه‌طرز مشابهی

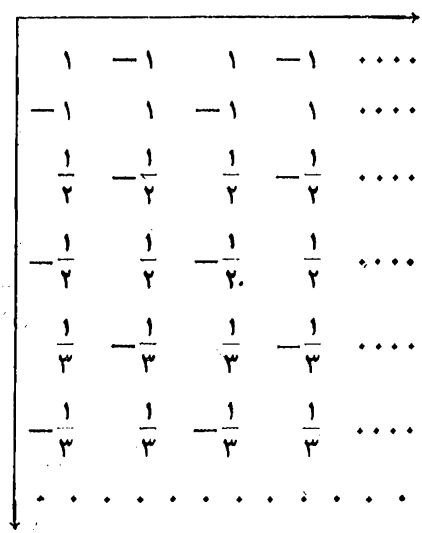
$$a_i^{(k)} \leqslant \frac{A^\rho}{\Delta^\rho} \cdot \frac{1}{k^{2\rho}}$$

واز آن‌جا، به‌سادگی به‌دست می‌آید که

$$a_i^{(k)} \leqslant \left(\frac{\sqrt{AC}}{\Delta}\right)^\rho \cdot \frac{1}{i^\rho . k^\rho}$$

که ازمقایسهٔ آن با ۹) معلوم می‌شود که، به‌ازای $\rho > 1$، رشتهٔ موردنظر متقارب است.

۱۲) درقضیهٔ ۴، به‌جای فرض مربوط به تقارب رشتهٔ دوگانه، فرض خاص مربوط به‌تقارب همهٔ رشته‌های مربوط به‌سطرها را درنظر گرفتیم. مثال سادهٔ زیرنشان می‌دهدکه بدون فرض دومی، نمی‌توان به‌نتیجه رسید: فرض دوم نتیجه‌ای ازفرض اول نیست. رشتهٔ دوگانهٔ با طرح



متقارب است ومجموعی برابر ۰ دارد، ضمناً، همهٔ رشته‌های مربوط به‌سطرها، متباعدند.

۱۳) مجموع‌های رشته‌های دوگانهٔ زیر را ثابت کنید:

$$(a)\ \sum_{m,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \frac{1}{p+1} \quad (p > -1);\qquad (b)\ \sum_{m=2,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \ln 2;$$

$$(c)\ \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2;\qquad (d)\ \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}} = \frac{1}{4}\ln 2;$$

$$(e)\ \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \frac{\pi}{8}$$

راهنمائی. ازجمع کردن برحسب m آغاز و به‌رشتهٔ دوگانه عبور کنید. ازبسطهای زیرهم، به‌عنوان معلوم، استفاده کنید:

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots=\ln ۲,$$

$$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\cdots=\frac{\pi}{۴}$$

۱۴) تابع دومتغیره زیر را درنظرمی‌گیریم:

$$\varphi(x,z)=e^{\frac{x}{۲}(z-z^{-۱})}\quad(z\neq ۰)$$

با ضرب رشته‌های متقارب مطلق

$$e^{\frac{x}{۲}\cdot z}=\sum_{i=۰}^{\infty}\left(\frac{x}{۲}\right)^{i}\cdot\frac{z^{i}}{i!}\quad\text{و}\quad e^{-\frac{x}{۲}\cdot z^{-۱}}=\sum_{k=۰}^{\infty}\left(\frac{x}{۲}\right)^{k}\cdot\frac{(-۱)^{k}}{k!}\cdot z^{-k}$$

رشتهٔ‌دوگانهٔ زیررا (که به‌نوبهٔ‌خود متقارب مطلق است)، برای این تابع به‌دست‌می‌آوریم:

$$\varphi(x,z)=\sum_{i,k=۰}^{\infty}\left(\frac{x}{۲}\right)^{i+k}\cdot\frac{(-۱)^{k}}{i!\,k!}\cdot z^{i-k}$$

باجمع وجورکردن جمله‌های بادرجه‌های یکسان z، می‌توان آن را به‌رشتهٔ‌تکراری تبدیل کرد*:

$$\varphi(x,z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_{n}(x)\cdot z^{n}$$

که درآن، برای $n\geqslant ۰$

$$J_{n}(x)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{k}}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲k+n}$$

وبرای $n<۰$

$$J_{n}(x)=\sum_{k=-n}^{\infty}\frac{(-۱)^{k}}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲k+n}$$

---

*) منظور از مجموع $\sum_{-\infty}^{+\infty}a_{n}$، بنابه‌تعریف، مجموع دورشتهٔ زیراست:

$$\sum_{n=۰}^{+\infty}a_{n}+\sum_{n=۱}^{+\infty}a_{-n}$$

ضمناً، به‌سادگی دیده می‌شود که

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

تابع‌های $J_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \dots)$ را، تابع بسل با اندیس n گویند؛ این تابع‌ها، نقش مهمی در فیزیك ریاضی، مکانیك سماوی و غیره به‌عهده دارند. تابع $\varphi(x, z)$ را، که از بسط آن، تابع‌های بسل به‌دست می‌آیند، «تابع مولد» تابع بسل گویند.

۳۹۶. رشتهٔ توانی با دومتغیر؛ حوزهٔ تقارب. رشتهٔ توانی با دومتغیر x و y، عبارت است از رشتهٔ دوگانهٔ به‌صورت

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{i,k}\, x^i y^k \qquad (14)$$

که برحسب توان‌های مثبت ودرست متغیرهای x و y، مرتب شده است.

شبیه شمارهٔ **۳۷۹** درمورد رشته‌های سادهٔ توانی، دراین‌جا هم باید مسألهٔ مربوط به«حوزهٔ تقارب» رشتهٔ (۱۴) را روشن کنیم، یعنی مجموعهٔ نقطه‌های $\mathfrak{M}=\{M(x, y)\}$ از صفحه را پیدا کنیم که، برای آن‌ها، رشتهٔ مفروض متقارب می‌شود.

پیش قضیه. اگر رشتهٔ (۱۴)، در یك نقطهٔ $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ ــ که هردو مختص آن مخالف صفر است ــ متقارب باشد، درآن صورت، این رشته در همهٔ نقطه‌های $M(x, y)$ صادق در نابرابری‌های $|x|<|\bar{x}|$ و $|y|<|\bar{y}|$ (یعنی، درتمامی مستطیل بازبه‌مرکز مبداء مختصات و راس $\bar{M}$)، متقارب مطلق می‌شود.

اثبات، کاملاً شبیه اثبات پیش قضیهٔ شمارهٔ **۳۷۹** است. از کران‌دار بودن جمله‌های رشتهٔ (۱۴)، به‌ازای $x=\bar{x}$ و $y=\bar{y}$

$$|a_{i,k}\bar{x}^i\bar{y}^k|\leqslant L \quad (i, k=0, 1, 2, \dots)$$

نتیجه می‌شود:

$$|a_{i,k}x^i y^k|\leqslant L\cdot\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^i\left|\frac{y}{\bar{y}}\right|^k$$

به‌نحوی که ــ تنها با شرط $|x|<|\bar{x}|$ و $|y|<|\bar{y}|$ ــ در سمت راست با جملهٔ عمومی یك رشتهٔ متقارب سروکار داریم [۳۹۵، ۸)]؛ ازهمین‌جا هم، تقارب مطلق رشتهٔ (۱۴) نتیجه می‌شود.

ما تنها به مطالعهٔ رشته‌هایی می‌پردازیم که، برای آن‌ها، نقطه‌های مشابه $\bar{M}$ وجود داشته باشد؛ رشته‌های دیگر، برای ما جالب نیستند. خصلت پیش قضیه نشان می‌دهد که

کافی است تنها به‌ربع اول مختصات بپردازیم؛ نتیجه‌ای راکه از این راه به‌دست می‌آید، می‌توان ــ با توجه به‌تقارن ــ به‌سادگی به‌دیگر ربع‌های مختصات هم بسط داد.

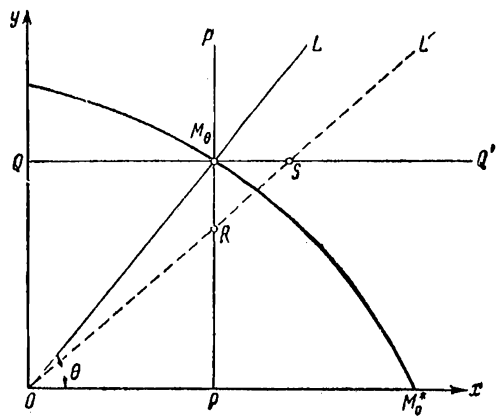
نیم‌خط OL را، دررربع اول، انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی‌که ازمبداء بگذرد و بامحور x، زاویه‌ای برابر θ بسازد (شکل ۵۵). با استفاده از پیش قضیه، می‌توان شبیهٔ ۳۷۹، نشان داد که چنان عدد مثبت $R(\theta)$ (که نامتناهی هم می‌تواند باشد) پیدا می‌شودکه در همهٔ نقطه‌های M واقع براین نیم‌خط، با شرط

$$\overline{OM}<R(\theta)$$

رشتهٔ (۱۴) متقارب مطلق و درعین حال، با شرط

$$\overline{OM}>R(\theta)$$

متباعد می‌شود.



شکل ۵۵

اگر دست‌کم برای یك نیم‌خط، داشته باشیم: $R(\theta)=+\infty$، در آن‌صورت، بنا بر پیش قضیه، رشتهٔ مفروض، درتمامی صفحه متقارب (و ضمناً، متقارب مطلق) می‌شود؛ یعنی، تمامی صفحه، نقش «حوزهٔ تقارب» $\mathcal{M}$ را به‌عهده دارد.

اکنون، ازحالت همه‌جا متقارب رشته صرف‌نظر می‌کنیم؛ آن‌وقت، $R(\theta)$ یك‌تابع متناهی از θ است وبرهرنیم‌خط OL، نقطهٔ مرزی M_θ پیدا می‌شودکه برای آن داریم:

$$\overline{OM}_\theta=R(\theta)$$

این نقطه، نقطه‌های M نیم‌خط را،که در آن‌ها، رشتهٔ مفروض متقارب (مطلق) می‌شود، از نقطه‌هایی‌که در آن‌ها متباعد می‌شود، جدا می‌کند. درخود نقطهٔ M_θ، برحسب موقعیت،

ممکن است با تقارب رشته ویا تباعد آن سروکار داشته باشیم.

اگر از نقطهٔ M_θ، قائم PP' وافقی QQ' را رسم کنیم (شکل را ببینید)، در آن صورت رشتهٔ مفروض، در درون مستطیل $OPM_\theta Q$ آشکارا متقارب و در درون زاویهٔ $Q'M_\theta P'$ (از روی پیش قضیه) آشکارا متباعد می‌شود. به‌این ترتیب، روی نیم‌خط جدید OL'، که متناظر با زاویهٔ دیگر θ' است، در طول OR متقارب و در طول SL' متباعد است. در نتیجه، نقطهٔ مرزی M_θ، واقع بر این نیم‌خط، باید بین R و S قرار گیرد. از این‌جا، به‌سادگی دیده می‌شود که، وقتی θ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر کند، $R(\theta)$ به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، به‌نحوی که نقطهٔ M_θ در ربع اول مختصات، منحنی مرزی پیوسته‌ای را می‌پیماید.

چون به‌ازای کوچکتر شدن θ، طول x_θ از نقطهٔ M_θ تنزل و عرض y_θ آن ترقی نمی‌کند، بنابراین، هردو به‌ازای $\theta \to ۰$، دارای مقدار حدی می‌باشند. در این صورت، روشن است که $R(\theta)$ هم، دارای مقدار حدی است. اگر این حد

$$\lim_{\theta \to ۰} R(\theta) = R_\theta$$

متناهی باشد، M_θ به‌سمت یك نقطهٔ حدی $M^*_۰(R_۰, ۰)$ واقع برمحور x میل می‌کند. در حالت خلاف هم، منحنی مرزی دارای مجانب موازی محور x است (که ممکن است برخود محور x هم منطبق شود). همهٔ آن‌چه را که گفتیم، می‌توان برای حالت $\theta \to \frac{\pi}{۲}$ هم ـ با عوض کردن نقش x و y با یکدیگر ـ بیان کرد.

یادداشت. ولی نباید گمان کرد که نقطهٔ حدی $M^*_۰$، که دربارهٔ آن صحبت کردیم، الزاماً بر نقطهٔ مرزی $M_۰$ روی خود محور x، منطبق می‌شود. نقطهٔ $M_۰$ می‌تواند در سمت راست $M^*_۰$ (وحتی در بی‌نهایت) هم قرار گیرد. این امکان نباید موجب حیرت خواننده شود، زیرا پیش‌قضیه و بحثی که براساس آن انجام دادیم، تنها به‌نقطه‌های بیرون ازمحور مختصات، مربوط می‌شود.

اکنون، منحنی رسم شده در ربع اول دستگاه مختصات را، به‌وسیلهٔ منحنی‌های قرینهٔ آن (نسبت به‌هریك از دومحور ونسبت به‌مبداء مختصات) در ربع‌های دیگر، تکمیل می‌کنیم. به‌این ترتیب، تمامی منحنی مرزی را به‌دست می‌آوریم که، درواقع، «حوزهٔ تقارب» $\mathcal{M}$ موردنظر ما را مشخص می‌کند: در بخشی از صفحه که به‌وسیلهٔ این منحنی، از بیرون، محدود شده است، رشتهٔ (۱۴) متقارب (و ضمناً، متقارب مطلق) و در بخش بیرونی

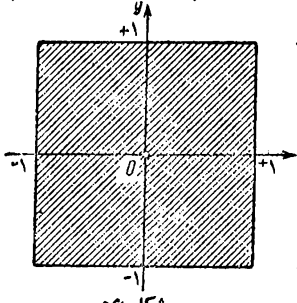
صفحه، رشتهٔ (۱۴) متباعد است*. روی نقطه‌های منحنی مرزی، ممکن است رشتهٔ مفروض متقارب یا متباعد باشد.

به‌مثال‌ها می‌پردازیم.

۳۹۷. مثال‌ها. ۱) «حوزهٔ تقارب» $\mathcal{M}$ رشتهٔ

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} x^i y^k$$

همان‌طور که در ۳۹۵، ۸) دیدیم، عبارت است از مستطیل باز $(-۱ ,۱ ;-۱ ,۱)$ (شکل ۵۶) که درمحدودهٔ آن، مجموعی برابر $\frac{۱}{۱-x}\cdot\frac{۱}{۱-y}$ دارد.



شکل ۵۶

۲) برای رشتهٔ مشابه

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} x^i y^k$$

(که در آن، اندیس‌های i و k، باآغاز از ۱، تغییر می‌کنند)، «حوزهٔ تقارب» ازهمین مستطیل، منتهی با اضافه‌کردن هردو محورمختصات، تشکیل شده است. دراین‌حالت، با وجودی‌که نقطهٔ مرزی M_0 ــ که‌دربارهٔ آن دربالا صحبت شد ــ به ازای $\theta \to ۰$، به‌سمت نقطهٔ حدی $M_0^*(۱,۰)$ واقع برمحور x میل می‌کند، تقارب برای تمامی این محور برقرار است (یادداشت را ببینید).

۳) رشتهٔ

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{x^i y^k}{i!k!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

به‌روشنی، درتمامی صفحه، متقارب مطلق است.

۴) برای آن‌که رشتهٔ

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i!k!} x^i y^k$$

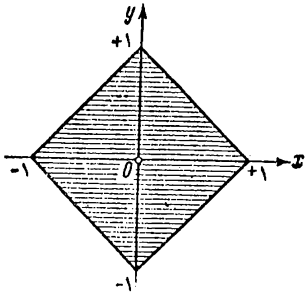
متقارب مطلق باشد، یعنی رشتهٔ

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i!k!} |x|^i \cdot |y|^k$$

متقارب شود، لازم وکافی است که رشتهٔ

---

*) اگر محورهای مختصات را به‌حساب نیاوریم، رشته می‌تواند در بیرون حدود این منحنی‌هم، متقارب باشد.



شکل ۵۷

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|x|+|y|)^n=\frac{1}{1-(|x|+|y|)}$$

که‌ازقبلی، باجمع کردن‌ازروی قطر به‌دست می‌آید، متقارب باشد واین، مـا را به‌شرط $|x|+|y|<1$ می‌کشاند. در نتیجه،دراین‌جا، «حوزهٔ تقارب» عبارت است ازمربع کجی که‌رأس‌های آن $(0, \pm 1)$ و$(\pm 1, 0)$ است(شکل ۵۷).

۵) در پایان، رشتهٔ دوگانهٔ زیررا در نظر می‌گیریم:

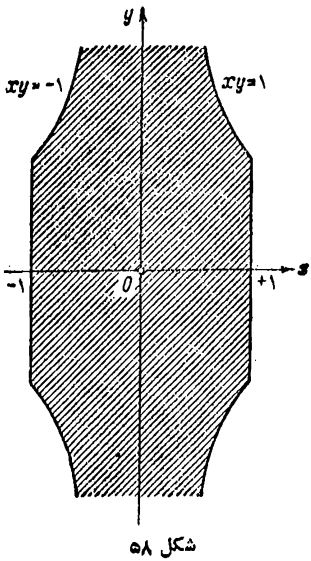
$$\sum_{i\geqslant k}^{\infty}x^iy^k=1+x+x^2+\dots+x^m+\dots+xy+x^2y+\dots$$

$$\dots+x^my+\dots+x^2y^2+\dots+x^my^2+\dots+x^my^m+\dots$$

اگر آن را متقارب مطلق فرض‌کنیم و ازروی سطرها جمع کنیم، نتیجه می‌شود:

$$(1+x+x^2+\dots)[1+xy+(xy)^2+\dots]=$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-xy}$$



شکل ۵۸

ازاین‌جا روشن می‌شودکه، برای‌تقارب‌مطلق، لازم (وضمناً، کافـی) است: $|x|<1$، $|xy|<1$: «حـوزهٔ تقارب» در شکل۵۸ نشان‌داده شده‌است،که منحنی‌های آن،هذلولی‌های متساوی‌الساقین می‌باشند.

۳۹۸. رشته‌های چندگانه. تعمیم بعدی مفهوم رشتهٔ نامتناهی، به‌صورتی کاملاً طبیعی، به دست می‌آید. دستگاه نامتناهی عددهای زیررا در نظر می‌گیریم:

$$u_{i,k,\dots,l}$$

که‌به‌کمک s $(s\geqslant 2)$ علامت i، k، ...، l، شماره‌گذاری شده‌است. هریك‌ازاین s علامت، می‌توانند ــ مستقل از یکدیگرــ همهٔ مقدارهای ممکن عددهـای طبیعی را اختیار کنند. در این صورت، نماد

$$\sum_{i,k,\dots,l=1}^{\infty}u_{i,k,\dots,l}$$

به‌رشتهٔ چندگانه (دقیق‌تر: رشتهٔ چندگانه از مرتبهٔ s) موسوم است.

حد مجموع جزئی رشتهٔ

$$U_{n,m,\dots,p}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\cdots\sum_{l=1}^{p}u_{i,k,\dots,l}$$

(متناهی یا نامتناهی) وقتی‌که $n\to\infty$، $m\to\infty$، ...، $p\to\infty$، مجموع رشته‌است. رشته را وقتی متقارب گویندکه دارای مجموعی متناهی باشد.

طبقه مهمی از رشته‌های چندگانه، عبارت است از رشته‌های توانی با چندمتغیر:

$$\sum_{i,k,\dots,l=0}^{\infty}a_{i,k,\dots,l}x^iy^k\cdots z^l$$

مفهوم‌های اصلی‌ونظریه‌ای‌راکه قبلاً طرح کردیم، می‌توان‌دربارهٔ رشته‌های‌چندگانه گسترش داد.

§۶. حاصل‌ضرب‌های نامتناهی

۳۹۹. مفهوم‌های اساسی. اگر

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \dots,\ p_n,\ \dots \qquad (1)$$

دنبالهٔ مفروضی از عددها باشد، درآن‌صورت

$$p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}p_n^{*} \qquad (2)$$

را حاصل‌ضرب نامتناهی گویند.

عددهای (۱) را، پشت سرهم، در یکدیگر ضرب می‌کنیم و حاصل‌ضرب‌های جزئی را تشکیل می‌دهیم:

$$P_1=p_1,\ P_2=p_1\cdot p_2,\ P_3=p_1\cdot p_2\cdot p_3,\ \dots$$

$$\dots,\ P_n=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots p_n,\ \dots \qquad (3)$$

همیشه، از مقایسهٔ دنبالهٔ‌حاصل‌ضرب‌های جزئی $\{P_n\}$ با نماد (۲)، استفاده خواهیم کرد. اگر حد حاصل‌ضرب جزئی P_n را، به‌ازای $n\to\infty$، P (متناهی یـا نامتناهی)

---

*) ماقبلاً هم باچنین نمادی برای حاصل‌ضرب ــ منتهی برای تعدادمحدود عامل‌ها ــ سروکار داشته‌ایم.

بنامیم:

$$\text{حد } P_n = P$$

آن را مقدار حاصل‌ضرب (۲) می‌نامند و می‌نویسند:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

درحالتی که عدد P متناهی، و ضمناً مخالف صفر، باشد، حاصل‌ضرب نامتناهی را متقارب و، درصورت عکس، متباعد گویند*.

کافی است، یکی از عامل‌ها برابر صفر باشد، تا مقدار تمامی حاصل‌ضرب برابر صفر شود. در بررسی‌های بعدی، این‌حالت را کنار می‌گذاریم وهمیشه فرض می‌کنیم: $p_n \neq 0$.

خواننده، به‌سادگی متوجه شباهت با رشته‌های نامتناهی [۳۶۲] می‌شود ومی‌بیند که، همچون‌مورد رشته‌ها، بررسی حاصل‌ضرب‌های نامتناهی را،می‌توان شکل خاصی‌از بررسی واریانت‌ها (یا دنباله‌ها) وحدهای آن‌ها دانست. آشنائی بااین شکل‌کار، ازاین‌جهت مفید است که موجب سادگی بیشتری در بحث‌ها می‌شود.

۴۰۰. مثال‌ها. ۱) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

چون، برای حاصل‌ضرب جزئی P_n داریم:

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}$$

بنابراین، حاصل‌ضرب نامتناهی مفروض متقارب و مقدارآن برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲) دستور والیس [۳۱۷]

$$\frac{\pi}{2} = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots 2n\cdot 2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}$$

با بسط $\frac{\pi}{2}$ به‌صورت حاصل‌ضرب نامتناهی زیر، هم‌ارز است:

---

*) تاکید می‌کنیم که، درحالت $P=0$، حاصل‌ضرب را متباعد به‌حساب می‌آورند. هرچندکه این مطلب، با آن‌چه برای رشته‌های نامتناهی داشتیم، متفاوت است، به‌این خاطر قبول شده است که بیان بسیاری از قضیه‌ها را ساده می‌کند.

$$\frac{\pi}{۲}=\frac{۲}{۱}\cdot\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۴}{۵}\cdots\frac{۲n}{۲n-۱}\cdot\frac{۲n}{۲n+۱}\cdots$$

که به‌این دستورها منجرمی‌شود:

$$\prod_{m=۱}^{\infty}\left[۱-\frac{۱}{(۲m+۱)^{۲}}\right]=\frac{\pi}{۴},\quad \prod_{m=۱}^{\infty}\left(۱-\frac{۱}{۴m^{۲}}\right)=\frac{۲}{\pi}$$

۳) ثابت کنید که، با شرط $|x|<۱$

$$(۱+x)(۱+x^{۲})(۱+x^{۴})\cdots(۱+x^{۲^{n-۱}})\cdots=\frac{۱}{۱-x}$$

برابری زیرواضح است (با ضریب عامل‌های متوالی درطرف دوم):

$$(۱-x)P_n=(۱-x)(۱+x)(۱+x^{۲})\cdots(۱+x^{۲^{n-۱}})=۱-x^{۲^n},$$

$$P_n=\frac{۱-x^{۲^n}}{۱-x}$$

که با گذر به‌حد، برابری مطلوب به‌دست می آید.

۴) درشمارهٔ ۵۴، ۷a) داشتیم:

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{۲}\cos\frac{\varphi}{۲^{۲}}\cdots\cos\frac{\varphi}{۲^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\qquad(\varphi\neq۰)$$

اکنون می‌توانیم آن را، به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\prod_{n=۱}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{۲^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

که در حالت خاص $\varphi=\frac{\pi}{۲}$ به‌بسط زیرمنجرمی‌شود:

$$\frac{۲}{\pi}=\cos\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۸}\cdots\cos\frac{\pi}{۲^{n-۱}}\cdots$$

که اگر به‌یاد بیاوریم:

$$\cos\frac{\pi}{۴}=\sqrt{\frac{۱}{۲}},\quad \cos\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos\alpha}$$

در آن صورت، می‌توان بسط فوق را، به‌این صورت نوشت:

$$\frac{۲}{\pi}=\sqrt{\frac{۱}{۲}}\cdot\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}}\cdot\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}}}\cdots$$

[ویت (F.Vieta). این دستور و دستور والیس، از نخستین نمونه‌های حاصل‌ضرب‌های نامتناهی در تاریخ آنالیز می‌باشند.

۵) در ۳۱۵(۱۰)، برای انتگرال بیضوی کامل نوع اول، دستور زیر را ثابت کردیم:

$$\mathbf{K}(k)=\frac{\pi}{۲}\lim_{n\to\infty}(۱+k_۱)(۱+k_۲)\cdots(۱+k_n)$$

که در آن، واریانت k_n، به‌کمك رابطهٔ بازگشتی زیر، معین می‌شود:

$$k_n=\frac{۱-\sqrt{۱-k_{n-۱}^۲}}{۱+\sqrt{۱-k_{n-۱}^۲}}\quad(k_۰=k)$$

این دستور، بسط $\mathbf{K}(k)$ را به‌حاصل‌ضرب نامتناهی، به‌دست می‌دهد:

$$\mathbf{K}(k)=\frac{\pi}{۲}\prod_{n=۱}^{\infty}(۱+k_n)$$

۶) این حاصل‌ضرب نامتناهی را هم در نظر می‌گیریم:

$$\prod_{n=۱}^{\infty}\frac{e^{\frac{۱}{n}}}{۱+\frac{۱}{n}}$$

حاصل‌ضرب جزئی به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$P_n=\frac{e^{۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}}}{n+۱}=\frac{e^{\ln n+C+\gamma_n}}{n+۱}=\frac{n}{n+۱}\cdot e^C\cdot e^{\gamma_n}$$

که در آن، C مقدار ثابت اولر و γ_n بی‌نهایت کوچك است [۳۶۷، (۴)]. به‌این ترتیب، حاصل‌ضرب متقارب است و داریم:

$$P=e^C$$

۴۰۱. قضیه‌های اصلی. بستگی با رشته‌ها. در حاصل‌ضرب نامتناهی (۲)، m عامل اول را حذف و حاصل‌ضرب بقیهٔ عامل‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\pi_m = p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdots p_{m+k} \cdots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n$$

که کاملاً شبیه باقی‌ماندهٔ رشته‌های نامتناهی است.

۱°. اگر حاصل‌ضرب (۲) متقارب باشد، آن‌گاه، به‌ازای m دلخواه، حاصل‌ضرب (۴) هم متقارب می‌شود: برعکس، اگر حاصل‌ضرب (۴) متقارب باشد، تقارب حاصل‌ضرب (۲) نتیجه می‌شود*.

اثبات را به‌عهدهٔ خوانند می‌گذاریم [با **۳۶۴**، ۱° مقایسه کنید].

۲°. اگر حاصل‌ضرب نامتناهی (۲) متقارب باشد، آن‌گاه [(۴) را ببینید]

$$\lim_{m \to \infty} \pi_m = 1$$

این نتیجه، از برابری

$$\pi_m = \frac{P}{P_m}$$

و این که P_m به‌سمت $P \neq 0$ میل می‌کند، به‌دست می‌آید.

۳°. اگر حاصل‌ضرب نامتناهی (۲) متقارب باشد، در آن صورت

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 1$$

درواقع، همراه با P_n، P_{n-1} هم به‌سمت P میل می‌کند

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{\lim P_n}{\lim P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$$

[با **۳۶۴**، ۵° مقایسه کنید].

بدون این‌که از سایر ویژگی‌های حاصل‌ضرب‌های نامتناهی ــ که با ویژگی رشته‌های نامتناهی شباهت دارند ــ نام ببریم، به‌روشن کردن بستگی بین تقارب حاصل‌ضرب‌های نامتناهی و رشته‌های نامتناهی می‌پردازیم، که بتوانیم این امکان را به‌دست آوریم تا از نظریهٔ گستردهٔ رشته‌ها، برای حاصل‌ضرب‌ها، استفاده کنیم.

در حالت حاصل‌ضرب‌های متقارب، عامل‌های p_n، از جایی به‌بعد مثبت خواهند بود (۳°). ضمناً، با توجه به ۱°، اگر ازقبل برای همهٔ p_nها فرض کنیم $p_n > 0$، به‌کلی‌بودن مطلب، لطمه‌ای وارد نمی‌آید.

---

*) یکبار برای همیشه یادآور می‌شویم که $p_n \neq 0$.

۴°. برای آن که حاصل‌ضرب نامتناهی (۲) متقارب باشد، لازم وکافی است که رشتهٔ زیر متقارب باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \qquad (۵)$$

اگر این شرط برقرار و L، مجموع این رشته باشد، داریم:

$$P = e^L$$

مجموع جزئی رشتهٔ (۵) را L_n می‌نامیم، داریم:

$$L_n = \ln P_n \Rightarrow P_n = e^{Ln}$$

ازپیوستگی تابع‌های نمائی ولگاریتمی نتیجه می‌شود که، اگر P_n به‌سمت حد متناهی و مثبت P میل کند، آن‌وقت L_n به‌سمت $\ln P$ میل می‌کند و، برعکس، اگر L_n دارای حد متناهی L باشد، درآن صورت، حد P_n برابر با e^L می‌شود.

برای بررسی تقارب حاصل‌ضرب نامتناهی (۲)، اغلب بهتراست که با فرض

$$p_n = ۱ + a_n$$

آن را به‌صورت

$$\prod_{n=1}^{\infty} (۱ + a_n) \qquad (۲^*)$$

ورشتهٔ (۵) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln (۱ + a_n) \qquad (۵^*)$$

بااین علامت‌گذاری‌ها، قضیهٔ سادهٔ زیررا داریم:

۵°. اگر، دست‌کم برای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ n داشته باشیم:

$$a_n > ۰ \ (\text{یا } a_n < ۰)$$

درآن‌صورت، برای تقارب حاصل‌ضرب (۲*)، لازم‌وکافی است که رشته زیرمتقارب باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (۶)$$

ازآن‌جاکه برای تقارب، چه درمورد حاصل‌ضرب (۲) و چه درمورد رشتهٔ (۶)، لازم است که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (۷)$$

[۳° را ببینید]، فرض می‌کنیم، این شرط برقرار باشد؛ آن‌وقت، رابطهٔ زیررا خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

[۷۷، ۵) (a)]. دراین حالت، با توجه به‌این‌که جمله‌های هردو رشتهٔ (*۵) و (۶)، با شروع ازجایی، علامت معینی را حفظ می‌کنند، از روی قضیهٔ ۲ شماره ۳۶۶، این رشته‌ها به‌طور همزمان متقارب یا متباعد می‌شوند. ازاین‌جا، وبا توجه به ۴°، حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

با برگشت به‌حالت کلی $a>0$ یا $a<0$، این گزاره را هم ثابت می‌کنیم.

۶°. اگر همراه با رشتهٔ (۶)، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad (۸)$$

هم متقارب باشد، درآن صورت، حاصل‌ضرب نامتناهی (*۲) متقارب می‌شود.

درواقع، از(۸)، قبل‌ازهمه (۷) نتیجه می‌شود. با توجه به بسط تابع $\ln(1+x)$ ازروی دستور تیلور [۱۲۵، ۵)]، داریم:

$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)$$

به‌طوری‌که

$$\lim \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2} \qquad (۹)$$

با توجه به‌قضیهٔ ۲ شماره ۳۶۶، ازتقارب رشتهٔ (۸)، تقارب رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - \ln(1+a_n)] \qquad (۱۰)$$

نتیجه می‌شود. چون رشتهٔ (۶) متقارب فرض شده است، می‌توان تقارب رشتهٔ (*۵) را، به‌عنوان تفاضل دورشتهٔ متقارب، نتیجه گرفت. تنها این می‌ماند که گزارهٔ ۴° را به‌کاربریم.

به‌طور خلاصه، به‌حالتی می‌پردازیم که حاصل‌ضرب نامتناهی، به‌سمت صفر«متباعد» است.

۷°. برای این که حاصل‌ضرب نامتناهی (۲) [یا (*۲)] دارای مقدار صفر باشد، لازم و کافی است که رشتهٔ (۵) [یا (*۵)] دارای مجموع $-\infty$ باشد.

به‌خصوص، درحالتی‌هم‌که $a_n<0$ و رشتهٔ (۶) متباعد، یا رشتهٔ (۶) متقارب و رشتهٔ (۸) متباعد باشد، وضع به‌همین‌گونه است.

اثبات را به‌خواننده وامی‌گذاریم. تنها دربارهٔ فرض آخر، یادآوری می‌کنیم که از تباعد رشتهٔ (۸)، با توجه به (۹)، تباعد رشتهٔ (۱۰) نتیجه می‌شود که دارای مجموع $+\infty$ است. آن‌وقت، باتوجه به‌تقارب رشتهٔ (۶)، روشن‌است‌که مجموع رشتهٔ (*۵) برابر $-\infty$ می‌شود.

درپایان، از بستگی بین حاصل‌ضرب (۲) [یا (*۲)] با رشتهٔ (۵) [یا (*۵)]، برای تعیین مفهوم‌تقارب مطلق‌حاصل‌ضرب نامتناهی، استفاده می‌کنیم. حاصل‌ضرب رادرحالتی متقارب مطلق‌گویندکه رشتهٔ نظیر لگاریتم آن، متقارب مطلق باشد.

از بررسی‌های شماره‌های **۳۸۷** و **۳۸۸**، می‌توان بلافاصله نتیجه گرفت‌که حاصل‌ضرب‌های متقارب مطلق، دارای ویژگی جابه‌جائی هستند، درحالی که حاصل‌ضرب‌های متقارب غیرمطلق، این ویژگی را ندارند.

مانند ۵°، به‌سادگی ثابت می‌شود که

۸°. برای تقارب مطلق حاصل‌ضرب (*۲)، لازم و کافی است که رشتهٔ (۶) متقارب مطلق باشد.

۴۰۲. مثال‌ها. ۱) ازقضیه‌های بالا، برای‌حاصل‌ضرب‌های‌نامتناهی، استفاده‌می‌کنیم:

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ $(x>0)$، به‌ازای $x>1$ متقارب و به‌ازای $x\leqslant 1$ متباعد است، این نتیجه از روی رفتار رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ (۵°) به‌دست می‌آید؛ به‌همین‌ترتیب $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^x}\right)$ به‌ازای $x>1$ متقارب (۵°) و به‌ازای $0<x\leqslant 1$ متباعد است(۷°).

(b) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right]$ به‌ازای $x>\frac{1}{2}$ متقارب است و، به خصوص، به‌ازای $x>1$، به‌دلیل متقارب بودن رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ (۸°)، متقارب مطلق، و به‌ازای $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ متقارب غیرمطلق است، زیرا رشته‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$ (۶°)

متقارب‌اند؛ بالاخره، به‌ازای $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$، مقدار حاصل‌ضرب برابر صفر است، زیرا، از این رشته‌ها، اولی متقارب است و دومی متقارب نیست (۷°).

۲) فرض کنیم x_n، واریانت غیرمشخصی واقع در بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ باشد. در این صورت، حاصل‌ضرب‌های

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n \quad \text{و} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$$

همراه با رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$، متقارب یا متباعد می‌شوند.

ابتدا فرض می‌کنیم $x_n \to 0$، آن‌وقت، می‌توان این نتیجه‌ها را از ۵° و ۷° به‌دست آورد، به‌شرطی که از بسط‌های زیر استفاده شود [۱۲۵، ۲) و ۳)]:

$$\cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2), \quad \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2)$$

و اگر x_n به‌سمت صفر میل نکند، در آن صورت، به‌طور همزمان، هم‌رشته متباعد است و هم هردو حاصل‌ضرب، دارای مقدار صفر هستند.*

۳) از نظریهٔ حاصل‌ضرب‌های نامتناهی، می‌توان قضیهٔ آبل را، به‌سادگی نتیجه گرفت: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ رشتهٔ مثبت مفروض و A_n مجموع جزئی آن باشد باشد، در آن صورت، رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$، همزمان با رشتهٔ مفروض، متقارب یا متباعد می‌شود. [با ۳۷۵، ۴) مقایسه کنید]. تنها حالت تباعد نیاز به اثبات دارد. اگر $A_n \to \infty$، در آن صورت، حاصل‌ضرب نامتناهی $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n} \equiv \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right)$ به‌سمت صفر میل می‌کند و، آن‌وقت (با توجه به ۵°)، رشتهٔ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$ متباعد می‌شود.

۴) حاصل‌ضرب مهم زیر را درنظر می‌گیریم:

---

* این‌که حاصل‌ضرب‌ها دارای مقدار معین متناهی هستند، از این‌جا روشن می‌شود که همهٔ عامل‌های آن‌ها، کسرهایی کوچکتر از واحدند، ولی مقدار آن‌ها نمی‌توانند مخالف صفر باشند، زیرا شرط لازم وجود این شرط را از بین می‌برند (۳°).

$$x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

[بعداً، در شمارهٔ ۴۰۸، خواهیم دید که این حاصل‌ضرب، معرف تابع $\sin x$ است]. فرض می‌کنیم $x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$.

تقارب (البته مطلق) آن، فوراً و از تقارب رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2\pi^2}$ نتیجه می‌شود. اگر هرعامل ضرب را، به‌دو عامل تجزیه کنیم وحاصل‌ضرب را به‌این صورت بنویسیم:

$$x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\dots\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)\dots$$

آن‌وقت، چون $1-\frac{x}{n\pi}\to 1$، تقارب برای این ترتیب عامل‌ها حفظ می‌شود، ومقدار حاصل‌ضرب هم‌حفظ می‌شود. ولی، این‌بار، باتوجه به‌تقارب غیرمطلق رشتهٔ زیر، باتقارب غیرمطلق حاصل‌ضرب، سروکار خواهیم داشت:

$$-\frac{x}{\pi}+\frac{x}{\pi}-\frac{x}{2\pi}+\frac{x}{2\pi}-\dots-\frac{x}{n\pi}+\frac{x}{n\pi}-\dots$$

به‌نحوی که، نمی‌توان این عامل‌ها را، به‌طور دلخواه، جابه‌جا کرد.

اکنون، هرعامل $1\mp\frac{x}{n\pi}$ را به‌صورت عامل $\left(1\mp\frac{x}{n\pi}\right)e^{\pm\frac{x}{n\pi}}$ درنظرمی‌گیریم؛ به‌سادگی دیده می‌شود که، این عمل، نه‌برتقارب حاصل‌ضرب نامتناهی تأثیر دارد و نه‌برمقدار آن؛ ضمناً، حاصل‌ضرب جدید، متقارب مطلق است، زیرا [۱۲۵، ۱)]:

$$\frac{x}{n\pi}=1\pm\frac{x}{n\pi}+\frac{x^2}{2n^2\pi^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$e\pm\left(1\mp\frac{x}{n\pi}\right)e^{\pm\frac{x}{n\pi}}=1-\frac{x^2}{2n^2\pi^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

وعامل‌ها، باآغاز ازجایی، کسرهایی مثبت وکوچکتر از واحد می‌شوند.

۵) اتحاد زیررا (به‌ازای $0<q<1$) ثابت کنید (اولر):

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots=\frac{1}{(1-q)(-q^3)(1-q^5)\dots}$$

راهنمائی. تقارب هردو حاصل‌ضرب، به‌کمک ۵° ثابت می‌شود. حاصل‌ضرب اولی

را، به‌این صورت بنویسید:

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots}$$

۶) ثابت کنید ($\alpha>\beta$ برای)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}=0$$

برای این منظور، کافی است تباعد حاصل‌ضرب

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\beta+n}{\alpha+n}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}\right)$$

ویا (۷° را ببینید) تباعد رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}$$

ثابت شود، واین، به‌سادگی واز مقایسهٔ این رشته با رشتهٔ توافقی، نتیجه می‌شود.

یادداشت. این مثال، وهمچنین مثال بعدی، به‌این مناسبت آموزنده است که نشان می‌دهد که، منجرکردن تعیین حد واریانت (یا رشته)، به بررسی حاصل‌ضرب نامتناهی، با استفاده از گسترش نظریهٔ حاصل‌ضرب‌های نامتناهی، تا چه حد می‌تواند مفید باشد.

۷) به‌رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$ برمی‌گردیم. با این‌رشته، در ۳۷۰، ۲) (e) و ۳۷۸، ۱)(e) برخورد داشته‌ایم. مسألهٔ مربوط به‌رفتار این رشته، در انتهای $x=\frac{1}{e}$ از بازهٔ تقارب آن، همچنان باز است.

دراین حالت، رشتهٔ متناوب به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n}$$

که جمله‌های آن، ازلحاظ قدرمطلق، به‌طوریکنوا نزولی‌است. با یادآوری قضیهٔ لایب‌نیتس [۳۸۱]، می‌بینیم که نتیجه‌گیری مربوط به‌تقارب رشته، بستگی به‌وجود برابری زیردارد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n}=0$$

چون نسبت مقدار $(n+1)$ام این واریانت به‌مقدار nام آن، عبارت است از

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

بنابراین، می‌توان مسأله را، به‌صورت هم‌ارز آن، یعنی تعیین مقدار حاصل‌ضرب نامتناهی

$$\frac{1}{e}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

درآورد. با لگاریتم گرفتن، به‌دست می‌آید [۱۲۵، ۵)]:

$$\ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=$$
$$=-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

به‌نحوی که رشتهٔ لگاریتم‌های از نوع (۵) متباعد ودارای مجموع $-\infty$ است. دراین حالت (۷°)، مقدار حاصل‌ضرب نامتناهی (وبا آن، حد مطلوب) برابرصفرمی‌شود. رشته متباعد است.

۸) مسألهٔ مربوط به‌رفتار رشتهٔ فوق هندسی (هیپرژئومتریك) را به‌انجام می‌رسانیم

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

[۳۷۲ و ۳۷۸، ۴) را ببینید]. حالت $x=-1$ را، با فرض $-1\leqslant\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ درنظر می‌گیریم (واین، همان حالتی است که تاکنون بررسی نکرده‌ایم).

دراین‌جا، نسبت ضریب $(n+1)$ام به‌ضریب nام، برابراست با

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1-\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2}\quad(|\lambda_n|\leqslant L)\qquad(11)$$

این نسبت، برای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ n، مثبت است. فرض کنیم $\gamma-\alpha-\beta>-1$، آن‌وقت سرانجام کمتر ازواحد می‌شود. به‌این‌ترتیب، رشتهٔ

$$۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\alpha(\alpha+۱)\cdots(\alpha+n-۱)\cdot\beta(\beta+۱)\cdots(\beta+n-۱)}{n!\cdot\gamma(\gamma+۱)\cdots(\gamma+n-۱)} \quad (۱۲)$$

اگر از تعدادی جمله‌های اول آن صرف‌نظر کنیم، متناوب و با جمله‌هایی، از لحاظ قدرمطلق، نزولی است. در این‌جا هم، بهتراست، پیداکردن حد (قدرمطلق) جملهٔ عمومی را، به‌تعیین مقدار حاصل‌ضرب نامتناهی زیرمنجر کنیم:

$$\prod_{n=n_۰}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(۱+n)(\gamma+n)}\ ^*$$

اگر، همان‌طور که فرض کردیم، $۱-\gamma-\alpha-\beta>۰$، از (۱۱) بنابر ۷° نتیجه می‌شود که این حاصل‌ضرب دارای مقدار ۰ است. رشته متباعد است.

درحالت $۱-\gamma-\alpha-\beta=۰$، دستور (۱۱) به‌صورت

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(۱+n)(\gamma+n)}=۱+\frac{\lambda_n}{n^۲} \quad (|\lambda_n|\leqslant L)$$

درمی‌آید و، بنابرقضیهٔ ۵°، حاصل‌ضرب نامتناهی مخالف ۰ می‌شود و برای رشتهٔ (۱۲) شرط لازم تقارب ازبین می‌رود. رشته متباعد می‌شود.

بالاخره توانستیم رفتار رشتهٔ فوق هندسی را به‌پایان برسانیم. نتیجه‌ها رادرجدولی گرد می‌آوریم.

متقارب مطلق		$\lvert x\rvert<۱$
متباعد		$\lvert x\rvert>۱$
متقارب مطلق	$\gamma-\alpha-\beta>۰$	$x=۱$
متباعد	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant۰$	
متقارب مطلق	$\gamma-\alpha-\beta>۰$	$x=-۱$
متقارب غیرمطلق	$۰\geqslant\gamma-\alpha-\beta>-۱$	
متباعد	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant-۱$	

*) مقدار اولیهٔ $n_۰$ $n=n_۰$ آن‌قدر بزرگ فرض می‌شود تا همهٔ عامل‌ها مثبت شوند.

۹) ثابت کنید رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x^2-1)(x^2-2^2)\dots(x^2-n^2)$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای x، متقارب است، به‌شرطی که لااقل برای یک مقدار غیرصحیح $x=x_0$ متقارب باشد [ستیرلینگ (T. Stirling)].

اختلاف جمله‌های این رشته، با جمله‌های رشتهٔ متقارب

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\dots(x_0^2-n^2)$$

درعامل‌های

$$\frac{(x^2-1)(x^2-2^2)\dots(x^2-n^2)}{(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\dots(x_0^2-n^2)}$$

است که به‌ازای n به‌قدرکافی بزرگ، تغییری یکنوا دارند.

این می‌ماند که کران‌داربودن آن را ثابت کنیم (زیرا، در این صورت، می‌توان از معیار آبل استفاده کرد). برای این منظور، ساده‌تر ازهمه این است که به‌تقارب حاصل‌ضرب نامتناهی

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}$$

قانع شویم که اثبات آن را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۱۰) حاصل‌ضرب نامتناهی زیررا درنظر می‌گیریم (اولر):

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} \qquad (13)$$

به‌شرطی که x مخالف صفر ومخالف هرعدد صحیح منفی باشد.

عامل عمومی آن را، می‌توان به‌سادگی، این‌طور نمایش داد:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ازاین‌جا، بنابر (۸)، نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب متقارب (مطلق) است، تابع $\Gamma(x)$، که به‌این‌ترتیب معین می‌شود. بعد ازتابع‌های مقدماتی، یکی ازمهم‌ترین تابع‌هایی است که‌در آنالیز ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بعداً [درفصل چهاردهم، §۵] تعریف دیگری ازاین تابع را می‌آوریم وویژگی‌های آن را عمیق‌تر بررسی می‌کنیم.

چون حاصل‌ضرب جزئی nام، به‌این صورت است:

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\cdot\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

می‌توان درنظر گرفت

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \qquad (14)$$

با نوشتن رابطهٔ مشابه برای $\Gamma(x+1)$، به‌سادگی دیده می‌شود:

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+1+n}=x$$

ویا، رابطهٔ مهم وسادهٔ زیر

$$\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x) \qquad (15)$$

اگر x را برابر با عدد طبیعی m بگیریم، دستور بازگشتی زیرحاصل می‌شود:

$$\Gamma(m+1)=m\cdot\Gamma(m)$$

وچون $\Gamma(1)=1$ (به‌سادگی قابل تحقیق است)، به‌دست می‌آید:

$$\Gamma(m+1)=m!$$

اگر برابری‌های

$$\Gamma(x+1)=\Gamma(x)\cdot x=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}\quad\text{و}\quad e^{Cx}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}$$

را، که اولی از (۱۳) و (۱۵) نتیجه می‌شود ودومی به‌سادگی از ۴۰۰، ۶) به‌دست‌می‌آید، عضو به‌عضو درهم ضرب کنیم، بازهم یکی از دستورهای مهم برای تابع Γ پیدامی‌شود:

$$e^{Cx}.\Gamma(x+1)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

یا

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=e^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right).e^{-\frac{x}{n}} \qquad (16)$$

واین، دستور ویرشتراس است.

۱۱) مثال معروف تبدیل حاصل‌ضرب نامتناهی به رشتهٔ متعلق به اولر را می‌آوریم. اگرعددهای اول را، به‌ترتیب صعودی شماره‌گذاری کنیم:

$$p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5,\ \dots,\ p_k,\ \dots$$

درآن صورت، به‌ازای $x>1$، اتحاد زیردست است:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)\cdots}=$$

$$=1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{n^x}+\cdots$$

یا

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

به‌نحوی‌که حاصل‌ضرب، عبارت است از تابع $\zeta(x)$ ریمان [۳۶۵، ۲)].

با توجه به‌رابطهٔ مربوط به‌مجموع تصاعد هندسی، داریم:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\frac{1}{p_k^x}+\frac{1}{(p_k^2)^x}+\cdots+\frac{1}{(p_k^n)^x}+\cdots$$

اگر تعداد محدودی از این‌گونه رشته‌ها را ـ نظیر همهٔ عددهای اولی که از N تجاوز نمی‌کنند ـ درهم ضرب کنیم، حاصل‌ضرب جزئی چنین می‌شود:

$$P_x^{(N)}=\prod_{p_k\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}+\sum_{n=N+1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^x} \qquad (۱۷)$$

که در آن، علامت پریم، نشان می‌دهد که مجموع برای همهٔ عددهای طبیعی گسترش نمی‌یابد، بلکه فقط (با به‌حساب نیاوردن واحد) شامل عددهایی می‌شود که، در تجزیه به‌عامل‌های اول، تنها شامل عددهای اول آورده شده باشد (N عدد نخستین طبیعی، مسلماً، دارای این ویژگی هستند). از این‌جا، به‌طور مسلم

$$0<P_x^{(N)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

با توجه به‌تقارب رشتهٔ $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^x}$، عبارت سمت راست، معرف باقی‌ماندهٔ آن پس از جملهٔ Nام است و، به‌ازای $N\to\infty$، به‌سمت ۰ میل می‌کند؛ با گذر به‌حد، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۱۲) رابطهٔ (۱۷)، به‌ازای $x=1$ هم برقرار است؛ از آن‌جا

$$P_1^{(N)}=\prod_{p_n\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=H_n$$

به‌طوری که وقتی $N\to\infty$، این بار $P_1^{(N)}\to+\infty$، یعنی حاصل‌ضرب

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdots}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

متباعد می‌شود و دارای مقدار $+\infty$ است.

در واقع، اولر اثبات تازه‌ای از این مطلب داده است که، مجموعهٔ عددهای اول، مجموعه‌ای نامتناهی است (حکمی که، در واقع، در استدلال‌های خود، مورد استفاده قرار نداده‌ایم)؛ در واقع، اگر این مجموعه متناهی بود، برای حاصل‌ضرب هم مقداری متناهی به‌دست می‌آمد. اگر نتیجهٔ حاصل را، این‌طور بنویسیم:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0$$

در آن‌صورت، در ارتباط با ۵°، می‌توان دربارهٔ تباعد رشتهٔ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_k}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$$

هم نتیجه‌گیری کرد. این گزارهٔ مهم، به‌جز آن، خصوصیت دیگری از دنبالهٔ عددهای اول را هم به‌دست می‌دهد. [تأکید می‌کنیم که این حکم، به‌مراتب قوی‌تر از حکم مربوط به‌تباعد رشتهٔ توافقی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ است، زیرا در این‌جا، تنها صحبت بر سر بخشی ازجمله‌های آن است.]

۱۳) به‌طرز مشابهی (به‌ازای $x>1$)، اتحاد زیر ثابت می‌شود:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1+\frac{1}{7^x}\right)\left(1+\frac{1}{11^x}\right)\cdots\left(1\pm\frac{1}{p_{k+1}^x}\right)}=$$

$$=1-\frac{1}{3^x}+\frac{1}{5^x}-\frac{1}{7^x}+\frac{1}{9^x}-\cdots$$

که در آن، علامت $+$ یا $-$ در مخرج کسر سمت چپ، بستگی به آن دارد که عدد اول (فرد) به‌صورت $4n-1$ یا $4n+1$ باشد.

§۷. بسط تابع‌های مقدماتی

۴۰۳. بسط تابع‌ها به‌رشته‌های توانی. رشتهٔ تیلور. قبلاً، در ۳۷۹، رشته‌های توانی به‌صورت

$$\sum_{0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (1)$$

را ــ که برحسب توان‌های x مرتب شده‌است ــ مورد بررسی قرارداده‌ایم. اگر رشته‌های «همیشه متباعد» را کنار بگذاریم، برای این رشته‌ها، بازهٔ تقارب به‌مرکز $x=0$ از $-R$ تا R وجود دارد که در آن، شعاع تقارب $R>0$، برابر بی‌نهایت هم می‌تواند باشد. دو انتهای این بازه، برحسب حالت، ممکن است داخل در بازهٔ تقارب باشد یا نباشد.

رشته‌های توانی به‌صورت کلی‌تر

$$\sum_{0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \qquad (2)$$

را هم، که برحسب توان‌های $x-x_0$ (به‌جای x) مرتب شده‌اند، مورد مطالعه قرار می‌دهند. این رشته‌ها، در اساس، تفاوتی با رشته‌های به‌صورت (۱) ندارند، زیرا تنها با تغییر متغیر $y=x-x_0$، به‌صورت (۱) درمی‌آیند. برای رشتهٔ (۲) هم ــ اگر «همیشه متباعد» نباشد ــ بازهٔ تقارب وجود دارد، ولی این‌بار، با مرکز در نقطهٔ x_0 از x_0-R تا x_0+R، دو انتهای این بازه، مثل مورد (۱)، می‌توانند متعلق به بازهٔ تقارب باشند یا نباشند.

در بندهای بعد، ویژگی‌های رشته‌های توانی را ــ که از بسیاری جهت‌ها شباهت به‌چندجمله‌ای دارند ــ به تفصیل بررسی می‌کنیم. بخشی از یك رشتهٔ توانی، عبارت است از یك چندجمله‌ای و، همین مطلب، رشته‌های توانی را به‌وسیلهٔ راحتی برای محاسبه‌های تقریبی درمی‌آورد. در ارتباط با همهٔ این‌ها، مسألهٔ مربوط به‌امکان بسط یك تابع مفروض، برحسب توان‌های $x-x_0$ (ودرحالت خاص برحسب توان‌های x) یعنی تبدیل تابع به‌صورت رشته‌ای از گونهٔ (۲) یا (۱)، اهمیت زیادی پیدا می‌کند.

در این جا، به چنین بسط‌هایی از تابع‌های مقدماتی می‌پردازیم؛ ضمناً، برای این منظور، از دستور تیلور که به‌تفصیل در شماره‌های **۱۲۴-۱۲۶** دیده‌ایم، استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[x_0, x_0+H]$ یا $[x_0-H, x_0]$ $(H>0)$، دارای مشتق (پیوسته) از همهٔ مرتبه‌ها باشد. آن‌وقت، همان‌طور که در **۱۲۶** دیدیم، دستور زیر را، برای همهٔ مقدارهای x، در این بازه، خواهیم داشت:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x) \qquad (۳)$$

که در آن، جملهٔ متمم $r_n(x)$ می‌تواند به‌یکی از صورت‌هایی که در شمارهٔ **۱۲۶** دیدیم، درآید. ضمناً، n را می‌توانیم به‌دلخواه بزرگ بگیریم، یعنی این بسط را تا توان‌های به‌قدر دلخواه بزرگ $x-x_0$ ادامه دهیم.

این وضع، به‌طور طبیعی، ما را به‌فکر بسط نامتناهی زیر می‌اندازد:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \qquad (۴)$$

این رشته ــ جدا از این مطلب که آیا متقارب است و آیا مجموع آن، در واقع، همان

$f(x)$ است ــ به رشتهٔ تیلور تابع $f(x)$ معروف است. این رشته، به گونهٔ (۲) است و ضریب‌های آن

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots$$

به ضریب‌های تیلور موسوم‌اند.

چون تفاضل بین $f(x)$ و مجموع $n+1$ جملهٔ رشتهٔ تیلور ــ به‌صورت (۳) ــ برابر است با $r_n(x)$، روشن است: برای آن‌که، به‌ازای مقداری از x، حقیقتاً بسط (۴) حاصل شود، لازم و کافی است که جملهٔ متمم $r_n(x)$ دستور تیلور ــ به‌ازای این مقدار x ــ با ترقی n به‌سمت صفر میل کند:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \qquad (5)$$

برای بررسی این مسأله که، آیا این برابری برقرار است و به‌ازای چه‌مقدارهایی از x، شکل‌های مختلفی از جملهٔ متمم $r_n(x)$ را ــ که معرف بستگی آن با n هستند ــ لازم داریم.

بیش از همه، حالت $x_0=0$ پیش می‌آید، یعنی حالتی که $f(x)$، مستقیماً، برحسب توان‌های x بسط داده شده باشد:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n+\ldots \qquad (6)$$

این رشته، که معمولاً آن‌را رشتهٔ ماکلورن می‌نامند، به‌صورت (۱) است و با ضریب‌های

$$a_0=f(0),\quad a_1=\frac{f'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots \qquad (7)$$

جملهٔ متمم $r_n(x)$، با توجه به‌فرض $x_0=0$، چنین است [۱۲۶]:

شکل لاگرانژ: $$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (8)$$

شکل کوشی: $$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} \qquad (9)$$

ضمناً، دربارهٔ ضریب θ، تنها این‌را می‌دانیم که بین ۰ و ۱ قرار دارد و ممکن است با تغییر مقدار x یا n، تغییر کند. (حتی، با استفاده از شکل‌های مختلف $r_n(x)$ هم، مقدار θ تغییر

می‌کند).

اکنون به‌بسط‌های مشخص می‌پردازیم.

۴۰۴. بسط تابع‌های اصلی مثلثاتی و سایر تابع‌ها، به‌رشتهٔ توانی. ابتدا، گزارهٔ سادهٔ زیر را، که برای همهٔ حالت‌های مهم مفید است، ثابت می‌کنیم:

اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[0, H]$ یا $[-H, 0]$ $(H>0)$، دارای مشتق همهٔ مرتبه‌ها باشد و همهٔ این مشتق‌ها، به‌ازای مقدارهای x در بازهٔ مفروض، از لحاظ قدرمطلق، با یک عدد کران‌دار باشند:

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant L \qquad (10)$$

(L، بستگی به n ندارد)، در آن‌صورت، بسط (۶) برای تمامی بازه، ممکن است.

در واقع، با اختیار جملهٔ متمم $r_n(x)$ به‌شکل لاگرانژ [(۸) را ببینید]. بنابر (۱۰) داریم:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant L\cdot\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

وقتی‌که n به‌طور نامحدود ترقی کند، عبارت $\dfrac{H^{n+1}}{(n+1)!}$ به‌سمت ۰ میل می‌کند [۱،۳۵)]؛ ضمناً این مطلب [بنابر ۳۶۴، ۵°]، از تقارب رشتهٔ

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

هم نتیجه می‌شود [۳۷۰، ۳) (a)]. ولی در این‌صورت، $r_n(x)$ هم دارای حد صفر است که حکم ما را ثابت می‌کند.

(a) این گزاره را، می‌توان دربارهٔ تابع‌های

$$f(x)=e^x,\ \sin x,\ \cos x$$

در بازهٔ دلخواه $[-H, H]$ به‌کار برد، زیرا مشتق‌های آن‌ها، به‌ترتیب، برابر است با

$$f^{(n)}(x)=e^x,\ \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

که از لحاظ قدرمطلق، در فاصلهٔ مفروض، محدود هستند: به‌مقدار e^H برای تابع e^x و به‌واحد برای تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$.

چون ضریب‌های تیلور را، برای این تابع‌ها، در ۱۲۵، ۱) تا ۳)، محاسبه کرده‌ایم،

می‌توانیم بسطهای زیر را بلافاصله بنویسیم:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (11)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots \qquad (12)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \qquad (13)$$

که همهٔ آن‌ها، به‌ازای هر مقدار دلخواه x، برقرارند.

(b) بسط تابع‌های اصلی هذلولی را هم، به همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد، ولی ساده‌تر است اگر از تعریف‌های

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

استفاده کنیم و به‌کمک جمع یا تفریق عضو به‌عضو رشتهٔ (۱۱) با رشتهٔ زیر ــ که از رشتهٔ (۱۱) و با تبدیل x به $-x$ ــ به‌دست می‌آید ــ بسطها را به‌دست آوریم:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

به‌این ترتیب، نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

(c) گزاره‌ای را که، در ابتدا، ثابت کردیم، نمی‌توان دربارهٔ تابع $y = \operatorname{arc}tg\, x$ به‌کار برد. درواقع، عبارت کلی، برای مشتق مرتبهٔ nام این تابع، چنین است [۸، ۱۱۶]:

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y . \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (14)$$

که وجود مراز مشترك را، برای همهٔ $y^{(n)}$ها، تضمین نمی‌کند.

از آن‌جا که رشتهٔ تیلور نظیر [۱۲۵، ۶] را ببینید]

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\dots$$

تنها در بازهٔ $[-1,1]$ متقارب است*، صحت از مقدار تابع $\operatorname{arc} tgx$، در بیرون این بازه، معنایی ندارد. برای $|x|\leqslant 1$، از روی دستور لاگرانژ (۸) (و با به‌حساب آوردن (۱۴)) داریم:

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{\left|\cos^{n+1}y_\theta\cdot\sin(n+1)\left(y_\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{n+1}|x|^{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}$$

که در آن $y_\theta=\operatorname{arc} tg\theta x$. از این‌جا روشن است که $r_n(x)\to 0$، به‌نحوی که برای همهٔ مقدارهای x از بازهٔ $[-1,1]$، بسط زیر را داریم:

$$\operatorname{arc} tgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\dots \qquad (۱۵)$$

یکبار دیگر تأکید می‌کنیم که، هر چند $\operatorname{arc} tgx$ در بیرون این بازه مفهوم معینی دارد، ولی بسط (۱۵)، در آن‌جا وجود ندارد، زیرا این رشته، در بیرون بازهٔ $[-1,1]$، دارای مجموعی نیست.

اگر در رشتهٔ (۱۵)، $x=1$ قرار دهیم، به‌رشتهٔ معروف لایب نیتس می‌رسیم:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}+\dots \qquad (۱۶)$$

و این، نخستین رشته‌ای است که بسط عدد π را به‌دست می‌دهد.

۴۰۵. رشته‌های لگاریتمی. اگر $\ln(1+x)\ (x>-1)$ را، به‌عنوان تابع $f(x)$ در نظر بگیریم، رشتهٔ تیلور نظیر آن، چنین خواهد بود [۱۲۵، ۵]:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\dots$$

این رشته، تنها در بازهٔ $[-1,1)$ متقارب است**، یعنی فقط به‌ازای این‌مقدارها، بررسی

---

*) از روی معیار دالامبر [۳۷۷]، می‌توان حکم کرد که این رشته، به‌ازای $|x|<1$ متقارب (مطلق) و به‌ازای $|x|>1$ متباعد است. تقارب (غیرمطلق) به ازای $x=\pm 1$، از قضیهٔ لایب نیتس [۳۸۱] نتیجه می‌شود.

**) پاورقی قبل‌را ببینید. به‌ازای $x=-1$ (با تقریب‌علامت) به‌رشتهٔ توافقی متباعدمی‌رسیم.

جملهٔ متمم $r_n(x)$، معنا دارد.

ابتدا، جملهٔ متمم را به‌شکل لاگرانژ (۸) در نظر می‌گیریم. داریم:

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

[۱۱۶، ۳)]، بنابراین

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\quad(0<\theta<1)$$

اگر داشته باشیم $0\leqslant x\leqslant 1$، آخرین عامل‌ضرب از واحد تجاوز نمی‌کند و در نتیجه

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

به‌نحوی که ($n\to\infty$ به‌ازای) داریم: $r_n(x)\to 0$.

ولی برای $x<0$، رفتار این عامل ضرب روشن نیست و، برای بررسی جملهٔ متمم در این حالت، باید به‌شکل کوشی متوسل شویم [(۹) را ببینید]:

$$r_n(x)=(-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\quad(0<\theta<1)$$

به نحوی که

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

چون به ازای $x>-1$ داریم $1+\theta x>1-\theta$، بنابراین عامل‌ضرب آخر کوچکتر از واحد است و، در نتیجه، تنها در حالت $|x|<1$، آشکارا $r_n(x)\to 0$.

جالب این‌که، هرچند شکل کوشی مسأله را کاملاً برای همهٔ مقدارهای x واقع بین -1 و 1 به‌پایان می‌رساند، ولی به‌ازای $x=1$ تکلیف را روشن نمی‌کند. در این‌حالت داریم:

$$|r_n(1)|<(1-\theta)^n$$

و با توجه به‌امکان تغییر θ (همراه با تغییر n)، نمی‌توان نتیجه گرفت $(1-\theta)^n\to 0$.

به این ترتیب، در مجموع، نتیجه می‌گیریم که برای همهٔ مقدارهای x از بازهٔ $(-1, 1]$ داریم:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad (17)$$

که در حالت خاص $x=1$، رشتهٔ آشنای زیر به‌دست می‌آید:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \qquad (18)$$

از رشتهٔ (۱۷)، می‌توان بسط‌های سودمند دیگری را هم به‌دست آورد. مثلاً با تبدیل x به $-x$ و با کم‌کردن جمله به جملهٔ رشتهٔ حاصل، از رشتهٔ (۱۷) (و ضمناً، با فرض $|x|<1$)، به‌این رشته می‌رسیم:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\cdots+\frac{1}{2m+1}x^{2m}+\cdots\right) \qquad (19)$$

۴۰۶. دستور ستیرلینگ. به‌عنوان نمونه، نشان می‌دهیم که چگونه، به کمک رابطهٔ (۱۹)، می‌توان دستورمهمی از آنالیز را، که به‌دستورستیرلینگ(J. Stirling)معروف است، پیدا کرد.

در (۱۹) فرض می‌کنیم $x=\frac{1}{2n+1}$، که در آن، n عدد طبیعی دلخواهی است. در این‌صورت

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n-1}}=\frac{n+1}{n}$$

و به‌بسط زیر می‌رسیم:

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right] \qquad (20)$$

که می‌توان آن‌را، این‌طور نوشت:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots$$

این عبارت، به‌روشنی، بزرگتر از واحد وکوچکتر از

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

است و بنابراین

$$۱<\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right)<۱+\frac{۱}{۱۲n(n+۱)}$$

که اگر آنتی‌لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$e<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+\frac{۱}{۲}}<e^{۱+\frac{۱}{۱۲n(n+۱)}}$$

اکنون، واریانت $a_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{۱}{۲}}}$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\frac{a_n}{a_{n+۱}}=\frac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+\frac{۱}{۲}}}{e}$$

و از نابرابری‌های قبل نتیجه می‌شود:

$$۱<\frac{a_n}{a_{n+۱}}<e^{\frac{۱}{۱۲n(n+۱)}}=\frac{e^{\frac{۱}{۱۲n}}}{e^{\frac{۱}{۱۲(n+۱)}}}$$

چون از یك طرف $a_n>a_{n+۱}$ و از طرف دیگر

$$a_n.e^{\frac{۱}{۱۲n}}<a_{n+۱}.e^{\frac{۱}{۱۲(n+۱)}}$$

بنابراین، با ترقی n، واریانت a_n (که از پایین، و مثلاً بـا صفر، کران‌دار است) تنزل می‌کند و به‌سمت حـد متناهی a میل می‌کند؛ ضمناً واریانت $a_n.e^{\frac{۱}{۱۲n}}$ ترقی می‌کند و، معلوم است که، به‌سمت همان حد a میل می‌کند (زیرا $e^{-\frac{۱}{۱۲n}}\to ۱$). چون برای n دلخواه، نابرابری‌های

$$a_n^{\frac{۱}{۱۲n}}<a<a_n$$

برقرارند، پس عدد θ، محصور بین صفر و یك، را می‌توان طوری پیدا کرد کـه داشته باشیم:

$$a = a_n \cdot e^{-\frac{\theta}{۱۲n}} \quad \text{یا} \quad a_n = a \cdot e^{\frac{\theta}{۱۲n}}$$

(توجه کنیم که عدد θ، به‌طور کلی، بستگی به n دارد). با به‌یاد آوردن تعریف متغیر a_n داریم:

$$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{۱۲n}} \quad (۰<\theta<۱) \qquad (۲۱)$$

این می‌ماند که مقدار ثابت a را معین کنیم. برای این منظور، دستور والیس [۳۱۷] را یادآور می‌شویم که می‌تواند به‌این صورت نوشته شود:

$$\frac{\pi}{۲} = \lim_{n\to} \frac{۱}{۲n+۱}\left[\frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!}\right]$$

مقدار داخل کروشه را، به‌ترتیب زیر، تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!} = \frac{[۲n!!]^۲}{(۲n)!} = \frac{۲^{۲n}(n!)^۲}{(۲n)!}$$

اگر در دستور (۲۱) به‌جای $n!$ مقدار $(۲n)!$ را درنظر بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$(۲n)! = a\sqrt{۲n}\left(\frac{۲n}{e}\right)^{۲n} \cdot e^{\frac{\theta'}{۲۴n}} \quad (۰<\theta'<۱)$$

که بعد از تبدیل‌های مقدماتی به‌دست می‌آید:

$$\frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!} = a\sqrt{\frac{n}{۲}} \cdot e^{\frac{۴\theta-\theta'}{۲۴n}}$$

به‌طوری که

$$\frac{\pi}{۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲n+۱} a^۲ \cdot \frac{n}{۲} \cdot e^{\frac{۴\theta-\theta'}{۱۲n}} = \frac{a^۲}{۴}$$

از آن‌جا

$$a^۲ = ۲\pi \quad \text{و} \quad a = \sqrt{۲\pi}$$

با قراردادن این مقدار a در دستور (۲۱)، به‌دستور ستیرلینگ می‌رسیم:

$$n! = \sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{۱۲n}} \quad (۰<\theta<۱)$$

که به‌ما امکان می‌دهد، برای مقادیر بزرگ n، مقدار $n!$ را برآورد کنیم.

به‌عنوان تمرین، به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم، مجموع رشته زیررا ـ که تقارب آن درشمارهٔ ۳۶۷، ۹(b) ثابت شده است ـ پیدا کند:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right]$$

راهنمائی. مجموع جزئی nام را محاسبه وآن را به‌کمك دستور ستیرلینگ تبدیل کنید و سپس، به‌سمت حد عبور کنید، پاسخ: $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

۴۰۷. رشتهٔ دوجمله‌ای. تابع $f(x)=(1+x)^m$ را درنظر می‌گیریم، که درآن، m عدد حقیقی دلخواه مخالف صفر ومخالف همهٔ عددهای طبیعی است (وقتی‌که n عددی طبیعی باشد، بسط متناهی تابع، ازروی دستور نیوتون به‌دست می‌آید). دراین حالت، رشتهٔ تیلور، به‌این صورت درمی‌آید [۱۲۵، ۴)]:

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\times 2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\times 2\times\cdots\times n}x^n+\cdots$$

این رشته را، رشتهٔ دوجمله‌ای وضریب‌های آن را، ضریب‌های دوجمله‌ای می‌گویند. با توجه به‌شرط‌هایی‌که برای m داشتیم، هیچ‌یك ازاین ضریب‌ها برابر صفر نمی‌شود (اگر m عددی طبیعی بود، ضریب x^{m+1} وهمهٔ ضریب‌های بعدی برابر صفر می‌شد). به‌کمك معیار دالامبر [۳۷۷]، به سادگی ثابت می‌شودکه، به‌ازای $|x|<1$، رشتهٔ دوجمله‌ای متقارب (مطلق)و، به‌ازای $|x|>1$، متباعد است. جملهٔ متمم $r_n(x)$ را، با فرض $|x|<1$ بررسی می‌کنیم. و، ضمناً، برای این بررسی از شکل کوشی (۹) استفاده می‌کنیم (شکل لاگرانژ دراین‌جا هم، برای همهٔ مقدارهای x جواب نمی‌دهد).

چون

$$f^{(n+1)}(x)=m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1}$$

خواهیم داشت:

$$r_n(x)=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\times 2\times\cdots\times n}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

که آن را، باگروه‌بندی عامل‌ها، به‌این صورت درمی‌آوریم:

$$r_n(x)=\frac{(m-1)(m-2)\cdots(\overline{m-1}-n+1)}{1\times 2\times\cdots\times n}x^n\times$$

$$\times mx(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n}$$

از این سه‌عامل، اولی به‌صورت جملهٔ عمومی رشتهٔ دوجمله‌ای، نظیر توان $m-1$، می‌باشد؛ چون به‌ازای $|x|<1$، رشتهٔ دوجمله‌ای ــ برای هرنمای دلخواه ــ متقارب است، بنابراین، این عامل، به ازای $n\to\infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند. عامل دوم، از لحاظ قدرمطلق بین مرزهای

$$|mx|\cdot(1-|x|)^{m-1} \quad \text{و} \quad |mx|\cdot(1+|x|)^{m-1}$$

مستقل از n، واقع است؛ وسومی، همچون شمارهٔ ۴۰۵، کمتر از واحد است. به‌این ترتیب، $r_n(x)\to 0$؛ یعنی برای $|x|<1$، این بسط را داریم:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\times 2}x^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\times 2\times\cdots\times n}x^n+\cdots \qquad (۲۲)$$

که بازهم، به‌نام نیوتون، وابسته است.

اکنون مسأله‌را، به‌ازای مقدارهای $x=\pm 1$، مورد بررسی قرارمی‌دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود که رشتهٔ دوجمله‌ای، حالت خاصی ازرشتهٔ فوق هندسی است و، ازآن، به‌ازای $\alpha=-m$، $\beta=\gamma$ وتبدیل x به $-x$ ــ حاصل می‌شود. درنتیجه (ازروی جدول ۸، ۴۰۲))، می‌توان به‌سادگی، جدول زیر را، دربارهٔ رفتار رشتهٔ دوجمله‌ای، در دوانتهای $x=\pm 1$ ازبازهٔ تقارب آن، تشکیل داد:

متقارب مطلق	$m>0$	$x=1$
متقارب غیرمطلق	$0>m>-1$	
متباعد	$m\leqslant -1$	
متقارب مطلق	$m>0$	$x=-1$
متباعد	$m<0$	

می‌توان ثابت کرد که، درهمهٔ حالت‌های تقارب رشتهٔ دوجمله‌ای، مجموع آن‌برابر $(1+x)^m$ است. دراین‌جا به‌این مطلب نمی‌پردازیم واز بررسی دقیق جملهٔ متمم پرهیز

می‌کنیم، زیرا به‌زودی [۴۳۷، ۶°]، آن را ازیکی ازقضیه‌های کلی نتیجه خواهیم گرفت.

به‌برخی از حالت‌های خاص رشتهٔ دوجمله‌ای، و مثلاً $m=-1$ و 1 و $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$، اشاره می‌کنیم.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^{n-1}x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$$

(که یك تصاعد هندسی معمولی است). سپس

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)\qquad(۲۳)$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1)\qquad(۲۴)$$

یادآوری این نکته مهم است که، درحالت گویا بودن m، مجموع رشتهٔ دوجمله‌ای همیشه مقدار حسابی رادیکال را به‌دست می‌دهد.

یادداشت I. برهمین‌اساس، بسط جالب زیر ــ که‌متعلق به‌شلومیلخ (O.Schlömilch) است ــ ساخته شده است. اگر در (۲۳) فرض کنیم $x=-y^2\ (-1\leqslant y\leqslant 1)$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}y^{2n-1}$$

حالا، اگر به‌جای y دراین عبارت، $\frac{2z}{1+z^2}$ را قرار دهیم، که در آن z می‌تواند مقدارهای بین $-\infty$ و $+\infty$ را اختیار کند، معلوم می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^{2n-1}=\begin{cases}z & (|z|\leqslant 1)\\ \frac{1}{z} & (|z|>1)\end{cases}$$

این مثال، ازاین جهت جالب است که برای تابع‌هایی که در بازه‌های مختلف تعریف شده‌اند و عبارت‌های تحلیلی مختلف z و $\frac{1}{z}$ را دارند، می‌توان یک عبارت تحلیلی، به‌صورت مجموع رشته، به‌دست داد [با ۴۶؛ ۳۶۳، ۵) مقایسه کنید].

یادداشت II. درهمهٔ مثال‌های بالا، چنین بود که بسط تابع به‌رشتهٔ تیلور، برای همهٔ مقدارهایی از x که به‌ازای آن‌ها رشتهٔ تیلور متقارب می‌شود، مجموع رشته برابر با همان تابع اصلی است. بنابراین، ممکن است برای خواننده این گمان پیدا شود که، به‌طور کلی، کافی است تنها تقارب رشته ثابت شود تا بسط (۴) یا (۶) محقق باشد، بدون این که نیازی به آزمایش رابطهٔ (۵) داشته باشیم.

ولی، در عمل این‌طور نیست. اگر، مثلاً، به‌تابعی که در یادداشت شمارهٔ ۱۳۸ بررسی کرده‌ایم، برگردیم:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\ (x\neq 0) \quad \text{و} \quad f(0)=0$$

در آن صورت، برای آن، به‌طوری که دیده‌ایم، مشتق‌های همهٔ مرتبه‌ها، حتی برای $x=0$، وجود دارند، ولی همگی در این نقطه برابر صفر می‌شوند ـ رشتهٔ تیلور، با همهٔ ضریب‌های برابر صفر، مسلماً در همه‌جا متقارب است؛ ولی حتی برای یک مقدار x ـ به‌جز $x=0$ ـ مقدارهای تابع اصلی به‌دست نمی‌آید.

۴۰۸. بسط سینوس و کسینوس به حاصل‌ضرب‌های نامتناهی. در بالا، با بسط تابع‌های مقدماتی مهم، به‌رشته‌های نامتناهی ـ که برحسب توان‌های x مرتب شده‌اند ـ یعنی، با درآوردن این تابع‌ها به صورت «چندجمله‌ای‌های نامتناهی»، آشنا شدیم. اکنون تلاش می‌کنیم تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$ را، به‌صورت حاصل‌ضرب‌های نامتناهی، درآوریم، که درواقع می‌توان آن‌ها را، متناظر با تجزیهٔ «چندجمله‌ای‌های نامتناهی» به‌صورت ضرب عامل‌ها دانست.

از یک رابطهٔ کمکی آغاز می‌کنیم. رابطهٔ مواور* را درجبر داریم:

$$(\cos z+i\sin z)^m=\cos mz+i\sin mz$$

که در آن، m را عددی طبیعی به‌حساب خواهیم آورد. اگر پرانتز سمت‌چپ را ـ ازروی قاعدهٔ دوجمله‌ای ـ باز کنیم و ضریب‌های «واحد موهومی» $i=\sqrt{-1}$ را، در دو طرف، برابر قراردهیم، داریم:

---

*) مثلاً، ۴۵۳ را ببینید.

$$\sin mz = m\cos^{m-1}z.\sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}\cos^{m-3}z\sin^3 z + \dots$$

اگر $m = 2n+1$، عددی فرد باشد، با عوض‌کردن توان‌های زوج کسینوس، از روی رابطهٔ $\cos^{2k}z = (1-\sin^2 z)^k$، نتیجه را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\sin(2k+1)z = \sin z.P(\sin^2 z) \qquad (25)$$

که در آن، $P(u)$، چندجمله‌ای صحیح درجهٔ n است.

اگر ریشه‌های این چندجمله‌ای را u_1، u_2، ...، u_n بنامیم، می‌توان آن را، به‌ترتیب زیر، تجزیه کرد:

$$P(u) = a(u-u_1)\dots(u-u_n) = A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\dots\left(1-\frac{u}{u_n}\right)$$

ریشه‌های u_1، u_2، ...، u_n را می‌توان، از (۲۵) به‌سادگی پیدا کرد: اگر z مقداری باشد که $\sin(2n+1)z$ را برابر صفر کند، ولی $\sin z$ مخالف صفر باقی بماند، در آن صورت $\sin^2 z$ الزاماً ریشهٔ چندجمله‌ای $P(u)$ می‌شود. روشن است که مقدارهای

$$z = \frac{\pi}{2n+1}, 2\frac{\pi}{2n+1}, \dots, n\frac{\pi}{2n+1}$$

که بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ واقع‌اند و به‌ترتیب صعودی مرتب شده‌اند، متناظرند با ریشه‌های صعودی (و بنابراین، مختلف)

$$u_1 = \sin^2\frac{\pi}{2n+1},\ u_2 = \sin^2 2\frac{\pi}{2n+1},\ \dots,\ u_n = \sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}$$

بالاخره، ضریب $A = P(0)$، مانند حد نسبت $\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}$ به‌ازای $z\to 0$ به دست می‌آید؛ یعنی $A = 2n+1$.

به‌این ترتیب، به‌رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\sin(2n+1)z = (2n+1)\sin z\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\dots\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$

که با گذاشتن $z = \frac{x}{2n+1}$، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right) \qquad (۲۶)$$

x رامخالف ۰، $\pm\pi$، $\pm 2\pi$، ... می‌گیریم، به‌طوری که‌داشته باشیم: $\sin x\neq 0$.
عدد طبیعی k را با شرط $(k+1)\pi>|x|$ اختیار می‌کنیم و $k<n$ می‌گیریم. حالا $\sin x$ را به‌صورت ضرب زیر درمی‌آوریم:

$$\sin x=U_k^{(n)}.V_k^{(n)} \qquad (۲۷)$$

که در آن

$$U_k^{(n)}=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 k\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$

که تنها شامل k عامل از پرانتزها است، و

$$V_k^{(n)}=\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(k+1)\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right)$$

که شامل همهٔ عامل‌های باقی‌مانده است.

فعلاً k را ثابت می‌گیریم؛ حد $U_k^{(n)}$ را، به‌ازای $n\to\infty$، به‌سادگی می‌توان پیدا کرد، چرا که این عبارت، از تعداد معین ومحدودی عامل تشکیل شده است. از آن‌جا که

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}=x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 h\dfrac{\pi}{2n+1}}=\frac{x^2}{h^2\pi^2}\quad(h=1,2,\ldots,k)$$

بنابراین

$$U_k=\lim_{n\to\infty}U_k^{(n)}=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

باتوجه به (۲۷)، حد $V_k=\lim_{n\to\infty}V_k^{(n)}$ هم وجود دارد؛ ضمناً $\sin x=U_k\cdot V_k$. به‌برآورد V_k می‌پردازیم.

می‌دانیم که برای $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\frac{2}{\pi}\varphi<\sin\varphi<\varphi$$

[۵۴، ۹)؛ ۱۳۳، ۱)]. بنابراین

$$\sin^2\frac{x}{2n+1}<\frac{x^2}{(2n+1)^2}$$

و

$$\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1}>\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{h^2\pi^2}{(2n+1)^2}\quad(h=k+1,\ldots,n)$$

به‌نحوی که

$$1>V_k^{(n)}>\left(1-\frac{x^2}{4(k+1)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)\qquad(28)$$

حاصل‌ضرب نامتناهی

$$\prod_{h=h_0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4h^2}\right)$$

(که در آن، h_0 طوری انتخاب شده است که داشته باشیم: $4h_0^2>x^2$) متقارب است، زیرا

رشتهٔ $\sum_{h=h_0}^{\infty} \frac{x^2}{4h^2}$ متقارب است [۴۰۱، قضیهٔ ۵°]. بدین‌ترتیب، باقی‌ماندهٔ حاصل‌ضرب

$$\bar{V}_k = \prod_{h=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4h^2}\right)$$

به‌ازای $k \to \infty$، باید به‌سمت ۱ میل کند [۴۰۱، ۲°]. روشن است که، اگر بنویسیم

$$1 > V_k^{(n)} > \bar{V}_k$$

تنها نابرابری دوم (۲۸) را تقویت کرده‌ایم. با عبور به‌حد (برای مقدار ثابت k)، وقتی $n \to \infty$، داریم:

$$1 > V_k \geqslant \bar{V}_k$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود

$$\lim_{k\to\infty} V_k = 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} U_k = \sin x$$

و، به‌این‌ترتیب، به‌بسط معروفی می‌رسیم که، برای نخستین‌بار، به‌وسیلهٔ اولر پیدا شد:

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) =$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \cdots \qquad (29)$$

معلوم است که این بسط، برای مقدارهای ۰، $\pm\pi$، $\pm 2\pi$، ... برای x هم، که قبلاً استثنا کردیم، برقرار است، زیرا در آن صورت، هردوطرف برابر صفر می‌شود. به‌سادگی دیده می‌شود که عامل‌های ضرب متفاوت، متناظر با ریشه‌های مختلف $\sin x$ هستند*.

اگر دراین بسط، $x = \frac{\pi}{2}$ قراردهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

ازآن‌جا، دوباره، دستور والیس [۳۱۷؛ با ۴۰۰، ۲) مقایسه شود] به‌دست می‌آید.

کاربرد دیگری از این بسط را می‌آوریم؛ اگر در آن، x را به πx تبدیل کنیم،

---

*) دربارهٔ امکان جابه‌جاکردن عامل‌های ضرب، ۴۰۲. ۴) را ببینید.

خواهیم داشت:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

اگر تعریف تابع $\Gamma(x)$ [۴۰۲، (۱۳)] را به‌یاد آوریم:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

ورابطهٔ $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ را درنظر بگیریم [۴۰۲، (۱۵)]، آن‌وقت

$$\Gamma(1-x) = -x \cdot \Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}}{1-\frac{x}{n}}$$

و به‌سادگی، به‌رابطهٔ زیر، که به دستور تکمیلی معروف است، می‌رسیم:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (۳۰)$$

که بازهم به‌وسیلهٔ اولر پیدا شده است وبـرای مقدارهای دلخواه وغیرصحیح x برقرار است*.

شبیه بسط $\sin x$، می‌توان بسط $\cos x$ را هم به‌دست آورد.

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right)$$

که ریشه‌های $\cos x$، یعنی $\pm \frac{2n-1}{2}\pi$، را ظاهرمی‌کند. همین بسط را، می‌توان از بسط $\sin x$ و از روی رابطه‌های زیرپیداکرد.

---

*) اگر دراین‌جا $x = \frac{1}{2}$ قراردهیم، به‌رابطهٔ $\pi = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$ می‌رسیم، زیـرا بـرای $x > 0$ داریم: $\Gamma(x) > 0$ و، در نتیجه، $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) \quad \text{یا} \quad \cos x = \frac{\sin ۲x}{۲\sin x}$$

بالاخره، باید از بسطهای

$$\operatorname{sh} x = x\cdot\prod_{n=۱}^{\infty}\left(۱+\frac{x^۲}{n^۲\pi^۲}\right) \text{ و } \operatorname{ch} x = \prod_{n=۱}^{\infty}\left(۱+\frac{x^۲}{\left(\frac{۲n-۱}{۲}\pi\right)^۲}\right) \qquad (۳۱)$$

نام بردکه می‌توان آن‌ها را، با تبدیل‌های مشابهی، ثابت کرد.

§۸. محاسبه‌های تقریبی به‌کمك رشته‌ها
تبدیل رشته‌ها

۴۰۹. یادداشت‌های کلی. روی نمونهٔ بسطهای مشخص، روشن می‌کنیم که چگونه می‌توان از رشته‌های نامتناهی، برای محاسبه‌های تقریبی استفاده کرد. درمقدمه، یادداشت‌هایی کلی، دربارهٔ رشته‌ها، داریم.

اگر عدد مجهول A، به‌صورت رشتهٔ زیر داده شده باشد:

$$A = a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_n + \cdots$$

که در آن، $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، عددهائی (معمولاً گویا) به‌سادگی محاسبه‌پذیرند. به‌تقریب، فرض می‌کنیم:

$$A \doteq A_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

که در واقع، از بقیهٔ جمله‌ها، یعنی

$$\alpha_n = a_{n+۱} + a_{n+۲} + \cdots$$

صرف‌نظر کرده‌ایم. وقتی که n به‌قدرکافی بزرگ باشد، این خطا، به‌دلخواه، کوچك می‌شود، به‌طوری که A_n، با دقت دلخواه از پیش داده شده، جای A را می‌گیرد. با همهٔ این‌ها، باید امکانی برای برآورد باقی‌ماندهٔ α_n پیدا کنیم تا بتوانیم، به‌موقع، به محاسبهٔ مجموع جزئی لازم، وقتی که به‌تقریب و با دقت مطلوب مجموع مورد نظر را به‌دست می‌دهد، بپردازیم.

اگر رشتهٔ موردنظر متناوب و، ضمناً، با جمله‌های از لحاظ قدرمطلق، به‌طور یکنوا نزولی باشد («نوع لایب‌نیتسی»)، درآن‌صورت به‌طوری که می‌دانیم [۳۸۱، یادداشت]،

باقی‌مانده دارای علامت جملهٔ اول و، از لحاظ قدرمطلق، کوچکتر از آن می‌باشد. این برآورد، چنان ساده است که جایی برای بحث بیشتر باقی نمی‌گذارد.

در حالت رشته‌های مثبت، چگونگی کار، کمی پیچیده‌تر می‌شود.

در این حالت، معمولاً کوشش می‌شود تا رشتهٔ مثبت دیگری پیدا شود که به‌سادگی جمع‌پذیر و جمله‌های آن، از جمله‌های رشتهٔ موردنظر، بزرگتر باشد و، سپس، مجموع جمله‌های باقی‌ماندهٔ این رشته را برآورد می‌کنند.

مثلاً برای رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$، می‌توان به‌دست آورد:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^2}<\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}=\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}$$

(این برآورد، همان است که در **۳۷۳** (۱۱)، به کمک انتگرالگیری به‌دست آوردیم). همچنین، برای رشتهٔ $1+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m!}$ داریم:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}=\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots m}<\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{m-n}}=\frac{1}{n!n}$$

(در واقع، از همین برآورد برای محاسبهٔ عدد e در **۳۷** استفاده کردیم).

معمولاً، عدد تقریبی A به‌صورت دهدهی جست و جو می‌شود، ولو این که جمله‌های رشته، با عددهای دهدهی بیان نشده باشند. بنابراین، وقتی که آن‌ها را به‌کسر دهدهی تبدیل و سپس گرد می‌کنیم، سرچشمهٔ تازه‌ای برای خطا پیدا می‌شود که باید آن را هم به‌حساب آورد.

این نکته را هم یادآوری کنیم که، هر رشته‌ای که مجموعی برابر A داشته باشد برای محاسبهٔ عملی این عدد مناسب نیست (حتی، اگر جمله‌های آن ساده باشند و برآورد باقی‌مانده هم، به‌سادگی انجام پذیرد). مساله اصلی، در سرعت تقارب، یعنی سرعت نزدیک شدن مجموع‌های جزئی به‌عدد A است.

برای مثال، این رشته‌ها را درنظر می‌گیریم [**۴۰۴**، (۱۶) و **۴۰۵**، (۱۸) را ببینید]:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \quad \text{و} \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

که به‌ترتیب عبارتند از بسطهای $\frac{\pi}{4}$ و $\ln 2$. برای این که، به کمک آن‌ها، این عددها را،

مثلاً، با تقریب $\frac{۱}{۱۰^۵}$ محاسبه کنیم، باید پنجاه هزار جمله را در حالت اول و صد هزار جمله را درحالت دوم، با هم جمع کنیم؛ و روشن است که، جز با یاری ماشین‌های محاسبهٔ تندکار، عملی نیست.

در زیر، همین‌عددها را، بدون‌دشواری خاصی، حتی با تقریبی بیشتر، تنها بااستفاده از رشته‌های مناسب‌تری، محاسبه خواهیم کرد.

۴۱۰. محاسبهٔ عدد π. از رابطهٔ آشنای آرك تانژانت‌استفاده‌می‌کنیم [۴۰۴،(۱۵)]:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۷}{۷} + \cdots \qquad (-۱ \leqslant x \leqslant ۱)$$

اگر $x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ بگیریم، درآن‌صورت $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{۶}$، و رشتهٔ زیر را، که برای محاسبه مناسب است، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\left(۱ - \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۳^۲} - \frac{۱}{۷}\cdot\frac{۱}{۳^۳} + \cdots\right)$$

با یادآوری رابطهٔ جمع برای آرك تانژانت

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{۱-xy}^*$$

و با انتخاب دوکسر کوچکتر از واحد برای x و y، به‌نحوی که در رابطهٔ

$$\frac{x+y}{۱-xy} = ۱ \quad \text{یا} \quad (x+۱)(y+۱) = ۲$$

صدق کنند، خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{۴} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \left(x - \frac{x^۳}{۳} + \cdots\right) + \left(y - \frac{y^۳}{۳} + \cdots\right)$$

مثلاً، با گذاشتن $x = \frac{۱}{۲}$ و $y = \frac{۱}{۳}$ داریم:

---

*) که به‌این‌صورت، تنها با این فرض درست است که مجموع زاویه‌ها، از لحاظ قدرمطلق، کوچکتر از $\frac{\pi}{۲}$ باشند [۵۰].

$$\frac{\pi}{۴}=\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲^{۳}}+\frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۲^{۵}}-\cdots\right)+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۳^{۳}}+\frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۳^{۵}}-\cdots\right)$$

ولی رشته‌های باز هم مناسب‌تری، برای محاسبهٔ عدد π وجود دارد. اگر $\alpha=\operatorname{arc}tg\frac{۱}{۵}$ بگیریم، داریم:

$$tg\alpha=\frac{۱}{۵},\quad tg۲\alpha=\frac{\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۱}{۲۵}}=\frac{۵}{۱۲},\quad tg۴\alpha=\frac{\frac{۱۰}{۱۲}}{۱-\frac{۲۵}{۱۴۴}}=\frac{۱۲۰}{۱۱۹}$$

با توجه به‌نزدیك بودن این عدد به‌واحد، روشن است که زاویهٔ ۴α نزدیك به $\frac{\pi}{۴}$ است. با گذاشتن $\beta=۴\alpha-\frac{\pi}{۴}$ خواهیم داشت:

$$tg\beta=\frac{\frac{۱۲۰}{۱۱۹}-۱}{۱+\frac{۱۲۰}{۱۱۹}}=\frac{۱}{۲۳۹},\quad \beta=\operatorname{arc}tg\frac{۱}{۲۳۹}$$

از آن‌جا

$$\pi=۱۶\alpha-۴\beta=۱۶\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۵^{۳}}+\frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۵^{۵}}-\frac{۱}{۷}\cdot\frac{۱}{۵^{۷}}+\right.$$

$$\left.+\frac{۱}{۹}\cdot\frac{۱}{۵^{۹}}-\frac{۱}{۱۱}\cdot\frac{۱}{۵^{۱۱}}+\cdots\right)-۴\left(\frac{۱}{۲۳۹}-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲۳۹^{۳}}+\cdots\right)$$

و این دستور مه‌شین (J. Mechin) است.

از روی این دستور، عدد π را تا ۷ رقم دهدهی محاسبه می‌کنیم. برای این‌منظور، همین تعداد ازجمله‌ها که نوشته‌ایم، کافی است. چون‌هر دورشته از گونهٔ لایب‌نیتسی‌هستند، برآورد جمله‌های نوشته نشده در دو عبارت بالا چنین است:

$$۰<\Delta_{۱}<\frac{۱۶}{۱۳\cdot۵^{۱۳}}<\frac{۱}{۱۰^{۸}},\quad ۰<\Delta_{۲}<\frac{۴}{۵\cdot۲۳۹^{۵}}<\frac{۱}{۱۰^{۸}}$$

جمله‌های موجود در عبارت‌ها را، به‌صورت دهدهی می‌نویسیم و روی رقم هشتم گرد

می‌کنیم، محاسبه‌ها را درجدول زیر داده‌ایم ($\pm$ داخل پرانتزها، علامت اصلاح را نشان می‌دهند):

$$\frac{16}{5}=3/20000000 \qquad \frac{16}{3\cdot5^3}=0/04266667(-)$$

$$+\frac{16}{5\cdot5^5}=0/00010240 \qquad +\frac{16}{7\cdot5^7}=0/00002926(-)$$

$$\frac{16}{9\cdot5^9}=0/00000091(+) \qquad \frac{16}{11\cdot5^{11}}=0/00000003(-)$$

$$3/20102491 \qquad 0/04269596$$

$$-\frac{4}{239}=0/01673640(+)$$

$$3/20102491- \qquad \frac{4}{3\cdot239^3}=0/00000010(-)$$

$$0/04269596 \qquad 0/01673630$$

$$3/15832895$$

که با در نظر گرفتن همه اصلاح‌ها، داریم:

$$3/15832895<16\alpha<3/15832898$$

$$-0/01673632<-4\beta<-0/01673630$$

به‌نحوی که

$$3/14159263<\pi<3/14159268$$

و بنابراین، به‌عنوان نتیجه ... $\pi=3/14159926$؛ ضمناً، همهٔ این رقم‌ها مطمئن هستند.

۴۱۱. محاسبهٔ لگاریتم‌ها. رشتهٔ زیر را، مبنای محاسبه قرار می‌دهیم:

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n=$$

$$=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right] \qquad (1)$$

که قبلاً در شمارهٔ ۴۰۶ [(۲۰) را ببینید]، ضمن پیدا کردن دستور ستیرلینگ، آن را به‌دست آوردیم.

به‌ازای $n=1$، این بسط را برای $\ln 2$ می‌نویسیم:

$$\ln ۲ = \frac{۲}{۳}\left(۱ + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۹^{۲}} + \frac{۱}{۷}\cdot\frac{۱}{۹^{۳}} + \frac{۱}{۹}\cdot\frac{۱}{۹^{۴}} + \right.$$

$$\left. + \frac{۱}{۱۱}\cdot\frac{۱}{۹^{۵}} + \frac{۱}{۱۳}\cdot\frac{۱}{۹^{۶}} + \frac{۱}{۱۵}\cdot\frac{۱}{۹^{۷}} + \frac{۱}{۱۷}\cdot\frac{۱}{۹^{۸}} + \cdots\right)$$

این رشته، برای محاسبه، کاملاً مناسب است. مثلاً ثابت می‌کنیم که، با اکتفا به‌همین جمله‌هایی که نوشته‌ایم، می‌توان $\ln ۲$ را تا رقم نهم دهدهی پیدا کرد.

در واقع، اگر جمله‌های این رشته را، با آغاز از جملهٔ دهم، حذف کنیم، برآورد باقی‌مانده، چنین می‌شود:

$$\Delta = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{۱۹}\cdot\frac{۱}{۹^{۹}} + \frac{۱}{۲۱}\cdot\frac{۱}{۹^{۱۰}} + \cdots\right) < \frac{۲}{۳\cdot۱۹\cdot۹^{۹}}\left(۱ + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹^{۲}} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{۱}{۱۲\cdot۱۹\cdot۹^{۸}} < \frac{۲}{۱۰^{۱۰}}$$

محاسبهٔ تا ده رقم در جدول آمده است:

$$\frac{۲}{۳} = ۰/۶۶۶۶۶۶۶۶۶۷ \quad (-)$$

$$\frac{۲}{۳\cdot۳\cdot۹} = ۰/۰۲۴۶۹۱۳۵۸۰ \quad (+)$$

$$\frac{۲}{۳\cdot۵\cdot۹^{۲}} = ۰/۰۰۱۶۴۶۰۹۰۵ \quad (+)$$

$$\frac{۲}{۳\cdot۷\cdot۹^{۳}} = ۰/۰۰۰۱۳۰۴۲۱ \quad (-)$$

$$\frac{۲}{۳\times۹\times۹^{۴}} = ۰/۰۰۰۰۱۱۲۹۱ \quad (-)$$

$$\frac{۲}{۳\cdot۱۱\cdot۹^{۵}} = ۰/۰۰۰۰۰۱۰۲۶۴ \quad (-)$$

$$\frac{۲}{۳\cdot۱۳\cdot۹^{۶}} = ۰/۰۰۰۰۰۰۰۹۶۵ \quad (-)$$

$$\frac{۲}{۳\cdot۱۵\cdot۹^{۷}} = ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۹۳ \quad (-)$$

$$\frac{۲}{۳\cdot۱۷\cdot۹^{۸}} = ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۹ \quad (+)$$

$$۰/۶۹۳۱۴۷۱۸۰۵$$

که با به‌حساب آوردن همهٔ اصلاح‌ها، خواهیم داشت:

$$۰/۶۹۳۱۴۷۱۸۰۲ < \ln ۲ < ۰/۶۹۳۱۴۷۱۸۰۹$$

و بنابراین ... $\ln ۲ = ۰/۶۹۳۱۴۷۱۸۰$ که هر ۹ رقم قابل اطمینان‌اند.

اکنون اگر در (۱) قرار دهیم $n = ۴$، به‌دست می‌آید:

$$\ln ۵ = ۲ \ln ۲ + \frac{۲}{۹}\left(۱ + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۸۱} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۸۱^۲} + \cdots\right)$$

که با استفاده از مقدار $\ln ۲$، مقدار $\ln ۵$ به سادگی محاسبه می‌شود؛ و از آن‌جا $\ln ۱۰ = \ln ۲ + \ln ۵$. به‌این ترتیب، می‌توان مدول

$$M = \frac{۱}{\ln ۱۰}$$

را، برای‌عبور از لگاریتم‌های طبیعی به‌دهدهی، با هرتقریب دلخواه، حساب کرد. این‌مدول برابر است با ... $M = ۰/۴۳۴۲۹۴۴۸۱$ که با ضرب آن در لگاریتم‌های طبیعی، $log ۲$ و $log ۵$ (در مبنای دهدهی)، به‌دست می‌آید.

دستور پایهٔ (۱) را، به‌لگاریتم دهدهی درمی‌آوریم:

$$log(n+۱) - log n = \frac{۲M}{۲n+۱}\left[۱ + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{(۲n+۱)^۲} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{(۲n+۱)^۴} + \cdots\right] \quad (۲)$$

دراین‌جا، با قراردادن $n = ۸۰ = ۲^۴ \times ۱۰$ و با درنظرگرفتن $n+۱ = ۸۱ = ۳^۴$، به‌دست می‌آید:

$$۴log ۳ - ۳log ۲ - ۱ = \frac{۲M}{۱۶۱}\left[۱ + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲۵۹۲۱} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۲۵۹۲۱^۲} + \cdots\right]$$

که‌از روی‌آن، به‌سادگی، $log ۳$ محاسبه‌می‌شود. سپس، با گذاشتن $n = ۲۴۰۰ = ۳.۲^۴.۱۰^۲$ در رابطهٔ (۲)، و با در نظر گرفتن $n+۱ = ۲۴۰۱ = ۷^۴$، خواهیم داشت:

$$۴log ۷ - ۳log ۲ - log ۳ - ۲ =$$

$$= \frac{۲M}{۴۸۰۱}\left(۱ + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲۳۰۴۹۶۰۱} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۲۳۰۴۹۶۰۱^۲} + \cdots\right)$$

و از آن، $log ۷$ به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، با انتخاب ترکیب‌های مناسب از عددها، می‌توان لگاریتم عددهای اول را، با تقریب دلخواه، محاسبه‌کرد و، سپس، به‌کمک آن‌ها،

لگاریتم هر عدد دلخواه غیر اول را به‌دست آورد.

طور دیگری هم می‌توانستیم آغاز کنیم؛ به‌این‌ترتیب که، با استفاده از دستور(۲)، مستقیماً از $\log n$ به $\log(n+۱)$ عبور کنیم و لگاریتم عددهای طبیعی را، به‌ترتیب، به‌دست آوریم. مثلاً، برای محاسبهٔ لگاریتم عددهای از ۱۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰، تنها یك جمله از رابطهٔ (۲) را، به‌تقریب، انتخاب می‌کنیم:

$$\log(n+۱)-\log n=\frac{۲M}{۲n+۱} \quad (۱۰^۳\leqslant n\leqslant ۱۰^۴)$$

برآورد اشتباه، برای این رابطه، چنین است:

$$\Delta=\frac{۲M}{۲n+۱}\left[\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{(۲n+۱)^۲}+\frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{(۲n+۱)^۴}+\dots\right]<$$

$$<\frac{۲M}{۳(۲n+۱)^۳}\left[۱+\frac{۱}{(۲n+۱)^۲}+\frac{۱}{(۲n+۱)^۴}+\dots\right]=$$

$$=\frac{۲M}{۳\cdot(۲n+۱)\cdot۲n\cdot(۲n+۲)}<\frac{۲M}{۲۴n^۳}$$

و چون داریم: $n\geqslant ۱۰^۳$ و $۲M<۱$، بنابراین

$$\Delta<\frac{۱}{۲۴\cdot۱۰^۹}<\frac{۱}{۲\cdot۱۰^{۱۰}}$$

اگرحتی همهٔ خطاها جمع‌می‌شدند، بازهم درکل خطا کمتر از $\frac{۱}{۲\cdot۱۰^۶}<\frac{۱۰^۴}{۲\cdot۱۰^{۱۰}}$ می‌شد. ولی روشن است که، با محاسبهٔ تعدادی از لگاریتم‌های کنترل شده، به‌کمك روش اول، از تجمع خطاها اجتناب می‌شود. به‌این ترتیب، می‌توان، با استفاده از محاسبهٔ سادهٔ روش‌دوم (که به‌خصوص، برای جدول‌های بزرگ، بسیار ذی‌قیمت‌است)، به‌دقتی به‌مراتب بیشتر رسید.

۴۱۲. محاسبهٔ ریشه‌ها. ریشه‌ها را می‌توان، به سادگی، به‌کمك جدول‌های لگاریتم به‌دست آورد. ولی اگر جائی لازم باشد ریشه‌ها را با دقت بالاتری به‌دست آوریم، استفادهٔ از رشتهٔ دوجمله‌ای [۴۰۷، (۲۲)] ترجیح دارد:

$$(۱+x)^m=۱+mx+\frac{m(m-۱)}{۱\cdot۲}x^۲+\frac{m(m-۱)(m-۲)}{۱\cdot۲\cdot۳}x^۳+\dots$$

فرض می‌کنیم بخواهیم $\sqrt[k]{A}$ را محاسبه کنیم، ضمناً، مقدار تقریبی a از این ریشه (نقصانی یا اضافی) معلوم باشد، ولی بخواهیم این تقریب را بهتر کنیم. اگر فرض کنیم

$$\frac{A}{a^k}=1+x$$

که در آن، $|x|$، کسری کوچکتر از واحد و نسبتاً کوچك است. در این‌صورت، ریشه را می‌توان به‌ترتیب زیر تبدیل

$$\sqrt[k]{A}=a\cdot\sqrt[k]{\frac{A}{a^k}}=a(1+x)^{\frac{1}{k}}$$

و از رشتهٔ دو جمله‌ای، به‌ازای $m=\frac{1}{k}$، استفاده کرد. گاهی مناسب‌تر است از برابری

$$\frac{a^k}{A}=1+x'$$

آغاز کنیم، به‌شرطی که دوباره $|x'|$، کسر کوچکتر از واحد نسبتاً کوچکی باشد. در این‌حالت، به‌تبدیل دیگری می‌رسیم:

$$\sqrt[k]{A}=\frac{a}{\sqrt[k]{\frac{a^k}{A}}}=a(1+x')^{-\frac{1}{k}}$$

که باید با به‌حساب آوردن $m=-\frac{1}{k}$، از رشتهٔ دوجمله‌ای استفاده کرد.

برای مثال، $\sqrt{۲}$ را، با آغاز از مقدار تقریبی آن ۱/۴، با دقت بیشتری محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، ریشه را روی یکی از دو نمونهٔ بالا، تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{۲}=۱/۴۰\sqrt{\frac{۲}{۱/۹۶}}=۱/۴۰\sqrt{۱+\frac{۰/۰۴}{۱/۹۶}}=۱/۴۰\left(۱+\frac{۱}{۴۹}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

یا

$$\sqrt{۲}=\frac{۱/۴}{\sqrt{\frac{۱/۹۶}{۲}}}=\frac{۱/۴}{\sqrt{۱-\frac{۰/۰۴}{۲}}}=۱/۴۰\left(۱+\frac{۱}{۵۰}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$$

و طبیعی است که دومی ساده‌تر است. بنابراین، داریم:

$$\sqrt{۲}=۱/۴\left(۱+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۵۰}+\frac{۳}{۸}\cdot\frac{۱}{۵۰^۲}+\frac{۵}{۱۶}+\frac{۱}{۵۰^۳}+\frac{۳۵}{۱۲۸}\cdot\frac{۱}{۵۰^۴}+\frac{۶۳}{۲۵۶}\cdot\frac{۱}{۵۰^۵}+\cdots\right)$$

به همین جمله‌هایی که نوشته‌ایم، اکتفا می‌کنیم؛ همهٔ آن‌ها، به‌صورت کسرهای دهدهی متناهی درمی‌آیند:

$$۱+\cdots+\frac{۵}{۱۶}\cdot\frac{۱}{۵۰^۳}=۱/۰۱۰۱۵۲۵$$

$$\frac{۳۵}{۱۲۸}\cdot\frac{۱}{۵۰^۴}=۰/۰۰۰۰۰۰۰۴۳۷۵$$

$$\frac{۶۳}{۲۵۶}\cdot\frac{۱}{۵۰^۵}=۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷۸۷۵$$

$$۱/۰۱۰۱۵۲۵۴۴۵۳۷۵\times۱/۴=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۵۲۵۰$$

چون ضریب‌های توان‌های $\frac{۱}{۵۰}$ نزولی هستند، خطا را می‌توان برآورد کرد:

$$\Delta<۱/۴۰\cdot\frac{۲۳۱}{۱۰۲۴\cdot۵۰^۶}\left(۱+\frac{۱}{۵۰}+\frac{۱}{۵۰^۲}+\cdots\right)=\frac{۱/۴\times۲۳۱}{۱۰۲۴\cdot۵۰^۵\cdot۴۹}<\frac{۲/۱}{۱۰^{۱۱}}$$

بنابراین

$$۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۵۲<\sqrt{۲}<۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۷۳،$$

$$\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳\cdots$$

که هر ده رقم بعد از ممیز قابل اطمینان‌اند.

با استفاده از تبدیل

$$\sqrt{۲}=۱/۴۱\left(۱-\frac{۱۱۹}{۲۰۰۰۰}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$$

به سادگی می‌توان رقم‌های معنی‌دار زیادی پیدا کرد. چند مثال دیگر از تبدیل‌های مشابه را می‌آوریم (و محاسبه به کمک رشتهٔ دوجمله‌ای را، به‌خواننده واگذار می‌کنیم).

$$\sqrt{۳}=۱/۷۳\left(۱-\frac{۷۱}{۳۰۰۰۰}\right)^{-\frac{۱}{۲}};\quad \sqrt{۱۱}=\frac{۱۰}{۳}\left(۱-\frac{۱}{۱۰۰}\right)^{\frac{۱}{۲}};$$

$$\sqrt[۳]{۲}=\frac{۵}{۴}\left(۱+\frac{۳}{۱۲۵}\right)^{\frac{۱}{۳}};\quad \sqrt[۳]{۳}=\frac{۱۰}{۷}\left(۱+\frac{۲۹}{۱۰۰۰}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

۴۱۳. تبدیل رشته‌ها باشیوهٔ اولر. ضمن استفادهٔ از رشته‌ها، درمحاسبه‌های تقریبی، گاهی بهتر است، پشت سر هم، آن‌ها را مورد تبدیل قرار دهیم. منظور این است که رشتهٔ متقارب مفروض را، به‌کمک این یا آن قاعده، به‌رشتهٔ دیگری تبدیل کنیم که دارای‌همان مجموع باشد. مسلم است، چنین تبدیلی، تنهاوقتی مفیداست که رشتهٔ جدید سریع‌ترمتقارب شود و برای محاسبه راحت‌تر باشد.

تبدیلی را در این‌جا طرح می‌کنیم که به‌دستور اولرمعروف است. رشتهٔ متقارب‌زیر را در نظر می‌گیریم:

$$S(x)=\sum_{k=۰}^{\infty}(-۱)^k a_k x^k=a_۰-a_۱x+a_۲x^۲-\dots+(-۱)^k a_k x^k+\dots \quad (۳)$$

که در آن، $x>۰$ است؛ تنها برای سادگی کار، ضریب kام را $(-۱)^k a_k$ گرفته‌ایم و، ضمناً، هیچ فرضی برای مثبت بودن a_k نداریم. بـرای واریانت a_k $(k=۰،۱،۲،\dots)$، تفاضل‌های متوالی زیر را (نظیر آن‌چه در **۱۲۲** دربارهٔ تابع $f(x)$ از آوند به‌طور پیوسته متغیر x انجام دادیم) در نظر می‌گیریم:

$$\Delta a_k=a_{k+۱}-a_k,\quad \Delta^۲a_k=\Delta a_{k+۱}-\Delta a_k=a_{k+۲}-۲a_{k+۱}+a_k$$

و به‌طور کلی

$$\Delta^p a_k=\Delta^{p-۱}a_{k+۱}-\Delta^{p-۱}a_k=$$

$$=a_{k+p}-C_p^۱a_{k+p-۱}+C_p^۲a_{k+p-۲}-\dots+(-۱)^p a_k \quad (۴)$$

و رشتهٔ مفروض را، این‌طور می‌نویسیم:

$$S(x)=\frac{a_۰}{۱+x}-\frac{a_۱x-a_۰x}{۱+x}+\frac{a_۲x^۲-a_۱x^۲}{۱+x}-\frac{a_۳x^۳-a_۲x^۳}{۱+x}+\dots$$

این‌کار را به‌این جهت می‌توانیم انجام دهیم که اختلاف مجموع جزئی kام رشتهٔ جدید با مجموع نظیر رشتهٔ (۳)، برابر است بـا جملهٔ $\frac{۱}{۱+x}(-۱)^{k+۱}a_{k+۱}x^{k+۱}$ که، به ازای

$k \to \infty$، با توجه به‌تقارب رشتهٔ نخستین به‌سمت صفر میل می‌کند [۳۶۴، °۵]. حالا، برای سادگی نوشتن، تفاضل‌ها را وارد می‌کنیم:

$$S(x)=\frac{۱}{۱+x}[a_۰-\Delta a_۰\cdot x+\Delta a_۱\cdot x^۲-\Delta a_۲\cdot x^۳+\dots]$$

با نگه داشتن جملهٔ اول $\frac{a_۰}{۱+x}$، رشتهٔ باقی‌ماندهٔ

$$-\frac{x}{۱+x}[\Delta a_۰-\Delta a_۱\cdot x+\Delta a_۲\cdot x^۲-\dots]$$

را، مثل $S(x)$، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$-\frac{x}{۱+x}\cdot\frac{۱}{۱+x}[\Delta a_۰-\Delta^۲a_۰\cdot x+\Delta^۲a_۱\cdot x^۲-\dots]$$

به‌طوری‌که، اگر دوباره جملهٔ اول آن را کنار بگذاریم، به‌دست می‌آید:

$$S(x)=\frac{a_۰}{۱+x}-\frac{\Delta a_۰}{(۱+x)^۲}\cdot x+\frac{x^۲}{(۱+x)^۲}[\Delta^۲a_۰-\Delta^۲a_۱\cdot x+\dots]$$

اگر این روش را ادامه دهیم، بعداز p مرحله، خواهیم داشت:

$$S(x)=\frac{a_۰}{۱+x}-\frac{\Delta a_۰}{(۱-x)^۲}\cdot x+\frac{\Delta^۲a_۰}{(۱+x)^۳}\cdot x^۳-\dots$$

$$\dots+(-۱)^p\frac{\Delta^{p-۱}a_۰}{(۱+x)^p}\cdot x^{p-۱}+R_p(x) \qquad (۵)$$

که در آن

$$R_p(x)=(-۱)^p\frac{x^p}{(۱+x)^p}[\Delta^p a_۰-\Delta^p a_۱\cdot x+\Delta^p a_۲\cdot x^۲-\dots]=$$

$$=(-۱)^p\frac{x^p}{(۱+x)^p}\sum_{k=۰}^{\infty}(-۱)^k\Delta^p a_k\cdot x^p$$

ثابت می‌کنیم که، به‌ازای $p \to \infty$، مقدار $R_p(x)$ به‌سمت صفر میل می‌کند.

اگر به‌جای تفاضل p ام $\Delta^p a_k$، بسط (۴) آن قرار دهیم و جمع‌ها را جابه‌جا کنیم، به‌دست می‌آید:

$$R_p(x)=\frac{1}{(1+x)^p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+p}x^{k+p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^i C_p^i a_{k+p-i}=$$

$$=\frac{1}{(1+x)^p}\sum_{i=0}^{p}C_p^i x^i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+p-i}a_{k+p-i}x^{k+p-i}$$

اگر باقی‌ماندهٔ رشتهٔ اولیه (۳) را واردکنیم، با فرض

$$r_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+n}a_{k+n}x^{k+n}\quad(n=0,1,2,\dots)$$

می‌توان عبارت $R_p(x)$ را، سرانجام، بدین صورت نوشت:

$$R_p(x)=\frac{\sum_{i=0}^{p}C_p^i x^i r_{p-i}(x)}{(1+x)^p}+\frac{\sum_{i=0}^{p}C_p^i x^{p-i}r_i(x)}{(1+x)^p}$$

و چون $r_n(x)\to 0$، بنابر **۳۹۱**، ۶°، خواهیم داشت: $R_p(x)\to 0$.

اگر در (۵)، بدازای $p\to\infty$، بسمت حد برویم، نتیجه می‌شود:

$$S(x)=\frac{1}{1+x}\Big[a_0-\Delta a_0\cdot\frac{x}{1+x}+\Delta^2 a_0\cdot\Big(\frac{x}{1+x}\Big)^2+\dots$$

$$\dots+(-1)^p\Delta^p a_0\cdot\Big(\frac{x}{1+x}\Big)^p+\dots\Big]$$

که اگر به‌جای $S(x)$، مقدارش (۳) را قرار دهیم، بدتبدیل اولر می‌رسیم:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^k=\frac{1}{1+x}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\Delta^p a_0\cdot\Big(\frac{x}{1+x}\Big)^p \qquad (۶)$$

اغلب، تبدیل اولر را بدازای $x=1$ بکار می‌برند؛ در این‌صورت، تبدیل اولر، رشتهٔ عددی را به‌رشتهٔ عددی دیگری تبدیل می‌کند:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\Delta^p a_0}{2^{p+1}} \qquad (۷)$$

۴۱۴. مثال‌ها. ۱) فرض می‌کنیم $a_k=\frac{1}{z+k}$، که در آن z، عددی است ثابت، دلخواه و مخالف $0, -1, -2, -3, \dots$ اگر در رشتهٔ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z+k}$$

از جمله‌هـای اول، به‌تعداد کافی حذف کنیم، رشته‌ای از «گونهٔ لایب نیتسی»، و در نتیجه متقارب، به‌دست می‌آید.

دنبالهٔ تفاضل‌های Δa_k، $\Delta^2 a_k$،... را می‌توان به‌سادگی محاسبه کرد و به‌کمک استقرای ریاضی، به‌دست آورد:

$$\Delta^p a_k = \frac{(-1)^p \cdot p!}{(z+k)(z+k+1)\cdots(z+k+p)}$$

و به‌خصوص

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \cdot \frac{p!}{z(z+1)\cdots(z+p)}$$

به‌این‌ترتیب، با توجه به‌رابطهٔ (۷) داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{p!}{z(z+1)\cdots(z+p)}$$

که اگر $z=1$ قرار دهیم، تبدیل رشتهٔ معلوم $\ln 2$ حاصل می‌شود:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

و کاملاً روشن است که رشتهٔ دوم، برای محاسبهٔ تقریبی $\ln 2$، به‌مراتب مناسب‌تر است: اگر بخواهیم $\ln 2$ را تا ۰/۰۱ تقریب محاسبه کنیم، باید ۹۹ جمله از رشتهٔ اول را در نظر بگیریم، در حالی که، برای این منظور، کافی است تنها ۵ جمله از رشتهٔ دوم را انتخاب کنیم.

۲) فرض می‌کنیم $a_k = \frac{1}{z+2k} \quad (z \neq -2, -4, \ldots)$. اگر a_k را به‌صورت $a_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{z}{2}+k}$ بنویسیم، می‌توان برای بیان $\Delta^p a_0$ از رابطهٔ مثال قبلی استفاده کرد:

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p!}{\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+p\right)} =$$

$$= (-1)^p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{p+1} \cdot p!}{z(z+2)\cdots(z+2p)}$$

در این حالت، تبدیل اولر، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z+2k}=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{p!}{z(z+2)\cdots(z+2p)}$$

و در حالت خاص، به‌ازای $z=1$، تبدیل رشتهٔ لایب نیتسی معرف $\frac{\pi}{4}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{p!}{(2p+1)!!}$$

۳) در ۴۰۴، (c)، بسط زیر را برای $0\leqslant x\leqslant 1$، داشتیم:

$$\operatorname{arc}tg=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\cdot x^{2k+1}$$

اگر بخواهیم تبدیل اولر را در مورد این رشته به‌کار بریم، $a_k=\frac{1}{2k+1}$ را در (۶) قرار می‌دهیم، آن وقت برای $\Delta^p a_0$ می‌توان از رابطهٔ مثال قبلی (به‌ازای $z=1$) استفاده کرد:

$$\Delta^p a_0=(-1)^p\frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}$$

علاوه بر آن، در (۶)، x را به x^2 تبدیل و دو طرف برابری را در x ضرب می‌کنیم، چنین خواهیم داشت:

$$\operatorname{arc}tg x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{2k+1}\cdot x^{2k+1}=$$

$$=\frac{x}{1+x^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^p \qquad (8)$$

۴) نباید گمان کرد که تبدیل اولر، همیشه موجب بهتر شدن تقارب یك رشتهٔ متقارب می‌شود. [ضمناً، برای مقایسهٔ کیفیت تقارب دو رشتهٔ $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ و $\sum_{k=0}^{\infty}c'_k$ ـ که جمله‌هایی با علامت‌های دلخواه دارند ـ از رفتار نسبت دو باقی‌ماندهٔ γ_n و γ'_n آغاز می‌کنیم (شبیه ۳۷۵، ۷): اگر $\left|\frac{\gamma_n}{\gamma'_n}\right|\to 0$، در این صورت، رشتهٔ اول سریع‌تر از رشتهٔ دوم به‌سمت

تقارب می‌رود].

مثلاً، رشتهٔ $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ به‌رشتهٔ $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^p}$ تبدیل می‌شود که سریع‌تر متقارب می‌شود؛ درحالی‌که رشتهٔ $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ به‌رشتهٔ $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^p$ منجر می‌شود که آهسته‌تر به‌سمت تقارب می‌رود.

۵) وقتی که می‌خواهیم از تبدیل رشته‌ها، برای محاسبه استفاده کنیم، اغلب بهتر است چندجملهٔ اول رشته را، مستقیماً، حساب کنیم و، سپس، تبدیل را درمورد باقی‌ماندهٔ رشته انجام دهیم، این مطلب را، روی مثال، محاسبهٔ عدد π به‌کمک رشته‌ای که در ۲) آوردیم، توضیح می‌دهیم:

$$\pi=2\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1\times2}{3\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times5\times7}+\cdots+\frac{1\times2\times3\times\cdots\times p}{3\times5\times\cdots\times(2p+1)}+\cdots\right]$$

چون نسبت جملهٔ آخر به‌جملهٔ قبلی آن، برابر $\frac{p}{2p+1}<\frac{1}{2}$ است، بنابراین، باقی‌ماندهٔ صرف‌نظر شدهٔ رشته، همیشه کمتر از آخرین جملهٔ حساب شده خواهد بود. مثلاً، اگر ۲۱ جملهٔ این رشته را با هم جمع کنیم، مقدار π تا ۶ رقم بعداز ممیز به‌دست می‌آید، زیرا جملهٔ بیست‌ویکم

$$2\times\frac{1\times2\times3\times\cdots\times20}{1\times3\times7\times\cdots\times41}=0/0000003\,7\cdots<0/0000005$$

واگر، مثلاً، هفت‌جملهٔ اول رشتهٔ اول را حساب کنیم وتنها باقی‌ماندهٔ بعداز جملهٔ هفتم را تبدیل کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)-$$

$$-2\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15\times17}+\frac{1\times2}{15\times17\times19}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{1\times2\times\cdots\times p}{15\times17\times\cdots\times(15+2p)}+\cdots\right)$$

دراین‌جا هم، جملهٔ هشتم رشتهٔ داخل پرانتز دوم، ازحد مطلوب کمتر است:

$$۲\times\frac{۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷}{۱۵\times۱۷\times\cdots\times۲۹}=۰/۰۰۰۰۰۰۲\ \ldots$$

و برای رسیدن به‌همان تقریب، کافی است، علاوه بر ۷ جمله‌ای که ازرشتهٔ اول نگه‌داشته‌ایم، ۸ جملهٔ دیگر، یعنی روی هم ۱۵ جمله ــ به‌جای ۲۱ جملهٔ قبلی ــ در نظر بگیریم.

۴۱۵. تبدیل کومر. دیدیم که تبدیل اولر، که براساس قاعدهٔ منظمی قراردارد، منجر به نتیجه‌ای یک ارزشی می‌شود، ولی این نتیجه، همیشه، مفید نیست [۴۱۴، ۴)]. روش تبدیل رشته‌ها، که به‌وسیلهٔ کومر مطرح شده است، آزادی بیشتری به‌ما می‌دهد و، درواقع، تا حدزیادی به‌قدرت وهنرمحاسبه‌کننده مربوط می‌شود، ولی ازدیدگاه محاسبه‌های تقریبی، مفیدترو، به‌مقصود نزدیک‌تر است. ما تنها به‌طرحی از اندیشه‌های مربوط به‌این روش اکتفا و، ضمن چندمثال، آن‌ها را روشن می‌کنیم.

رشتهٔ متقارب

$$A^{(۱)}+A^{(۲)}+\ \ldots\ +A^{(k)}+\ \ldots \qquad (۹)$$

را در نظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم که بخواهیم، مجموع آن را، با تقریب مفروضی محاسبه کنیم. روشن است که، وقتی $k\to\infty$، $A^{(k)}$ به‌سمت ۰ میل می‌کند. بی‌نهایت کوچک دیگر $a_۱^{(k)}$ را، هم‌ارز $A^{(k)}$ انتخاب می‌کنیم [۶۲]، به‌نحوی که رشتهٔ

$$a_۱^{(۱)}+a_۱^{(۲)}+\ \ldots\ +a_۱^{(k)}+\ \ldots$$

نه‌تنها به‌سمت مجموع متناهی $A_۱$ متقارب باشد، بلکه این مجموع به سادگی هم، قابل محاسبه باشد. اگر قراردهیم:

$$A^{(k)}-a_۱^{(k)}=\alpha_۱^{(k)}$$

درآن‌صورت

$$\alpha_۱^{(k)}=o(A^{(k)}),$$

$$\sum_۱^{\infty}A^{(k)}=A_۱+\sum_۱^{\infty}\alpha_۱^{(k)}$$

ومحاسبهٔ مجموع رشتهٔ اول، منجر به‌محاسبهٔ مجموع رشتهٔ دیگری می‌شود که، جمله‌های آن، آشکارا سریع‌تر به‌سمت ۰ میل می‌کنند.

مثلاً اگر بخواهیم مجموع رشتهٔ $\sum_۱^{\infty}\frac{۱}{k^۲}$ را محاسبه کنیم، مجموع رشتهٔ $\sum_۱^{\infty}\frac{۱}{k(k+۱)}$ را، که برابرواحد بود [۲۵، ۹)]، به‌خاطر می‌آوریم وملاحظه می‌کنیم که (به‌ازای $k\to\infty$)

$$\frac{۱}{k^۲} \sim \frac{۱}{k(k+۱)}$$

زیرا، تفاضل

$$\frac{۱}{k^۲} - \frac{۱}{k(k+۱)} = \frac{۱}{k^۲(k+۱)}$$

و بنابراین

$$\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{k^۲} = ۱ + \sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{k^۲(k+۱)}$$

ورشته‌ای که به‌دست می‌آید، برای محاسبه مناسب‌تر است.

این روند را می‌توان تکرار کرد و با انتخاب بی‌نهایت کوچك جدید $a_۲^{(k)}$، معادل $\alpha_۱^{(k)}$، به‌نحوی که رشتهٔ

$$a_۲^{(۱)} + a_۲^{(۲)} + \cdots + a_۲^{(k)} + \cdots$$

به‌سمت مجموع متناهی $A_۲$ ــ که‌ساده‌تر به‌دست می‌آید ــ متقارب شود، برای محاسبهٔ مجموع رشتهٔ اولیه، این دستوررا به‌دست آوریم:

$$\sum_{۱}^{\infty} A^{(k)} = A_۱ + A_۲ + \sum_{۱}^{\infty} \alpha_۲^{(k)}$$

وکاررا به‌محاسبهٔ مجموع رشتهٔ اخیرمنجر کنیم که جمله‌های آن

$$\alpha_۲^{(k)} = \alpha_۱^{(k)} - a_۲^{(k)} = o(\alpha_۱^{(k)})$$

سریع‌تر از $\alpha_۱^{(k)}$ به‌سمت صفرمیل می‌کنند.

اگراین روند را p بار تکرار کنیم، به‌دستور زیرمی‌رسیم:

$$\sum_{k=۱}^{\infty} A^{(k)} = A_۱ + A_۲ + \cdots + A_p + \sum_{k=۱}^{\infty} \alpha_p^{(k)} \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$A_i = \sum_{k=۱}^{\infty} a_i^{(k)} \quad (i = ۱, ۲, \ldots, p)$$

عبارتند ازمجموع‌های معلوم رشته‌هایی که پشت‌سرهم جداشده‌اند و، درنتیجه، کار به‌محاسبهٔ مجموع رشتهٔ $\sum_{۱}^{\infty} \alpha_p^{(k)}$ منجر می‌شود.

مثلاً، محاسبهٔ مجموع رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ را، می‌توان، به‌این ترتیب ادامه داد:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+2!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$$

به‌نحوی که

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+2!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$$

وسپس

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+3!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

وبعد از گام pام به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}+p!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)\cdots(k+p)} \qquad (10a)$$

ضمناً، درتمام این جریان، ازرابطهٔ زیر ــ که برای ما معلوم است ــ استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p-1)(k+p)}=\frac{1}{p\cdot p!}$$

[که ازرابطهٔ **۳۶۳**، ۴)، به‌ازای $\alpha=0$، به‌دست می‌آید.]

به‌این ترتیب، محاسبهٔ مجموع رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$، که به‌کندی به‌سمت تقارب می‌رود، منجر به‌محاسبهٔ مجموع p جملهٔ‌آن ومجموع رشتهٔ‌جدیدی می‌شود که سریع‌تر به‌سمت‌تقارب می‌رود.

مثال دیگری می‌آوریم که اندکی بغرنج‌تراست.

مجموع رشتهٔ زیررا S_p می‌گیریم (p، عددی طبیعی است):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^2\cdots(k+p-1)^2}$$

به‌ازای y فعلاً نامعلوم، داریم:

$$\frac{k+y}{k^2(k+1)^2\cdots(k+p-1)^2}-\frac{k+1+y}{(k+1)^2(k+2)^2\cdots(k+p)^2}=$$

$$=\frac{(۲p-۱)k^۲+p(p+۲y)k+yp^۲}{k^۲(k+۱)^۲\dots(k+p-۱)^۲(k+p)^۲}$$

ازاین‌جا روشن است که (به‌ازای $k\to\infty$)

$$\frac{۱}{۲p-۱}\left[\frac{k+y}{k^۲(k+۱)^۲\dots(k+p-۱)^۲}-\right.$$

$$\left.-\frac{k+۱+y}{(k+۱)^۲(k+۲)^۲\dots(k+p)^۲}\right]\sim$$

$$\sim\frac{۱}{k^۲(k+۱)^۲\dots(k+p-۱)^۲}$$

اگرجمله‌های رشتهٔ S_p را، با این تفاضل‌های هم‌ارز آن، عوض کنیم، به‌رشته‌ای می‌رسیم که مجموع آن را ساده‌تر می‌توان به‌دست آورد:

$$\frac{۱}{۲p-۱}\cdot\frac{۱+y}{(۱\times۲\times۳\times\dots\times p)^۲}$$

جملهٔ عمومی این رشتهٔ تکمیلی («تبدیل شده»)، چنین است:

$$\frac{\left[۲p-\frac{p}{۲p-۱}(p+۲y)\right]k+\left[p^۲-\frac{yp^۲}{۲p-۱}\right]}{k^۲(k+۱)^۲\dots(k+p)^۲}$$

اکنون، بااستفاده از نامشخص‌بودن y، آن را طوری انتخاب می‌کنیم که در صورت کسر، جملهٔ شامل k حذف شود:

$$y=\frac{۳p}{۲}-۱$$

با توجه به‌آن‌چه گفته شد، برای رشتهٔ S_p، تبدیلی به‌این صورت، به‌دست‌می‌آوریم:

$$S_p=\frac{۳p}{۲(۲p-۱)(p!)^۲}+\frac{p^۳}{۲(۲p-۱)}S_{p+۱}\qquad(۱۱)$$

ازاین‌جا، اگر به‌جای p به‌ترتیب مقدارهای ۱، ۲، ...، p را قراردهیم، داریم:

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}=S_۱=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}S_۲,$$

$$\frac{1}{2}S_2=\frac{3}{2\times 2^2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{(2!)^3}{2^2\times 3!!}S_3,$$

. . . . . .

$$\frac{[(p-1)!]^3}{2^{p-1}(2p-3)!!}S_p=\frac{3}{p\cdot 2^p}\cdot\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!}+\frac{(p!)^3}{2^p\cdot(2p-1)!!}S_{p+1} \quad (11^*)$$

که، سرانجام، با جمع کردن این برابری‌ها، به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=3\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2^2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^2}\cdot\frac{2!}{5!!}+\ldots+\frac{1}{p\cdot 2^p}\cdot\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!}\right\}+$$

$$+\frac{(p!)^3}{2^p\cdot(2p-1)!!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^2\ldots(k+p)^2} \quad (10b)$$

مثلاً، با اختیار $p=5$ ونگهداری ۵ جمله از رشتهٔ تبدیل‌یافته، می‌توان مجموع رشتهٔ اولیه را، با دقت تا $\frac{1}{10^7}$ پیدا کرد.

۴۱۶. تبدیل مارکوف. روشی هم‌که آ.آ. مارکوف برای تبدیل رشتهٔ مفروض (۹)

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}=A$$

نشان داده است، امکان‌های زیادی را، برای محاسبه، در اختیار ما می‌گذارد. اگر هر جملهٔ $A^{(k)}$ را، به‌ترتیبی، به‌رشتهٔ متقارب

$$A^{(k)}=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

بسط دهیم، ازجمله‌های همهٔ این رشته‌ها، ماتریس مستطیلی نامتناهی، با دو ورودی تشکیل می‌شود [با ۳۹۳ (۱) مقایسه کنید]:

$$\begin{array}{l|llll}
A^{(1)} & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)}\ldots & a_i^{(1)}\ldots \\
A^{(2)} & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)}\ldots & a_i^{(2)}\ldots \\
A^{(3)} & a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)}\ldots & a_i^{(3)}\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A^{(k)} & a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)}\ldots & a_i^{(k)}\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \quad (12)$$

به‌طوری‌که، عدد مطلوب A، به‌طور ساده عبارت است از مجموع رشتهٔ تکراری نظیراین ماتریس:

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}$$

سپس، با فرض تقارب همهٔ رشته‌هایی که برحسب ستون‌ها به‌دست می‌آیند:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}=A_i$$

مارکوف شرط لازم وکافی را، برای آن‌که رشتهٔ $\sum_{i=1}^{\infty}A_i$ به‌سمت همان مجموع متقارب باشد، تعیین می‌کند. تبدیل مارکوف هم عبارت است ازعوض‌کردن یک رشتهٔ مکرر با دیگری

$$A=\sum_{i=1}^{\infty}A^{(k)}=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$$

شرط‌های کافی برای قابل استفاده بودن تبدیل مارکوف، مثلاً، درقضیهٔ ۳ شمارهٔ ۳۹۳ داده شده است [ولی خود قضیهٔ مارکوف بسیار گسترده است، زیرا حتی به‌فرض مطلق بودن تقارب رشته‌های مذکور درآن هم استناد نمی‌کند].

رابطهٔ (۱۳) شمارهٔ ۳۹۵ را، می‌توان مثالی از کاربرد تبدیل مارکوف دانست. صحبت برسر رشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ است و جملهٔ kام آن، این‌بار، به‌صورت مجموع تعداد محدودی ازجمله‌ها درمی‌آید:

$$\frac{1}{k^2}=a_1^{(k)}+a_2^{(k)}+\cdots+a_{k-1}^{(k)}+r_k=$$

$$=(k-1)!\left[\frac{1}{1\times2\times\cdots\times(k+1)}+\frac{1}{2\times3\times\cdots\times(k+2)}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{(k-1)k\cdots(2k-1)}\right]+\frac{(k-1)!}{k^2(k+1)\cdots(1k-1)}$$

سپس، جمع برحسب ستون‌ها انجام می‌گیرد که به‌رابطهٔ موردنظر منجرمی‌شود [۳۹۵، ۴) را ببینید].

جالب است که اگر بسط زیررا به‌کار ببریم:

$$\frac{1}{k^2}=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(k-1)!}{i(i+1)\dots(i+k)}$$

در آن صورت، تبدیل مارکوف، همان‌طورکه در ۳۹۵، ۴) هم قید کردیم، چیز تازه‌ای به‌دست نمی‌دهد، زیرا به‌طور ساده به‌رشتهٔ اولیه برمی‌گردد.

ساختن ماتریس (۱۲) را، می‌توان با استفادهٔ مکرر از تبدیل کومر، مربوط کرد. در این مورد، قبلاً در شمارهٔ قبل گفت‌وگو به‌عمل آمد [۱۰] را ببینید]، ولی در آن‌جا، روش کومر تنها به‌دفعه‌های محدودی تکرارشد، ولی دراین‌جا، این تکرار را بی‌نهایت‌بار درنظر می‌گیریم. ضمناً هربار باید میل «جملهٔ متمم» دستور (۱۰) را به‌سمت صفر(به‌ازای $p\to\infty$) مورد تحقیق قرارداد:

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_p^{(k)}=0$$

برای این‌که دراین‌مورد، مثلاً، نسبت به (۱۰b) قانع شویم، توجه می‌کنیم که مجموع موجود درجملهٔ متمم، از عبارت زیر تجاوز نمی‌کند

$$\frac{1}{(p!)^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

به‌طوری‌که همهٔ جملهٔ متمم، از مقدار

$$\frac{p!}{2^p(2p-1)!!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

تجاوز نمی‌کند وبدیهی است که، به‌ازای $p\to\infty$، به‌سمت صفرمیل می‌کند. اگر در (۱۰b) به‌سمت حد عبورکنیم، به‌برابری زیرمی‌رسیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=3\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times2^2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times2^3}\cdot\frac{2!}{5!!}+\dots+\frac{1}{p\cdot2^p}\cdot\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!}\right\}=$$

$$=3\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p\cdot2^p}\cdot\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!}$$

وبه‌سادگی می‌توان دیدکه با برابری (۱۳) در شمارهٔ ۳۹۵ متحد است.

ولی این‌گونه عبور به‌حد، همیشه و به‌طور کلی، به‌نتیجهٔ سودمندی نمی‌رسد: مثلا، اگرآن را درمورد برابری (۱۰a) به‌کار بریم، به‌طور ساده، به‌اتحاد زیرمی‌رسیم:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}$$

به‌این‌ترتیب، روشی که مارکوف داده است، طرحی کلی است که امکان‌های گسترده‌ای در اختیار محاسبه‌کننده می‌گذارد ولی، درعین‌حال، نیاز به‌مهارت زیادی دارد.

§۹. جمع کردن رشته‌های متباعد

۴۱۷. مقدمه. درتمام این فصل، برای محاسبهٔ مجموع رشتهٔ عددی مفروض

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (A)$$

ازحد مجموع جزئی آن استفاده می‌کردیم:

$$A = \text{حد}_{n\to\infty} A_n$$

وفرض می‌کردیم که این‌حد وجود دارد ومتناهی است (یا برابر است با بی‌نهایت با علامتی معین)؛ و به‌طور کلی، بررسی رشتهٔ «متناوب» متباعد را، کنار گذاشتیم.

موضوع‌های مختلفی که در آنالیز ریاضی پیدا شده بود ـ مثلا، تباعد حاصل‌ضرب دورشتهٔ متقارب [۳۹۲]ـ که درنیمهٔ دوم سدهٔ گذشته، بدطور طبیعی، به‌طرح مسالهٔ امکان جمع کردن رشته‌های متباعد ـ والبته، به‌مفهومی غیراز حالت معمولی ـ منجرشد. برخی از روش‌های این «جمع کردن»، ثمربخش ازآب درآمدند وما، دراین‌جا، به‌بحث دربارهٔ آن‌ها می‌پردازیم.

باید یادآوری کردکه پیش ازطرح نظریهٔ دقیق کوشی برای حد (و دررابطه باآن، دربارهٔ رشته‌ها)، در عمل‌های ریاضی، به‌رشته‌های متباعد برخورد می‌کردند. با وجودی که استفادهٔ ازآن‌ها، دراستدلال‌ها، مورد اعتراض قرار می‌گرفت، ولی گاهی کوشش‌می‌شد به‌این‌گونه رشته‌ها، معنایی عددی داده شود. مثلا، رشتهٔ متناوب

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

اززمان لایب‌نیتس، به‌عنوان «مجموع» عدد $\frac{1}{2}$ درنظرگرفته می‌شد. مثلا، اولر استدلال می‌کردکه اگردربسط

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

(که در واقع، تنها برای $|x| < 1$ درست است)، $x = 1$ قرار دهیم، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}=۱-۱+۱-۱+\dots$$

دراین «استدلال»، جنبه‌ای از حقیقت وجود دارد، ولی مسأله به‌روشنی طرح نشده است؛ خودآزادی در انتخاب بسط، امکان‌های کشفی زیادی به‌وجود می‌آورد، مثلا، اگر m و n را دوعدد دلخواه و $m<n$ بگیریم، می‌توان از بسط

$$\frac{۱+x+\dots+x^{m-۱}}{۱+x+\dots+x^{n-۱}}=\frac{۱-x^m}{۱-x^n}=۱-x^m+x^n-x^{m+n}+x^{۲n}-\dots$$

نتیجه گرفت:

$$\frac{m}{n}=۱-۱+۱-۱+۱-۱+\dots$$

آنالیز امروزی، مسأله را به‌گونه‌ای دیگر طرح می‌کند. اساس این طرح، براین یا آن تعریف دقیقی است که از مفهوم «مجموع»، به‌صورت تعمیم‌یافتهٔ آن، داده می‌شود. این تعریف، نه‌تنها درمورد رشته‌های عددی موردنظر ما، بلکه دربارهٔ تمامی طبقهٔ این‌گونه رشته‌ها، به‌کار می‌رود. در واقع این، جمع به‌معنای عادی آن نیست: باید به‌یاد بیاوریم که حتی مفهوم معمولی «مجموع رشته»ــ هرقدر هم که ساده و طبیعی به‌نظر آیدــ مستلزم تعریفی مشروط است. تعریف «مجموع تعمیمی» معمولا، تابع دوقاعده است.

اولاً، اگررشتهٔ $\sum a_n$ به‌عنوان «مجموع‌تعمیم‌یافتهٔ» A، ورشتهٔ $\sum b_n$ به‌عنوان«مجموع تعمیم‌یافتهٔ» B درنظرگرفته شود، درآن صورت، رشتهٔ $\sum pa_n+qb_n$،که درآن p و q دوعدد ثابت غیرمشخص هستند، باید به‌عنوان «مجموع تعمیم یافته» $pA+qB$ باشد. روش جمع‌کردن، طبق این قاعده را، خطی می‌نامند.

ثانیاً، باید تعریف معمولی جمع، به‌صورت حالت خاصی از تعریف جدید درآید؛ به عبارت دیگر، اگررشته‌ای متقارب، در معنای‌معمولی، مجموعی برابرA داشته باشد،باید «مجموع تعمیم‌یافتهٔ»آن‌هم وجود داشته باشد و، ضمناً، برابر A باشد. وقتی‌که، روش‌جمع‌کردن، دارای این ویژگی باشد، منتظم نامیده می‌شود. روشن است، تنها آن روش‌های منتظم جالب هستند، که برای تعیین «مجموع»، امکانی گسترده‌تر از روش معمولی جمع داشته باشند؛ تنها در این صورت است که می‌توان، به‌معنای واقعی خود، از «تعمیم مفهوم جمع» صحبت کرد.

اکنون به‌بررسی دوروش «جمع تعمیم‌یافته» می‌پردازیم که ازنظرکاربرد، بسیارمهم هستند.

۴۱۸. روش رشته‌های توانی. این روش، دراساس، به‌پواسون(S.O. Poisson) تعلق داردکه، برای نخستین‌بار، آن‌را در مورد رشته‌های مثلثاتی آزمایش کرد. این روش چنین است:

از روی رشتهٔ عددی مفروض A، رشتهٔ توانی زیر را می‌سازیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (1)$$

اگر این‌رشته، به‌ازای $0 < x < 1$، متقارب و مجموع $f(x)$ آن، به‌ازای $x \to 1 - 0$ دارای حد A باشد:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = A$$

درآن‌صورت، عدد A را «مجموع تعمیم‌یافته» رشتهٔ مفروض (در معنای پواسون) می‌نامند.

مثال‌ها. ۱) رشتهٔ بررسی شده به‌وسیلهٔ اولر

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

در این‌جا نیز، بنابر خود تعریف، منجر به رشتهٔ توانی می‌شودکه مجموع آن $\frac{1}{1+x}$، به‌ازای $x \to 1 - 0$، به‌سمت حد $\frac{1}{2}$ میل می‌کند. یعنی، به معنائی‌که در این‌جا پذیرفتیم، عدد $\frac{1}{2}$ عبارت از «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشتهٔ مزبور است.

۲) مثال کلی‌تری انتخاب می‌کنیم. رشتهٔ مثلثاتی

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \qquad (2)$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای θ $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$، متباعد است.

درواقع، اگر θ به‌صورت $\frac{p}{q}\pi$ باشد ــ p و q، عددهایی طبیعی‌اند ــ درآن‌صورت، برای مقدارهایی از n که مضربی از q باشند، داریم:

$$\cos n\theta = \pm 1$$

به‌طوری‌که شرط لازم تقارب رشته از بین می‌رود. اگر هم نسبت $\frac{\theta}{\pi}$ گنگ باشد، با بسط

آن به‌صورت کسر مسلسل نامتناهی و تشکیل کسرهای مناسب $\frac{m}{n}$، خواهیم داشت:

$$\left|\frac{\theta}{\pi}-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2}$$

و از آن‌جا

$$|n\theta-m\pi|<\frac{\pi}{n}$$

به‌این ترتیب، برای مجموعهٔ نامتناهی از مقدارهای n

$$|\cos n\theta\pm 1|<\frac{\pi}{n}$$

به‌طوری که

$$|\cos n\theta|>1-\frac{\pi}{n}$$

که باز هم دلیلی به‌برقرار نبودن شرط لازم تقارب است.

اگر رشتهٔ توانی

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta \qquad (0<r<1)$$

را تشکیل دهیم (دراین‌جا، حرف r، جانشین حرف قبلی x است)، در آن‌صورت، مجموع آن، به‌ازای مقدارهای مخالف صفر θ، چنین می‌شود:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \qquad (۳)$$

[۴۴۰، (۵) را ببینید] و به‌ازای $r\to 1-0$، به‌سمت صفر میل می‌کند. به‌این ترتیب، «مجموع تعمیم یافتهٔ» رشته ـ به‌ازای $\theta\neq 0$ ـ برابر ۰ می‌شود. اگر $\theta=0$ باشد، رشتهٔ (۲) به‌روشنی مجموعی برابر $+\infty$ خواهدداشت؛ ضمناً، عبارت (۳) هم، که دراین‌حالت به $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+r}{1-r}$ منجر می‌شود، دارای حد $+\infty$ است.

۳) به‌طریق مشابهی، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} sinn\theta \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

که تنها به‌ازای $\theta = \pm\pi$ و $\theta = 0$، متقارب است، به‌رشتهٔ توانی منجر می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n sinn\theta = \frac{rsin\theta}{1 - 2rcos\theta + r^2}$$

[۴۶۱، ۶) (a)]، به‌نحوی که «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» آن برابر $\frac{1}{2}cotg\frac{1}{2}\theta$ برای $\theta \neq 0$ و برابر صفر برای $\theta = 0$ می‌شود.

مستقیماً روشن است که این روش، برای «جمع کردن تعمیم یافتهٔ» خطی است. منتظم بودن آن‌هم، از روی قضیهٔ زیر ــ که متعلق به آبل است ــ معین می‌شود:

اگر رشتهٔ (A) متقارب ودارای مجموع A (به‌معنای عادی آن) باشد، درآن‌صورت، به ازای $0 < x < 1$، رشتهٔ توانی آن متقارب است و مجموع آن، وقتی $x \to 1 - 0$، به‌سمت حد A میل می‌کند.*

قبل از همه روشن است [۳۷۹] که شعاع تقارب رشتهٔ (۱)، کمتر از واحدنیست، به‌طوری‌که رشتهٔ (۱)، به‌ازای $0 < x < 1$، حقیقتاً متقارب می‌شود. این اتحاد را داشتیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

که در آن: $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ [۳۸۵، ۶) یا ۳۹۰، ۴) را ببینید]. این اتحادرا، جمله به‌جمله، از اتحاد معلوم زیر کم می‌کنیم:

$$A = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} Ax^n$$

که با فرض $a_n = A - A_n$، به‌اتحاد زیر می‌رسیم:

---

*) این قضیه، به‌وسیلهٔ آبل و در بررسی‌های او نسبت به‌قضیهٔ رشتهٔ دوجمله‌ای ثابت شده است [ما در ۴۳۷، ۶° به‌این قضیه برمی‌گردیم]. نمی‌توان شك داشت که همین روش آبل است که به تنظیم کلی روش «جمع تعمیم‌یافته» منجر شده است، درحالی که پواسون، تنها حالت خاصی از آن‌را در نظرگرفته بود. به‌همین جهت است که خود روش را، غالباً، روش آبل می‌نامند، هرچند خود مفهوم «جمع کردن» رشته‌های متباعد، از اندیشه‌های آبل بسیار دور بود. بعداً، دربارهٔ این روش، به‌عنوان روش پواسون ـ آبل، صحبت خواهیم کرد.

$$A-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nx^n \qquad (۴)$$

ازآن‌جاکه $\alpha_n\longrightarrow 0$، بنابراین، از روی $\varepsilon>0$ مفروض اختیاری، چنان شمارهٔ N به‌دست می‌آیدکه تنها به‌ازای $n>N$ داشته باشیم: $|\alpha_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$.

مجموع رشتهٔ سمت راست (۴) را، به‌دو مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N}\alpha_nx^n \quad و \quad (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_nx^n$$

مجموع دوم را، بلافاصله، می‌توان ارزیابی کرد، که مستقل از x است:

$$\left|(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_nx^n\right|\leqslant(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}|\alpha_n|x^n<\frac{\varepsilon}{2}\cdot(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n<\frac{\varepsilon}{2}$$

مجموع اولی‌هم، به‌ازای $x\longrightarrow 1$، به‌سمت صفرمیل می‌کند. وقتی‌که x به‌اندازهٔ کافی به ۱ نزدیك باشد، داریم:

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N}\alpha_nx^n\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

به‌طوری‌که سرانجام

$$\left|A-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right|<\varepsilon$$

که مؤید درستی حکم است.

۴۱۹. قضیهٔ تاوبر. اگـر «مجموع» رشتهٔ (A) را بنابـر قاعدهٔ پواسون ـ آبل، A بگیریم، همان‌طورکه دیدیم، به معنای عـادی، ممکن است دارای مجموع نباشد. به زبان دیگر، درحالت کلی نمی‌توان از حد

$$\lim_{x\longrightarrow 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A \qquad (۵)$$

تقارب رشتهٔ (A) را نتیجه گرفت. به‌طورطبیعی، این پرسش پیش می‌آید: رفتار جمله‌های این‌رشته راچگونه باید مشروط کرد تابتوان از (۵)، دربارهٔ تقارب‌رشتهٔ (A)نتیجه گیری کرد، یعنی برای این رشته، مجموع A، به‌معنای عادی آن، وجود داشته باشد.

در این‌جهت، نخستین قضیه را، تاوبر (A. Tauber) ثابت‌کرده است. قضیه‌چنین است:

فرض کنیم رشتهٔ (۱)، بـه‌ازای $0<x<1$ متقارب و برابری حدی (۵)، برقرار باشد. اگر جمله‌های رشتهٔ (A) چنان باشند که داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0 \qquad (۶)$$

در آن‌صورت، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$$

اثبات را به‌دو بخش تقسیم می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0 \quad \text{یا} \quad a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)^*$$

اگر فرض کنیم:

$$\delta_n=\max_{k\geqslant n}|ka_k|$$

در آن‌صورت، به‌ازای $n\to\infty$، مقدار δ_n، به‌صورت نزولی یکنوا، به‌سمت صفر میل می‌کند. برای هر عدد طبیعی و دلخواه N داریم:

$$\sum_{0}^{N}a_n-A=\sum_{0}^{N}a_n(1-x^n)-\sum_{N+1}^{\infty}a_nx^n+\left[\sum_{0}^{\infty}a_nx^n-A\right]$$

به‌نحوی که**

$$\left|\sum_{0}^{N}a_n-A\right|\leqslant\sum_{0}^{N}|na_n|(1-x)+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{|na_n|x^n}{n}+\left|\sum_{0}^{\infty}a_nx^n-A\right|\leqslant$$

---

*) از این‌جا، با توجه به‌قضیهٔ کوشی [۳۳، ۱۳)]، برقراری شرط (۶) هم نتیجه می‌شود، ولی عکس آن درست نیست، به‌نحوی که ما از فرض خاص‌تری نسبت به (۶) آغاز می‌کنیم.

**) از نابرابری‌های زیر، که به‌ازای $0<x<1$ روشن هستند، استفاده می‌کنیم،

$$1-x^n=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})<n(1-x)$$

و

$$\sum_{N+1}^{\infty}x^n=\frac{x^{N+1}}{1-x}<\frac{1}{1-x}$$

$$\leqslant (1-x)N\delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N+1)(1-x)} + \left|\sum_0^\infty a_n x^n - A\right|$$

با انتخاب عدد کوچك و نامشخص $\varepsilon > 0$، فرض می‌کنیم

$$(1-x)N = \varepsilon \quad \text{یا} \quad x = 1 - \frac{\varepsilon}{N}$$

به‌نحوی که به‌ازای $N \to \infty$، داریم: $x \to 1$. حالا فرض می‌کنیم N به‌قدر کافی بزرگ اختیار شود تا ۱) نابرابری $\delta_{N+1} < \varepsilon^2$ برقرار باشد و ۲) x نظیر، آن‌قدر به‌واحد نزدیك باشد که داشته باشیم:

$$\left|\sum_0^\infty a_n x^n - A\right| < \varepsilon$$

آن‌وقت

$$\left|\sum_0^\infty a_n x^n - A\right| < (2+\delta_0)\cdot\varepsilon$$

که حکم قضیه را ثابت می‌کند.

حالت کلی قضیه را، می‌توان به‌همین حالت خاص آن منجر کرد. فرض می‌کنیم:

$$v_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \quad (n \geqslant 1)\cdot \qquad v_0 = 0$$

به‌نحوی که

$$a_n = \frac{1}{n}(v_n - v_{n-1}) \quad (n \geqslant 1)$$

و سپس

$$\sum_0^\infty a_n x^n = a_0 + \sum_1^\infty \frac{v_n}{n} x^n - \sum_1^\infty \frac{v_{n-1}}{n} x^n =$$

$$= a_0 + (1-x)\sum_1^\infty \frac{v_n}{n} x^n + \sum_1^\infty \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} \qquad (7)$$

ولی با توجه به‌فرض قضیه، که به‌ازای $n \to \infty$ داریم: $\frac{v_n}{n} \to 0$، به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x)\sum_1^\infty \frac{v_n}{n} x^n = 0 \qquad (8)$$

که برای اثبات آن، کافی است مجموع را به‌دو بخش تقسیم کنیم:

$$(۱-x)\sum_{۱}^{N}+(۱-x)\sum_{N+۱}^{\infty}$$

و N را چنان انتخاب کنیم تا در مجموع دوم، همهٔ جمله‌های $\frac{v_n}{n}$، از لحاظ قدرمطلق، کمتر از عدد مفروض $\varepsilon>۰$ باشند. آن وقت، مجموع دوم هم، از لحاظ قدرمطلق، کمتر از ε می‌شود (هرچه باشد x)؛ دربارهٔ مجموع اول هم که از تعداد محدودی جمله تشکیل شده است، با نزدیك شدن x به ۱، می‌توان به‌همین نتیجه رسید.

به‌این ترتیب، با توجه به (۷)، (۵) و (۸) داریم:

$$\lim_{x\to ۱-۰}\sum_{۱}^{\infty}\frac{v_n}{n(n+۱)}x^{n+۱}=A-a_۰$$

ولی دراین‌جا، می‌توان ازحالت خاص‌قضیه ــ که ثابت کردیم ــ استفاده‌کرد به‌نحوی‌که

$$\sum_{۱}^{\infty}\frac{v_n}{n(n+۱)}=A-a_۰$$

از طرف دیگر

$$\sum_{۱}^{n}\frac{v_m}{m(m+۱)}=\sum_{۱}^{n}\frac{v_m}{m}-\sum_{۱}^{n}\frac{v_m}{m+۱}=$$

$$=\sum_{۱}^{n}\frac{v_m}{m}-\sum_{۱}^{n+۱}\frac{v_{m-۱}}{m}=-\frac{v_n}{n+۱}+\sum_{۱}^{n}a_m$$

از این‌جا، چون اولین جملهٔ از سمت راست به‌سمت صفر میل می‌کند:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{۱}^{n}a_m=A-a_۰$$

که اثبات قضیه را به‌پایان می‌رساند.

بعدها، قضیه‌های مشابهی، به‌وسیلهٔ مؤلفان مختلف، ثابت شد (که بهتر است آن‌ها را، قضیه‌های تاوبری بنامیم) که، درواقع، تغییرشکل یافته و یا تعمیم‌یافتهٔ شرط‌های‌تاوبر هستند و، به‌همین مناسبت، لزومی به‌ذکر آن‌ها نمی‌بینیم.

۴۲۰. روش واسطه‌های حسابی. فکر این روش، به‌ساده‌ترین صورت خود، متعلق به‌فروبه‌نیوس (G. Frobenius) است، ولی‌معمولاً آن‌رابانام چه‌زارو(E. Cesàro) مربوط می‌کنند، که در واقع، تکامل و توسعهٔ بعدی روش ازاو است. اینك، آن‌چه خود روش را تشکیل می‌دهد:

از روی مجموع‌های جزئی A_n رشتهٔ عددی مفروض (A)، رشتهٔ واسطه‌های عددی

آن‌ها را می‌سازند:

$$\alpha_0 = A_0, \quad \alpha_1 = \frac{A_0 + A_1}{2}, \ \ldots, \ \alpha_n = \frac{A_0 + A_1 + \cdots + A_n}{n+1}, \ \ldots$$

اگر واریانت α_n، به ازای $n \to \infty$، دارای حد A باشد، در آن‌صورت، همین عدد A «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشته (به‌معنای چه‌زارو) نامیده می‌شود.

مثال‌ها. ۱) دوباره به‌رشتهٔ

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

برمی‌گردیم. در این‌جا داریم:

$$\alpha_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}, \quad \alpha_{2k-1} = \frac{1}{2}$$

به‌طوری‌که $\alpha_n \to \frac{1}{2}$. دوباره به‌همان نتیجه‌ای رسیدیم که از روی روش پواسون ـ آبل به‌دست آورده بودیم. [۴۱۸، ۱)].

۲) برای رشتهٔ

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

مجموع‌های جزئی (تنها به‌شرط $\theta \neq 0$) چنین می‌شوند:

$$A_n = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\theta\right)}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}$$

حالا، به‌سادگی می‌توانیم واسطه‌های حسابی را محاسبه کنیم:

$$(n+1)\alpha_n = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}\theta} \sum_{m=0}^{n} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\theta =$$

$$= \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta} \sum_{m=0}^{n} [\cos m\theta - \cos(m+1)\theta] =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

و بالاخره

$$\alpha_n = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

و معلوم است که $\alpha_n \to 0$. بنابراین، برای مقدارهای $\theta \neq 0$، «مجموع تعمیم‌یافته» نیز برابر صفر است [با ۴۱۸، ۲) مقایسه کنید].

۳) رشتهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

به‌ازای $\theta \neq 0$ داریم:

$$A_n = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

و سپس

$$(n+1)\alpha_n = \frac{n+1}{2}\cot g\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\sum_{m=1}^{n+1}[\sin(m+1)\theta - \sin m\theta] =$$

$$= \frac{n+1}{2}\cot g\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(n+2)\theta - \sin\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}$$

و از این‌جا روشن است که: $\alpha_n \to \frac{1}{2}\cot g\frac{1}{2}\theta$.

در همهٔ حالت‌ها، از روی روش چه‌زارو، همان «مجموع تعمیم یافته‌ای» به دست می‌آید که از روی روش پواسون ـ آبل به‌دست آمده بود. کمی پایین‌تر روشن خواهیم

کرد که این امر تصادفی نیست.

خطی بودن روش، مستقیماً معلوم می‌شود. قضیهٔ معلوم کوشی [۳۳، ۱۳]، در حالت وجود حد

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

وجود حد را، برای واسطه‌های حسابی α_n هم تایید می‌کند. به‌این‌ترتیب، روش چه‌زارو، منتظم هم می‌باشد.

۴۲۱. ارتباط متقابل بین روش‌های پواسون ـ آبل و چه‌زارو. از نکتهٔ ساده‌ای آغاز می‌کنیم: اگر رشتهٔ (A) را از روی روش واسطه‌های حسابی، به‌سمت «مجموع» متناهی A جمع کنیم در آن‌صورت، الزاماً

$$a_n = o(n)$$

در واقع، از $\alpha_{n-1} \to A$ و $\frac{n+1}{n}\alpha_n \to A$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{(n+1)\alpha_n - n\alpha_{n-1}}{n} = \frac{A_n}{n} \to 0$$

که در نتیجه

$$\frac{a_n}{n} = \frac{A_n}{n} - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{A_{n-1}}{n-1} \to 0$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

پرسشی که در عنوان طرح کردیم، با قضیهٔ زیر، که متعلق به‌فروبه‌نیوس است، پایان می‌پذیرد:

اگر رشتهٔ A را از روی روش واسطه‌های حسابی، به «مجموع» متناهی A جمع کنیم، در آن صورت این رشته، از روی روش پواسون ـ آبل هم قابل جمع است و ضمناً، به‌همان «مجموع» می‌رسد.

فرض می‌کنیم $\alpha_n \to A$. با توجه به‌نکته‌ای که در ابتدا آوردیم، تقارب رشتهٔ توانی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

برای $0 < x < 1$ معلوم است. دو بار از تبدیل آبل استفاده می‌کنیم [۳۸۳ و به‌خصوص

۳۸۵، ۶) را ببینید]، به‌ترتیب نتیجه می‌گیریم:

$$f(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\alpha_nx^n\text{*}$$

[ضمناً لازم به‌یادآوری است که $A_0+A_1+\cdots+A_n=(n+1)\alpha_n$].

معلوم است که (برای $0<x<1$): $(1-x)^{-2}=\sum_{0}^{\infty}(n+1)x^n$ یا

$$1=(1-x)^2\sum_{0}^{\infty}(n+1)x^n$$

دو طرف این اتحاد را در A ضرب و اتحاد حاصل را از آن کم می‌کنیم:

$$A-f(x)=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(A-\alpha_n)x^n$$

مجموع سمت راست‌را، به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

$$(1-x)^2\sum_{0}^{N-1}+(1-x)^2\sum_{N}^{\infty}$$

ضمناً عدد N را طوری انتخاب می‌کنیم که، به‌ازای $n>N$، داشته باشیم:

$$|A-\alpha_n|<\varepsilon$$

که در آن، ε عدد غیرمشخص‌مثبت مفروضی است. آن‌وقت، مجموع‌دوم، از لحاظ قدرمطلق،

---

*) درستی این اتحاد، به‌سادگی و به‌طور مستقیم هم قابل درك است. بـا آغاز از تقارب رشته و با توجه به‌کران‌دار بودن α_n، داریم:

$$(1-2x+x^2)\sum_{0}^{\infty}(n+1)\alpha_nx^n=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}[(n+1)\alpha_n-2n\alpha_{n-1}+(n-1)\alpha_{n-2}]x^n=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}\{[(n+1)\alpha_n-n\alpha_{n-1}]-[n\alpha_{n-1}-(n-1)\alpha_{n-2}]\}x^n=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}(A_n-A_{n-1})x^n=\sum_{0}^{\infty}a_nx^n$$

[ضمناً فرض‌می‌کنیم، $A_{-1}=\alpha_{-1}=\alpha_{-2}=0$]. تقارب‌رشتهٔ آخر، به‌خودی‌خود روشن‌است.

از ε کوچکتر خواهد شد (بدون بستگی به x!)، و برای مجموع اول هم، با توجه به نزدیک‌شدن x به ۱، می‌توان به همین نتیجه رسید. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود [با اثبات قضیهٔ آبل در ۴۱۸ مقایسه کنید].

به این ترتیب، معلوم می‌شود، در هر حالتی که بتوان روش چه‌زارو را به کار برد، می‌توان با روش پواسون ـ آبل هم به‌همان نتیجه رسید. ولی عکس این حکم درست نیست: رشته‌هایی وجود دارند که با روش پواسون ـ آبل مجموع‌پذیرند، درحالی که، به‌معنای چه‌زارو، دارای «مجموع تعمیم‌یافته» نیستند. به‌عنوان مثال، رشتهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$۱-۲+۳-۴+\cdots$$

چون در این‌جا، شرط لازم جمع‌پذیری با روش واسطه‌های حسابی ـ که در ابتدا به آن اشاره کرده‌ایم ـ به‌روشنی رعایت نشده‌است، بنابراین از این‌روش نمی‌توان استفاده کرد. در عین حال

$$۱-۲x+۳x^۲-۴x^۳+\cdots$$

(به‌ازای $۰<x<۱$) دارای مجموع $\frac{۱}{(۱+x)^۲}$ است که، به‌ازای $x\to ۱-۰$. به‌سمت $\frac{۱}{۴}$ میل می‌کند. وهمین‌عدد، «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشته از روی روش پواسون ـ آبل است.

به‌این ترتیب، روش پواسون ـ آبل، روشی نیرومندتر است. یعنی، نسبت به روش چه‌زارو، در حالت‌های بیشتری قابل استفاده است، ولی در حالت‌هایی که بتوان از هردو روش استفاده کرد، روش چه‌زارو را نقض نمی‌کند.

۴۲۲. قضیهٔ هاردی ـ لاندو. شبیه حالت مربوط به‌روش پواسون ـ آبل، برای‌روش چه‌زارو هم، می‌توان قضیه‌های به‌گونهٔ «تاوبری» را ثابت کرد؛ یعنی‌می‌توان برای‌جمله‌های رشته، شرط‌های تکمیلی پیدا کرد که، در صورت وجود آن‌ها، بتوان از جمع‌پذیری رشته از روی روش واسطه‌های حسابی، تقارب آن‌را، به‌معنای عادی‌کلمه، نتیجه‌گرفت.

با توجه به‌قضیهٔ فروبه‌نیوس، روشن است که، هرقضیهٔ تاوبری برای روش پواسون ـ آبل را، می‌توان به قضیهٔ مشابهی برای روش چه‌زارو منجر کرد. مثلاً، خود قضیهٔ تاوبر را، در این‌جا، می‌توان این‌طور بیان کرد: اگر $A_n\to A$ و داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_۱+۲a_۲+\cdots+na_n}{n}=۰ \qquad (۹)$$

در آن‌صورت، درعین حال خواهیم داشت: $A_n\to A$. ضمناً دراین‌جا می‌توان این‌حکم‌را،

مستقیماً، از اتحاد زیر ــ که به‌سادگی قابل تحقیق است ــ نتیجه گرفت*:

$$A_n-\alpha_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$$

که برای حالت مفروض، حتی لزوم شرط (۹) را هم نشان می‌دهد.

هاردی (G. H. Hardy) ثابت کرد که نتیجه‌گیری از $\alpha_n\to A$ به $A_n\to A$ را، نه‌تنها با فرض $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$، بلکه با این فرض وسیع‌تر هم که

$$|ma_m|<C \quad (C=\text{const.};\ m=1, 2, 3, \ldots)$$

می‌توان به‌دست آورد.

لاندو (E. Landau) نشان‌داد که می‌توان، حتی به‌برقراری «یک‌طرفهٔ»این ارتباط، اکتفا کرد:

اگر رشتهٔ (A)، از روی روش واسطه‌های حسابی به «مجموع» A جمع‌پذیر باشد و ضمناً، این شرط هم برآورده شود:

$$ma_m>-C \quad (C=\text{const.};\ m=1, 2, 3, \ldots)$$

در آن‌صورت، درعین حال داریم:

$$\sum_0^\infty a_n=A$$

[با عوض کردن علامت‌های همهٔ جمله‌های رشته، می‌بینیم که، می‌توان نابرابری را به‌مفهوم دیگری گرفت:

$$ma_m<C$$

و روشن است که این قضیه را می‌توان در حالتی که جمله‌های رشته علامت ثابتی دارند،

---

*) داریم،

$$(n+1)A_n-(n+1)\alpha_n=(n+1)A_n-(A_0+A_1+\cdots+A_n)=$$
$$=(A_n-A_0)+(A_n-A_1)+\cdots+(A_n-A_{n-1})=$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_2+\cdots+a_n)+\cdots+a_n=$$
$$=a_1+2a_2+\cdots+na_n$$

به‌کار برد].

برای اثبات، ابتدا، مجموع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$S=\sum_{m=n+1}^{n+k} A_m$$

که در آن، n و k، عددهای طبیعی ودلخواهی هستند. این مجموع را می‌توان به‌سادگی، از راه تبدیل اتحادی، به‌این‌صورت نوشت:

$$S=\sum_{m=0}^{n+k} A_m-\sum_{m=0}^{n} A_m=(n+k+1)\alpha_{n+k}-(n+1)a_n=$$

$$=k\alpha_{n+k}+(n+1)(\alpha_{n+k}-\alpha_n) \qquad (10)$$

اگر A_m دلخواهی را انتخاب کنیم (به‌ازای $n<m\leqslant n+k$)، بـا استفاده از نابرابری فرض، یعنی $a_m>-\frac{C}{m}$، می‌توان چنین برآوردی را پیدا کرد:

$$A_m=A_n+(a_{n+1}+\cdots+a_m)>A_n-\frac{k}{n}C$$

که اگر نسبت به m جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$S>kA_n-\frac{k^2}{n}C$$

درنتیجه، ضمن مقایسه با (۱۰)، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$A_n<\alpha_{n+k}+\frac{n+1}{k}(\alpha_{n+k}-\alpha_n)+\frac{k}{n}C \qquad (11)$$

اکنون، عدد n را به‌دلخواه و به‌سمت بی‌نهایت بزرگ می‌کنیم و k را چنان‌تغییر می‌دهیم که نسبت $\frac{k}{n}$ به‌سمت عدد مفروض $\varepsilon>0$ میل کند. در ایـن‌صورت، سمت راست نابرابری (۱۱)، به‌سمت حد $A+\varepsilon C$ میل‌خواهد کرد، به‌طوری‌که، برای مقدارهای‌به‌قدر کافی بزرگ n، خواهیم داشت:

$$A_n<A+2\varepsilon C \qquad (12)$$

به‌طریق مشابهی، با بررسی مجموع

$$S'=\sum_{m=n-k+1}^{n} A_m=k\alpha_{n-k}+(n+1)(\alpha_n-\alpha_{n-k})$$

و برآورد A_m (به‌ازای $n-k<m<n$) ازطرف بالا

$$A_m = A_n - (a_{m+1} + \cdots + a_n) < A_n + \frac{k}{n-k}C$$

ضمناً، به‌نابرابری زیرمی‌رسیم:

$$S' < kA_n + \frac{k^2}{n-k}C$$

واز آن‌جا

$$A_n > \alpha_{n-k} + \frac{n+1}{k}(\alpha_n - \alpha_{n-k}) - \frac{k}{n-k}C$$

اگرمثل قبل $n \to \infty$ و درعین‌حال $\frac{k}{n} \to \varepsilon$ $\left(\text{این‌بار فرض کنید} \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$، درآن‌صورت

سمت راست‌این‌نابرابری‌به‌سمت‌حد $A - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C > A - 2\varepsilon C$ میل می‌کند. در نتیجه، برای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ n داریم:

$$A_n > A - 2\varepsilon C \qquad (13)$$

از مقایسهٔ (۱۲) و (۱۳) با یکدیگر، می‌بینیم که درواقع

$$\text{حد } A_n = A$$

وقضیه ثابت می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که قضیهٔ «تاوبری» مشابهی هم برای جمع‌پذیری با روش پواسون-آبل هم ثابت می‌شودکه قضیهٔ فوق حالت خاصی از آن می‌شود. ولی با توجه به‌پیچیده‌بودن اثبات، از طرح آن صرف‌نظر می‌کنیم.

۴۲۳. به‌کاربردن تعمیم جمع درضرب رشته‌ها. حالا به‌کاربرد روش‌های تعمیم‌یافتهٔ جمع‌کردن، درمسالهٔ مربوط به‌ضرب رشته‌ها، از روی قاعدهٔ کوشی [۳۸۹]، می‌پردازیم. علاوه برسری (A)، رشتهٔ دیگری را هم درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n + \cdots \qquad (B)$$

آن‌وقت، رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) \qquad (C)$$

حاصل‌ضرب رشته‌های (A) و (B) درشکل کوشی نامیده می‌شود. اگر رشته‌های داده شده، متقارب و دارای مجموع‌های عادی A و B باشند، رشتهٔ (C) ممکن است متباعد بشود [مثال آن را، در ۳۹۲ ببینید].

با وجود این، در همهٔ حالت‌ها، می‌توان «مجموع» رشتهٔ (C) را با روش پواسون-آبل، و به‌مجموع AB، به‌دست آورد.

درواقع، به‌ازای $0 < x < 1$، رشتهٔ (۱) و، همچنین، رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

هردو متقارب مطلق می‌شوند [۳۷۹]؛ اگر مجموع‌های آن‌ها را، به‌ترتیب، $f(x)$ و $g(x)$ بنامیم، حاصل‌ضرب این رشته‌ها، یعنی رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n$$

نیز، با توجه به‌قضیهٔ کوشی [۳۸۹]، متقارب می‌شود ومجموع آن، برابر حاصل‌ضرب $f(x).g(x)$ است. این مجموع، به‌ازای $x \to 1-0$ به‌سمت AB میل می‌کند، زیرا به‌طوری که دیدیم، به‌طور جداگانه

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = A \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 1-0} g(x) = B$$

بنابراین «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشتهٔ (C) (به‌معنای پواسون-آبل) حقیقتاً برابر AB می‌شود، واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

از این‌جا، به‌عنوان نتیجه، قضیهٔ آبل دربارهٔ ضرب رشته‌ها [۳۹۲] به‌دست می‌آید. به‌همین‌ترتیب، از خود اثبات قضیه روشن است که، اگر رشته‌های (A) و (B)، به‌جای این که به‌معنای خاص خود متقارب باشند، تنها با روش پواسون-آبل «مجموعی» برابر A و B داشته باشند، بازهم همین نتیجه‌گیری به‌قوت خود باقی خواهد بود.

درچنین حالتی، با توجه به‌قضیهٔ فروبه‌نیوس [۴۲۱]، می‌توان حکم زیررا هم‌داد: اگر رشته‌های (A)، (B) و (C) را، به مفهوم چه‌زارو، جمع کنیم و، به‌ترتیب، «مجموع‌های تعمیم‌یافتهٔ» آن‌ها را A، B و C بگیریم، درآن صورت الزاماً داریم:

$$C = AB$$

به‌عنوان مثال، مجذور رشتهٔ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1\times3}{2\times4}-\cdots+(-1)^m\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}+\cdots$$

را درنظرمی‌گیریم که ازبسط دوجمله زیر (به‌ازای $x=1$) به‌دست‌آمده است:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times3}{2\times4}x^2-\cdots+(-1)^m\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}x^m+\cdots$$

با ضرب این رشتهٔ عددی درخودش، به‌رشتهٔ آشنای زیرمی‌رسیم:

$$1-1+1-1+1-1+\cdots^*$$

که «مجموع تعمیم‌یافتهٔ آن»، چه‌به‌معنای پواسون-آبل و چه‌به‌معنای چه‌زارو، برابراست با

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

ضمناً، اگراین رشتهٔ متباعد را هم مجذورکنیم، به‌این رشته می‌رسیم:

$$1-2+3-4+\cdots$$

که «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» آن، به‌معنای پواسون-آبل برابراست با $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ (این رشته، به‌مفهوم چه‌زارو، جمع‌پذیر نیست).

۴۲۴. روش‌های دیگرجمع تعمیم‌یافتهٔ رشته‌ها. ۱) روش گ. ف. وورونوف. فرض می‌کنیم دنبالهٔ عددی ومثبت $\{p_n\}$ را داشته باشیم و ضمناً

$$P_0=p_0,\ P_n=p_0+p_1+\cdots+p_n\ (n>0)$$

از مجموع‌های جزئی A_n رشتهٔ (A)، این عبارت را تشکیل می‌دهیم:

$$w_n=\frac{P_nA_0+P_{n-1}A_1+\cdots+P_0A_n}{P_n}$$

اگر به‌ازای $n\to\infty$، داشته باشیم: $w_n\to A$، آن‌وقت A را «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشتهٔ

---

*) دراین‌جا، از اتحاد عددی

$$\sum_0^n\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}=\sum_0^n\frac{(2n-2m-1)!!}{(2n-2m)!!}$$

استفاده کرده‌ایم، که در آن $(-1)!!$ و $0!!$ را واحد به‌حساب می‌آوریم.

(A) درمعنای وورونوف، به‌ازای انتخاب دنبالهٔ مفروض $\{p_n\}$ می‌نامند.

خطی بودن روش، چه دراین حالت وچه درحالت‌های بعدی، روشن است وما،به‌آن نمی‌پردازیم.

برای منتظم بودن روش وورونوف، لازم وکافی است که این شرط را داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n}=0$$

شرط لازم است. فرض می‌کنیم . این روش منتظم باشد، یعنی فرض می‌کنیم از $A_n\to A$، همیشه نتیجه شود: $w_n\to A$. اگر، درحالت خاص، رشتهٔ

$$1-1+0+0+0+\cdots$$

را درنظر بگیریم،که درآن، $A_0=1$ وبرای بقیهٔ مجموع‌های جزئی داریم $A_n=0$ (و درنتیجه، $A=0$)، درآن صورت، لازم است که

$$w_n=\frac{p_n}{P_n}=0$$

شرط کافی است. اکنون فرض می‌کنیم، شرط قضیه برقرار باشد و ثابت می‌کنیم که از $A_n\to A$ می‌توان نتیجه گرفت: $w_n\to A$.

به‌قضیهٔ تپلیتس [۳۹۱] برمی‌گردیم و درآن، x_n را بهA_n و t_{nm} را به $\frac{p_{n-m}}{P_n}$ تبدیل می‌کنیم. شرط (a) ازاین قضیهٔ برقرار است، زیرا

$$t_{nm}=\frac{p_{n-m}}{P_n}<\frac{p_{n-m}}{P_{n-m}}\to 0$$

برقراری شرط‌های (b) و (c) هم، روشن است، زیرا

$$\sum_{m=0}^{n}|t_{nm}|=\sum_{m=0}^{n}t_{nm}=1$$

درنتیجه، همان‌طور که می‌خواستیم ثابت کنیم: $w_n\to A$.

۲) تعمیم روش چه‌زارو. با روش واسطه‌های حسابی آشنا هستیم [۴۲۵]؛ این‌روش، ساده‌ترین روش ازمجموعهٔ نامتناهی روش‌هایی است که چه‌زارو، برای «جمع کردن»، پیشنهاد کرده است. چه‌زارو، با تثبیت عدد طبیعی k، واریانت زیررا وارد می‌کند:

$$\gamma_n^{(k)}=\frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k}=\frac{C_{n+k-1}^{k-1}A_0+C_{n+k-2}^{k-1}A_1+\cdots+C_{k-1}^{k-1}A_n}{C_{n+k}^k}$$

وحد آن را، به‌ازای $n\to\infty$، به‌عنوان «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» (از مرتبهٔ k)، بـرای رشتهٔ (A) درنظر می‌گیرد؛ درواقع، به‌ازای $k=1$، به‌روش واسطه‌های حسابی می‌رسیم.

ازاین به‌بعد، بارها ازرابطهٔ بین ضریب‌های C، یعنی

$$C_{k-1}^{k-1}+C_k^{k-1}+C_{k+1}^{k-1}+\cdots+C_{n+k-1}^{k-1}=C_{n+k}^k \qquad (14)$$

استفاده خواهیم کرد که، به‌سادگی و با روش استقرای ریاضی نسبت به n، قابل‌اثبات‌است، به‌شرطی‌که از رابطهٔ معلوم زیر آغاز کنیم:

$$C_{n+k}^k=C_{(n-1)+k}^k+C_{n+(k-1)}^{k-1}$$

ابتدا نشان می‌دهیم کـه روش‌های چه‌زارو (از هرمرتبه‌ای کـه باشند)، حالت‌های حاصی از روش‌هـای منتظم وورونوف هستند. برای این منظور، کافـی است فـرض‌کنیم $p_n=C_{n+k-1}^{k-1}$، زیرا در این صورت، از (۱۴) نتیجه می‌شود: $P_n=C_{n+k}^k$ و، ازاین‌جا، روشن می‌شود که به‌ازای $n\to\infty$:

$$\frac{p_n}{P_n}=\frac{1}{n+k}\to 0$$

به‌کمك همان برابری (۱۴) و با استفاده‌ازخود تعریف مقدار $S_n^{(k)}$، ثابت‌می‌شود که*

$$S_0^{(k-1)}+S_1^{(k-1)}+\cdots+S_n^{(k-1)}=S_n^{(k)} \qquad (15)$$

به‌کمك این‌برابری، می‌توان‌بستگی متقابل بین «جمع‌کردن» مرتبهٔ kام ومرتبهٔ $(k-1)$ام را، بـا روش چه‌زارو، فهمید، فرض‌کنیم، رشتهٔ (A)، «جمع‌کردن» مرتبهٔ $(k-1)$ام را بپذیرد، به‌طوری‌که $\gamma_n^{(k-1)}\to A$. بنابر (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$\gamma_n^{(k)}=\frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k}=\frac{S_0^{(k-1)}+S_1^{(k-1)}+\cdots+S_n^{(k-1)}}{C_{n+k}^k}=$$

$$=\frac{C_{k-1}^{k-1}\gamma_0^{(k-1)}+C_k^{k-1}\gamma_1^{(k-1)}+\cdots+C_{n+k-1}^{k-1}\gamma_n^{(k-1)}}{C_{n+k}^k}$$

ازاین‌جا، با استفاده ازقضیهٔ تپلیتس [۳۹۱] وضمناً با فرض

---

*) منظور از $S_n^{(0)}$، همان A_n است.

$$x_n = \gamma_n^{(k-1)} \text{ و } t_{nm} = \frac{C_{n+k-1}^{k-1}}{C_{n+k}^{k}} \quad (m = 0, 1, \ldots, n)$$

به‌این نتیجه می‌رسیم که $\gamma_n^{(k)} \to A$. به‌این ترتیب، اگر بتوان رشتهٔ (A) را، از روی روش چه‌زارو، در مرتبهٔ دلخواهی «جمع» کرد، درآن صورت، همین رشته را می‌توان در مرتبهٔ دلخواه بالاتری هم «جمع» کرد که، ضمناً، همان «مجموع» به‌دست می‌آید.

حالا، به‌تعمیم قضیهٔ فروبه‌نیوس [۴۲۱] می‌پردازیم: اگر رشتهٔ (A) را، با یکی از روش‌های چه‌زارو (مثلاً، مرتبهٔ k) جمع کنیم، درآن صورت، می‌توان همان مجموع را، از روی روش پواسون-آبل هم به‌دست آورد.

فرض کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^{k}} = A \qquad (۱۶)$$

ازاین‌جا، می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت که رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(k)} x^n \qquad (۱۷)$$

برای $-1 < x < 1$، متقارب است. درواقع، چون $C_{n+k}^{k} \sim \frac{n^k}{k!}$، از (۱۶) به‌دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S_n^{(k)}|}{n^k} = \frac{|A|}{k!}$$

با شرط $A \neq 0$، آن‌وقت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{S_n^{(k)}} = 1$$

به‌نحوی که، ازروی قضیهٔ کوشی-آدامار، شعاع تقارب رشتهٔ (۱۷) برابر است با واحد. اگر داشته باشیم $A = 0$، این شعاع تقارب درهمهٔ حالت‌ها کمتر ازواحد نیست.

اکنون رشته اتحادهای زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(1)} x^{n*}$$

. . . . . .

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n$$

قبلاً، تقارب رشتهٔ آخر را، در بازهٔ $(1, -1)$ برقرار کردیم، ازهمین‌جا [۳۹۰، ۴] را ببینید]. تقارب همهٔ رشته‌های قبلی نتیجه می‌شود: به‌جز آن

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = (1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} C_{n+k}^k x^n \qquad (18)$$

این اتحاد را، با اتحاد دیگر

$$1 = (1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^k x^n \qquad (19)$$

مقایسه می‌کنیم، که درهمان بازهٔ $(1, -1)$ برقرار است و ازمشتق مرتبهٔ kام تصاعد زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

اگر دوطرف اتحاد (۱۹) را در A ضرب و، سپس، برابری (۱۸) را، جمله‌به‌جمله، ازآن کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} [A - \gamma_n^{(k)}] C_{n+k}^k x^n$$

دنبالهٔ استدلال (با درنظرگرفتن (۱۶))، کاملاً شبیه استدلالی است که برای اثبات قضیهٔ آبل در ۴۱۸ و قضیهٔ فروبه‌نیوس در ۴۲۱ انجام دادیم؛ خواننده می‌تواند، خود دنبال بحث را بگیرد. درنتیجه به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

واین، همان حکمی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

توجه کنیم: رشته‌های متباعدی وجود دارند که با روش پواسون-آبل جمع‌پذیرند،

---

*) دراین‌جا و بعدازآن، رابطه‌های ازگونهٔ (۱۵)، درنظرگرفته شده است.

درحالی‌که با هیچ‌کدام ازروش‌های چه‌زارو قابل جمع‌کردن نیستند. به‌این‌ترتیب، روش اولی، ازهمهٔ روش‌های بعدی (حتی اگر یک‌جا درنظرگرفته شوند) نیرومندتر است.

۳) روش‌های هلدر. این روش‌ها، به‌طور ساده، ازکاربرد تکراری روش واسطه‌های حسابی تشکیل می‌شود. همهٔ پرسش‌های مربوط به‌منتظم بودن و ارتباط متقابل آن‌ها، با استناد به‌قضیهٔ کوشی، به‌پایان می‌رسد.

می‌توان ثابت کرد که: اگرازروش واسطه‌های حسابی k مرتبه استفاده کنیم، به‌معنای آن است که روش چه‌زارو را در مرتبه kام به‌کار بریم، یعنی همان طبقهٔ رشته‌ها و، ضمناً، همان مجموع‌ها، به‌دست می‌آید.

۴) روش بورل. روش بورل چنین است: از روی رشتهٔ (A) و مجموع‌های جزئی آن A_n، عبارت زیررا می‌سازیم:

$$\frac{\sum_{0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}}{\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = e^{-x} \cdot \sum_{0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$$

اگر رشتهٔ اخیر متقارب باشد، ولوبرای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ x، و مجموع آن به‌ازای $x \to +\infty$ دارای حد A باشد، درآن صورت، همین عدد «مجموع تعمیم یافتهٔ» رشتهٔ مفروض (A)، به‌معنای بورل، خواهد بود.

منتظم بودن روش بورل را ثابت می‌کنیم. رشتهٔ (A) را متقارب، مجموع آن را A و باقی‌ماندهٔ $A - A_n$ را α_n می‌گیریم. به‌ازای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ n داریم:

$$A - e^{-x} \sum_{0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_{0}^{\infty} A \frac{x^n}{n!} - e^{-x} \sum_{0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_{0}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}$$

عدد کوچک و دلخواه $\varepsilon > 0$ را درنظر می‌گیریم؛ چنان شماره‌ای برای N پیدا می‌شود که به ازای $n > N$ داشته باشیم: $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. عبارت آخر را به‌صورت مجموع زیر درمی‌آوریم:

$$e^{-x} \sum_{0}^{N} \alpha_n \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \sum_{N+1}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!}$$

جملهٔ دوم ازلحاظ قدرمطلق، کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ است (هرچه‌باشد x) و اولی به‌صورت حاصل

ضرب e^{-x} درچند جمله‌ای توانی نسبت به x درمی‌آید که، به‌ازای xهای به‌قدرکافی بزرگ، ازلحاظ قدرمطلق، کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ می‌شود واین، همه‌چیز را ثابت می‌کند*.

۵) روش اولر. در ۴۱۳، برای رشتهٔ

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

دستور زیررا داشتیم [(۷) را ببینید]:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\Delta^p a_0}{2^{p+1}} \qquad (20)$$

که «تبدیل اولر» را بیان می‌کند. ضمناً، همان‌طورکه اثبات شده است، از تقارب رشتهٔ سمت‌چپ، تقارب رشتهٔ سمت راست و برابری مجموع آن‌ها نتیجه می‌شود.

ولی، وقتی رشتهٔ اول متباعد باشد، رشتهٔ دوم ممکن است متقارب شود؛ در چنین حالتی، مجموع اولر آن، به‌عنوان «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشتهٔ اول درنظر گرفته می‌شود. روش اولر هم، برای جمع رشته‌ها، همین است. ملاحظه‌ای که هم‌اکنون داشتیم، منتظم‌بودن روش اولررا تضمین می‌کند.

اگررشتهٔ موردنظررا، به‌صورت معمول (A) وبدون جداکردن علامت‌های $\pm$ بنویسیم و عبارت (۴) شمارهٔ ۴۱۳ را برای تفاضل pام به‌خاطر بیاوریم، درآن صورت می‌توان گفت که با روش جمع اولر، به عنوان «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشتهٔ (A)، مجموع معمول رشتهٔ

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{a_0+C_p^1 a_1+C_p^2 a_2+\cdots+C_p^p a_p}{2^{p+1}}$$

را حفظ می‌کند (با فرض این‌که، رشتهٔ اخیر متقارب باشد).

در همین‌جا، به‌شرح روش‌های مختلف جمع رشته‌های متباعد پایان می‌دهیم، زیرا همین توضیح‌هاکافی است تا خواننده را قانع کندکه برای حل این مسأله می‌توان از روش‌های گوناگونی استفاده‌کرد. در همهٔ حالت‌ها، منتظم بودن روش را، به‌عنوان شرطی لازم، اثبات کردیم. تأسف ما تنها از این است‌که همه‌جا این امکان را نداشتیم تا در مسألهٔ مربوط به‌رابطهٔ متقابل روش‌های مختلف، عمیق‌تر بحث کنیم. ضمناً، می‌توان درنظر داشت

*) خواننده متوجه شباهت این اثبات، با اثبات قضیهٔ آبل [۴۱۸] و دیکران می‌شود.

که دوروش مختلف ممکن است حوزهٔ کاربرد مشترکی داشته باشند، ولی به‌هرحال، حوزهٔ کاربرد آن‌ها برهم منطبق نیست؛ همچنین ممکن است که k رشتهٔ متباعد، وقتی که با دو روش عمل شود، به«مجموع‌های تعمیم‌یافتهٔ» متفاوتی برسد.

۴۲۵. مثال‌ها. ۱) $\{a_n\}$ را دنباله‌ای نزولی، یکنوا و مثبت می‌گیریم که به‌سمت ۰ میل کند. فرض کنیم

$$A_n=a_0+a_1+\cdots+a_n \quad (n>0),\ A_0=a_0$$

ثابت کنید که اگر رشتهٔ متناوب

$$A_0-A_1+A_2-A_3+\cdots$$

را از روی روش چه‌زارو (مرتبهٔ یکم) جمع کنیم، «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» آن برابر است با مجموع رشتهٔ متقارب به‌گونه لایب‌نیتسی

$$\alpha=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots$$

[هاردی (G. H. Hardy)].

راهنمائی. واسطه‌های حسابی $2m$ مجموع جزئی نخستین رشتهٔ مفروض را محاسبه کنید، به‌صورت

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_0-a_1)+(a_0-a_1+a_2-a_3)+\cdots+(a_0-a_1+\cdots+a_{2m-2}-a_{2m-1})}{m}$$

درمی‌آید و ازروی قضیهٔ کوشی [۳۳، ۱۳)] به‌سمت $\frac{1}{2}\alpha$ میل می‌کند. سپس، به سادگی نشان داده می‌شود که واسطهٔ حسابی $2m+1$ مجموع جزئی نخستین هم، به سمت همان حد میل می‌کند.

۲) با انتخاب $a_n=\frac{1}{n+1}$ یا $a_n=\ln\frac{n+2}{n+1}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$، براساس قضیهٔ ۱)، ثابت کنید که رشته‌های متباعد

$$H_1-H_2+H_3-H_4+\cdots^*$$

و

$$\ln 2-\ln 3+\ln 4-\ln 5+\cdots$$

---

*) H_n، طبق معمول، عبارت است از مجموع جزئی nام رشتهٔ توافقی.

هردو از روی روش چه‌زارو جمع‌پذیرند و «مجموع‌های تعمیم‌یافتهٔ» آن‌ها، به‌ترتیب، برابرند با $\frac{۱}{۲}\ln ۲$ و $\frac{۱}{۲}\ln\frac{\pi}{۲}$.

راهنمائی. درحالت دوم، از دستور والیس [۳۱۷] استفاده کنید.

۳) به‌کمك همان قضیه‌ها، ثابت کنید، به‌ازای $-۱<x<۰$، رشتهٔ متباعددیریکله

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n^{x}}\equiv\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}.n^{\xi}\quad(\xi=-x,\ ۰<\xi<۱)$$

ازروی روش چه‌زارو جمع می‌شود.

راهنمائی. n^{ξ} را به‌صورت زیر بنویسید:

$$n^{\xi}=(۱-۰)+(۲^{\xi}-۱)+\ \ldots\ +(n^{\xi}-\overline{n-۱}^{\xi})$$

وبا روش‌های محاسبهٔ دیفرانسیلی ثابت کنیدکه با صعود n، واریانت $n^{\xi}-\overline{n-۱}^{\xi}$ تنزل می‌کند و (با توجه به ۳۲، ۵) به‌سمت صفرمیل می‌کند.

۴) اگرتعداد جمله‌های یك رشتهٔ متقارب را، با اضافه‌کردن صفرهایی، افزایش دهیم، نه درتقارب رشته ونه درمجموع آن تغییری حاصل نمی‌شود. ولی، همان‌طورکه‌از مثال‌های زیردیده می‌شود، اگربا «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشته‌های متباعد سروکار داشته باشیم،کار باکیفیت دیگری جریان پیدا می‌کند.

رشته‌های زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\underset{۰}{۱}-\underset{۱}{۱}+\underset{۲}{۱}-\underset{۳}{۱}+\underset{۴}{۱}-\underset{۵}{۱}+\ \ldots \qquad (a)$$

$$\underset{۰}{۱}-\underset{۱}{۱}+\underset{۲}{۰}+\underset{۳}{۱}-\underset{۴}{۱}+\underset{۵}{۰}+\underset{۶}{۱}-\underset{۷}{۱}+\underset{۸}{۰}+\ \ldots \qquad (b)$$

$$\underset{۰}{۰}+\underset{۱}{۱}-\underset{۲}{۱}+\underset{۳}{۰}+\underset{۴}{۱}+\underset{۵}{۰}+\underset{۶}{۰}+\underset{۷}{۰}-\underset{۸}{۱}+\ \ldots^{*} \qquad (c)$$

دربارهٔ رشتهٔ (a) می‌دانیم که «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» آن، از روی چه‌زارو، برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

ثابت کنید، «مجموع تعمیم یافتهٔ» رشتهٔ (b)، با روش چه‌زارو، برابر $\frac{۱}{۳}$ است و رشتهٔ (c)، به‌مفهوم چه‌زارو، قابل جمع کردن نیست.

---

*) جمله‌های $+۱$ که در (a) درجای mام باشند ($m=۰, ۱, ۲, \ldots$)، در (c) درجای ۲^{m}ام خواهند بود، باقی جاها را، صفرها اشغال کرده‌اند.

راهنمائی. در رشتهٔ (c)، وقتی n از $۲^{۲m-۱}$ تا $۲^m - ۱$ تغییر کند، واسطه‌های حسابی $n+۱$ جملهٔ اول

$$\text{از } \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۲^{۲m}-۱}{۲^{۲m}} \to \frac{۱}{۳} \text{ تا } \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۲^{۲m}-۱}{۲^{۲m+۱}+۱} \to \frac{۲}{۳}$$

نوسان می‌کنند.

۵) k را عددی طبیعی دلخواه و رشتهٔ

$$\sum_k \equiv \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n C_{n+k}^k$$

را درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که $\sum_k$ با روش چه‌زارو مرتبهٔ k جمع نمی‌شود، ولی با روش چه‌زارو مرتبهٔ $(k+۱)$ جمع می‌شود ومجموع آن برابر است با $\frac{۱}{۲^{k+۱}}$.

با استفاده از برابری (۱۸) و دوبار برابری (۱۹) (بار اول با عوض کردن x به $-x$ و بار دوم با عوض کردن x به $x^۲$)، به‌ترتیب، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} S_n^{(k)} x^k = \frac{۱}{(۱-x)^{k+۱}} \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n C_{n+k}^k x^n =$$

$$\frac{۱}{(۱-x^۲)^{k+۱}} \sum_{m=۰}^{\infty} C_{m+k}^k x^{۲m}.$$

با برابر گذاشتن ضریب‌های توان‌های یکسان x، در دو رشتهٔ اول و آخر، (در این‌جا، از «قضیهٔ مربوط به‌اتحاد رشته‌های توانی» استفاده می‌کنیم که در ۴۳۷، ۳° ثابت خواهدشد)، به‌این نتیجه می‌رسیم که

$$S_{۲m}^{(k)} = C_{m+k}^k,\ S_{۲m+۱}^{(k)} = ۰ \quad (m = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots) \qquad (۲۱)$$

به‌این ترتیب

$$\gamma_{۲m}^{(k)} = \frac{C_{m+k}^k}{C_{۲m+k}^k} \to \frac{۱}{۲^k},\ \gamma_{۲m+۱}^{(k)} = ۰$$

ورشتهٔ مفروض، دارای «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» چه‌زاروی مرتبهٔ kام نیست.

ازطرف دیگر، با توجه به (۲۱)، (۱۵) و (۱۴)، چه‌برای $n = ۲m$ وچه برای

---

*) تقارب رشتهٔ اخیر در بازهٔ $(۱, -۱)$، به‌کمک قضیهٔ کوشی–آدامار، به‌سادگی ثابت و از آن‌جا، تقارب رشتهٔ اول نتیجه می‌شود.

$n=۲m+۱$ داریم:

$$S_n^{(k+۱)}=C_k^k+C_{۱+k}^k+\cdots+C_{m+k}^k=C_{m+k+۱}^{k+۱}$$

از آن‌جا

$$\gamma_{۲m}^{(k+۱)}=\frac{C_{m+k+۱}^{k+۱}}{C_{۲m+k+۱}^{k+۱}}\to\frac{۱}{۲^{k+۱}}$$

که برای $\gamma_{۲m+۱}^{(k+۱)}$ هم درست است و، درنتیجه، حکم ثابت می‌شود.

۶) رشتهٔ

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(n+۱)^k$$

که‌در آن، k عدد طبیعی دلخواهی است، از روی روش چه‌زاروی مرتبهٔ $(k+۱)$ام قابل جمع است. این حکم را، می‌توان با تکیه برنتیجهٔ قبلی ثابت کرد.

درواقع، C_{n+k}^k را برحسب توان‌های $(n+۱)$ بسط می‌دهیم:

$$C_{n+k}^k=\frac{۱}{k!}(n+k)(n+k-۱)\cdots(n+۱)=$$

$$=\alpha_۱^{(k)}(n+۱)^k+\alpha_۲^{(k)}(n+۱)^{k-۱}+\cdots+\alpha_{k-۱}^{(k)}(n+۱)$$

در این‌جا، $\alpha_i^{(k)}$ ضریب‌های ثابت‌اند وضمناً

$$\alpha_۱^{(k)}=\frac{۱}{k!}\neq۰$$

با تبدیل k به $k-۱$، $k-۲$، ...، ۱، ردیف همین‌گونه برابری‌ها را می‌نویسیم، سپس برعکس، $(n+۱)^k$ را به‌صورت مجموع

$$(n+۱)^k=\beta_۱^{(k)}C_{n+k}^k+\beta_۲^{(k)}C_{n+k-۱}^{k-۱}+\cdots+\beta_k^{(k)}C_{n+۱}^۱$$

با ضریب‌های ثابت β درمی‌آوریم. ولی در این صورت

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(n+۱)^k\equiv\beta_۱^{(k)}\sum_k+\beta_۲^{(k)}\sum_{k-۱}+\cdots+\beta_k^{(k)}\sum_۱$$

از آن‌جاکه همهٔ رشته‌های $\sum_i(k)$ $(i=۱, ۲, \ldots, k)$، به‌کمک روش چه‌زاروی مرتبهٔ $(k+۱)$ام، جمع‌پذیرند (در این‌جا، ویژگی روش‌های چه‌زاروی مرتبه‌های متوالی را به‌حساب می‌آوریم!)، بنابراین، با توجه به‌خطی بودن روش مذکور، این وضع، برای

رشتهٔ پیشنهادی هم درست است.

خود محاسبهٔ «مجموع تعمیم‌یافته» را، تنها به‌کمک ۴۴۹ می‌توانیم انجام دهیم.

بازهم چند مثال‌ساده، برای‌کاربرد مستقیم روش‌های هلدر، بورل واولر‌رامی‌آوریم.

۷) مجموع رشته‌های زیررا با روش هلدر به‌دست‌آورید:

$$۱-۲+۳-۴+\cdots \qquad \text{(a)}$$

و

$$۱-۳+۶-۱۰+\cdots \qquad \text{(b)}$$

جواب. (a) با دوبار واسطه‌سازی‌می‌دهد $\frac{۱}{۴}$.

(b) سه‌بار واسطه‌سازی می‌دهد $\frac{۱}{۸}$.

۸) رشتهٔ

$$۱-۱+۱-۱+۱-۱+\cdots$$

را ازروی روش بورل جمع‌کنید.

جواب. $\frac{۱}{۲}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\, e^{-x}\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}$.

۹) با روش اولر، مجموع هریك ازرشته‌های زیررا به‌دست آورید:

$$۱-۱+۱-۱+\cdots \qquad \text{(a)}$$

$$۱-۲+۳-۴+\cdots \qquad \text{(b)}$$

$$۱-۲+۲^{۲}-۲^{۴}+\cdots \qquad \text{(c)}$$

$$۱^{۳}-۲^{۳}+۳^{۳}-۴^{۳}+\cdots \qquad \text{(d)}$$

راهنمائی. درهمهٔ حالت‌ها، بهتر است ازتبدیل اولر درشکل (۲۰) استفاده شود.

جواب. (a) $A=\frac{۱}{۲}$؛ (b) $\Delta^{۰}a_{۰}=۱$، $\Delta^{۱}a_{۰}=۱$، $\Delta^{p}a_{۰}=۱$ (برای $p>۱$)،

$A=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$؛ (c) $\Delta^{p}a_{۰}=۱$، $A=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}-\cdots=\frac{۱}{۳}$؛ (d) $\Delta^{۰}a_{۰}=۱$،

$\Delta^{۱}a_{۰}=۷$، $\Delta^{۲}a_{۰}=۱۲$، $\Delta^{۳}a_{۰}=۶$، $\Delta^{p}a_{۰}=۰$ (برای $p>۳$):

$$A=\frac{1}{2}-\frac{7}{4}+\frac{12}{8}-\frac{6}{16}=-\frac{1}{8}$$

۴۲۶. طبقهٔ کلی روش خطی منتظم جمع کردن. درخاتمه، طرحی کاملاً کلی، برای ساختن طبقهٔ روش‌های منتظم خطی، که شامل همهٔ روش‌های فوق می‌شود، می‌آوریم.

فرض کنیم، در حوزه‌ای مانند $\mathfrak{D}$ مربوط به‌تغییر پارامتر x دنبالهٔ تابع‌های زیرداده شده باشد:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \dots,\ \varphi_n(x),\ \dots \qquad (\Phi)$$

فرض می‌کنیم، حوزهٔ $\mathfrak{D}$ دارای نقطهٔ تجمع ω باشد (متناهی یا نامتناهی). از روی رشتهٔ (A)، رشتهٔ زیر را، که شامل تابع‌هاست، می‌سازیم:

$$A_0\varphi_0(x)+A_1\varphi_1(x)+\dots+A_n\varphi_n(x)+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_n(x) \qquad (۲۲)$$

(که درآن، $A_n=a_0+a_1+\dots+a_n$). اگر این رشته، دست‌کم برای x به قدر کافی نزدیک به ω، متقارب باشد و مجموع آن، به ازای $x\to\omega$، به‌سمت حد A میل کند، در آن صورت، همین عدد، به‌عنوان «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشتهٔ مفروض، قبول می‌شود.

به‌این ترتیب، می‌توانیم با یك روش، «مجموع» هر رشته‌ای را به‌دست آوریم که تنها، به‌انتخاب دنبالهٔ Φ ونقطهٔ حدی ω مربوط است. خود ساختار روش، خطی بودن آن‌را روشن می‌کند.

اکنون فرض می‌کنیم، تابع $\varphi_n(x)$، با سه‌شرط زیر سازگار باشد:

(a) برای هرثابت n

$$\lim_{x\to\omega}\varphi_n(x)=0$$

(b) برای مقدارهای x به‌قدر کافی نزدیك به ω*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n(x)|\leqslant K\ (K=\text{const.})$$

(c) بالاخره

---

*) یعنی برای $|x-\omega|<\delta'$، اگر ω متناهی باشد و برای $x>\Delta'$، اگر $\omega=+\infty$.

$$\lim_{x\to\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)=1$$

آن‌وقت، روش جمع، منتظم می‌شود.

اثبات. به‌این ترتیب، فرض می‌کنیم

$$\lim_{n\to\infty}A_n=A$$

آن‌وقت، ازروی $\varepsilon>0$ دلخواه، عدد n' را می‌توان طوری پیدا کرد که برای $n>n'$ داشته باشیم:

$$|A_n-A|<\frac{\varepsilon}{3K} \qquad (۲۳)$$

با توجه به‌کران‌دار بودن A_n وتقارب مطلق رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)$، دست‌کم برای $|x-\omega|<\delta'$ (یا $x>\Delta'$)، رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_n(x)$ نیز متقارب می‌شود. ضمناً، روشن است که

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_n(x)-A=$$

$$=\sum_{n=0}^{n'}[A_n-A]\varphi_n(x)+\sum_{n=n'+1}^{\infty}[A_n-A]\varphi_n(x)+A\left[\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)-1\right]$$

جملهٔ دوم سمت راست از $\frac{\varepsilon}{3}$ کوچکتر است (بنابر (۲۳) وشرط (b)). درمورد جمله‌های اول و سوم، می‌توان هرکدام ازآن‌ها را با نزدیک کردن کافی x به ω، بنابرشرط (a) و شرط (b)، آن‌ها را هم کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{3}$ کرد. درنتیجه

$$\lim_{x\to\omega}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_n(x)=A$$

یعنی «مجموع تعمیم‌یافته» وجود دارد و برابراست با مجموع معمولی.

اگر x، پارامتر طبیعی m باشد (به‌نحوی که $\omega=+\infty$)، درآن صورت، دنبالهٔ تابع‌های (Φ) را می‌توان با ماتریس مستطیلی ونامتناهی زیرعوض کرد:

$$(T)\qquad \begin{array}{cccc} t_{00} & t_{01} & t_{02}\cdots & t_{0m}\cdots \\ t_{10} & t_{11} & t_{12}\cdots & t_{1m}\cdots \\ t_{20} & t_{21} & t_{22}\cdots & t_{2m}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n0} & t_{n1} & t_{n2}\cdots & t_{nm}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

برای «مجموع تعمیم یافتهٔ» رشتهٔ (A)، حد واریانت

$$T_m = A_0 t_{0m} + A_1 t_{1m} + \cdots + A_n t_{nm} + \cdots$$

به‌ازای $m \to \infty$ و با فرض این‌که این رشته دست‌کم برای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ m متقارب باشد، اختیار می‌شود.

شرطهای منتظم بودن، برای این حالت، به‌صورت زیر درمی‌آیند:

(a) به‌ازای ثابت دلخواه n

$$\lim_{m\to\infty} t_{nm} = 0$$

(b) به‌ازای m به‌قدرکافی بزرگ

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_{nm}| \leqslant K \quad (K = \text{const.})$$

(c) وبالاخره

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t_{nm} = 1$$

دراساس، همهٔ این فکرها به‌تپلیتس تعلق دارد [با ۳۹۱ مقایسه کنید]، ولی همان‌طور که خواننده به‌یاد دارد، درآن‌جا، ماتریس مثلثی درنظر گرفته شده بود. این حالت خاص، تا حد زیادی، برای ما کافی بود. باز هم یادآوری می‌کنیم که زیرطرح نامبرده، می‌توانیم مستقیماً، چه به‌جمع کردن ازروی پواسون-آبل وچه به‌جمع کردن ازروی بورل بپردازیم. درحالت اول داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x) x^n A_n$$

به‌طوری که نقش تابع $\varphi_n(x)$ در حوزهٔ $\mathfrak{X}=(0,1)$ $(\omega=1)$ را ضریب $x^n(1-x)$ به‌عهده می‌گیرد. در حالت دوم هم $\varphi_n(x)=e^{-x}\frac{x^n}{n!}$ در $\mathfrak{X}=(0;\infty)$ $(\omega=+\infty)$. سازگاری شرط‌های (a)، (b) و (c) به‌سادگی تحقیق می‌شود و با آن، براساس قضیهٔ کلی ثابت شده در بالا، از نو منتظم بودن این روش‌ها ثابت می‌شود.

تعریف کلی روش‌های جمع ــ که در بالا داده شد ــ و قضیهٔ مربوط به‌منتظم نمودن آن را، می‌توان به‌سادگی، طوری بیان کرد، که در آن، نه مجموع‌های جزئی A_n، بلکه مستقیماً جمله‌های x_n رشتهٔ موردنظر (A) شرکت داشته باشند. ولی ما به‌این مطلب نمی‌پردازیم.

MATH75.IR

فصل دوازدهم

دنباله‌ها و رشته‌های تابعی

§۱. تقارب یکنواخت

۴۲۷. ملاحظه‌های مقدماتی. تا کنون، با دنباله‌های نامتناهی و حدآن‌ها و،همچنین، با رشته‌های نامتناهی ومجموع آن‌ها، آشنا شده‌ایم؛ عضوهای این دنباله‌ها و جمله‌های‌این رشته‌ها، عددهایی ثابت بودند. درست است‌که گاهی، در ترکیب آن‌ها، مقدارهای‌متغیری درنقش پارامتر ظاهر می‌شد، ولی هنگام بررسی آن‌ها، به‌صورت مقدارهای ثابت ومعینی در نظر گرفته می‌شدند. مثلاً، وقتی ثابت کردیم‌که دنبالهٔ

$$1+\frac{x}{1},\ \left(1+\frac{x}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{x}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ \ldots$$

دارای حد e^x است و یا رشتهٔ

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

دارای مجموع $\ln(1+x)$ است، برای ما، x عـدد ثابتی بـود. طبیعت تابعی یك عضو دنباله وحدآن، یا جمله‌های‌رشته ومجموع‌آن‌ها، مورد توجه ما نبود. ولی‌حالا، می‌خواهیم توجه خود را به‌همین جنبه معطوف‌کنیم.

دنباله‌ای را در نظر می‌گیریم‌که جمله‌های آن، عبارت باشند از تابع‌های

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \qquad (1)$$

کـه همه، شامل یك متغیر x هستند کـه در حوزه‌ای مثل $\mathfrak{X}=\{x\}$ معین است*، و فرض

---

*) این حوزه، اغلب، یك بازه است، ولی فعلاً آن‌را بـه‌صورتی کاملاً عام و به‌عنوان‌مجموعهٔ عددی نامتناهی دلخواهی از x در نظر می‌گیریم.

می‌کنیم که این دنباله، برای هر x از $\mathscr{D}$، دارای حدی متناهی است. از آن‌جاکه این‌حد با مقدار x، کاملاً معین می‌شود، به‌صورت تابعی از x (در $\mathscr{D}$) درمی‌آید:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (۲)$$

که تابع حدی برای دنبالهٔ (۱) (یا برای تابع $f_n(x)$) نامیده می‌شود.

اکنون، نه‌تنها به‌وجود یك‌حد برای هر مقدار جداگانهٔ x، بلکه ضمناً به‌ویژگی‌های تابعی تابع حدی توجه می‌کنیم. برای این‌که خواننده، از پیش، آگاه شود که مسأله‌های تازه چه خصلت‌هایی دارند، به‌عنوان نمونه، به‌یکی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

فرض کنید، جمله‌های دنبالهٔ (۱)، همگی تابع‌های پیوسته‌ای از x در بازهٔ $\mathscr{D}=\{a,b\}$ باشند؛ آیا این وضع، پیوستگی تابع حدی را تضمین می‌کند؟ در مثال‌های زیر خواهیم دید که، ویژگی پیوستگی، ممکن است به‌تابع حدی منتقل شود و ممکن است منتقل نشود.

مثال‌ها. در همهٔ حالت‌ها $\mathscr{D}=[۰,۱]$.

۱) $f_n(x)=x^n$، $f(x)=۰$ به‌ازای $x<۱$ و $f(۱)=۱$ (ناپیوستگی به‌ازای $x=۱$)؛

۲) $f_n(x)=\dfrac{۱}{۱+nx}$، $f(x)=۰$ به‌ازای $x>۰$ و $f(۰)=۱$ (ناپیوستگی به‌ازای $x=۰$)؛

۳) $f_n(x)=\dfrac{nx}{۱+n^۲x^۲}$، $f(x)=۰$ به‌ازای هر مقدار x (همیشه پیوسته)؛

۴) $f_n(x)=۲n^۲x.e^{-n^۲x^۲}$، $f(x)=۰$ برای هر مقدار x (همیشه پیوسته).

به‌طور طبیعی این پرسش پیش می‌آید که چگونه می‌توان شرط‌هایی را پیدا و ثابت کرد که، به‌ازای آن‌ها، تابع حدی، پیوستگی خود را حفظ کند؛ و ما در **۴۳۱** (و **۴۳۲**) به‌این مسأله خواهیم پرداخت.

قبلاً دیدیم [**۳۶۲**] که، بررسی رشتهٔ عددی و مجموع آن، تنها شکل دیگری از بررسی دنبالهٔ عددی و حد آن است. اکنون رشته‌ای را درنظر می‌گیریم که جمله‌های آن، تابع‌هایی از همان متغیر x در حوزهٔ $\mathscr{D}$ باشند:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} u_n(x)=u_۱(x)+u_۲(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (۳)$$

فرض کنیم، این رشته، به‌ازای هر مقدار x از $\mathfrak{D}$، متقارب باشد، آن‌وقت، مجموع آن‌نیز تابعی از x می‌شود: $f(x)$. این مجموع، بـا برابری حدی به‌صورت (۲) معین می‌شود، به‌شرطی که مجموع جزئی زیر را با $f_n(x)$ نشان دهیم:

$$f_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x) \qquad (۴)$$

برعکس، مسألهٔ تابع‌حدی برای دنبالهٔ نامشخص‌مفروض (۱) را می‌توان به‌صورت‌مجموع رشتهٔ (۳) در نظر گرفت، به‌شرطی که فرض کنیم:

$$u_1(x)=f_1(x),\ u_2(x)=f_2(x)-f_1(x),\ \cdots$$

$$\cdots,\ u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x),\ \cdots$$

اغلب با رشته‌های تابعی سر و کار پیدا می‌کنیم، زیرا بررسی تابع‌های حدی به‌این‌صورت در عمل، معمولاً ساده‌تر و راحت‌تر است.

در این‌جا، یادآوری این مطلب هم لازم است که، در فیزیك، نه‌تنها با مسأله تقارب رشته‌های به صورت (۳)، بلکه ضمناً به‌ویژگی‌های تابعی مجموع آن‌ها نیز، احتیاج پیدا می‌کنیم. به‌عنوان مثال، می‌توان ازپیوستگی مجموع رشته، بافرض پیوستگی همهٔ‌جمله‌های آن، نام بردکه، قبلاً هم، یادی از آن‌کرده بودیم.

روشن است که ویژگی‌های تابعی تابع حدی (یا معادل آن، مجموع رشته) $f(x)$ اساساً بستگی به‌خصلت نزدیك‌شدن $f_n(x)$ به $f(x)$، به‌ازای مقدارهای مختلف x،دارد. در شمارهٔ بعد، امکان‌های مشخصی را کـهٔ در این مورد پیش می‌آید، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۴۲۸. تقارب یکنواخت و تقارب غیریکنواخت. فرض کنیم، رابطهٔ(۲)، برابری همهٔ xها از $\mathfrak{D}$، درست‌باشد. بنابر تعریف‌خود حد، این‌وضع، به‌معنای آن است که: اگرمقدار x از $\mathfrak{D}$ تثبیت شده باشد (تا با یك‌دنبالهٔ عددی معلوم سر وکار داشته باشیم)، برای هره $\varepsilon>0$ مفروض، می‌توان شمارهٔ N را طوری پیدا کرد که، برای همهٔ $n>N$، نابرابری زیـر برقرار باشد:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (۵)$$

در این‌جا، منظوراز x، همان مقداری است که از پیش تثبیت شده است.

اگر مقدار دیگری از x را انتخاب کنیم، دنبالهٔ عـددی دیگری حاصل می‌شود و، بـه‌ازای همان ε، ممکن است شمارهٔ قبلی N نامناسب باشد؛ در ایـن‌صورت، لازم است آن را با عدد بزرگتری عوض کرد. ولی x، مجموعهٔ نامتناهی مقدارها را اختیارمی‌کند،

به‌طوری‌که با مجموعه‌ای نامتناهی از دنباله‌های عددی پیدا می‌شودکه به‌سمت حدهمیل می‌کنند. در مورد هرکدام از این دنباله‌ها، N نظیر جداگانه‌ای پیدا می‌کند. این پرسش پیش می‌آید: آیا چنان شماره‌ای برای N، وجود داردکه (به‌ازای ε مفروض). برای همهٔ این دنباله‌ها مناسب باشد؟

ضمن چند مثال نشان می‌دهیم‌که چنان شماره‌ای برای N، در بعضی حالت‌ها وجود دارد و در برخی حالت‌های دیگر وجود ندارد.

۱) ابتدا فرض می‌کنیم

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

چون در این‌جا

$$0\leqslant f_n(x)=\frac{1}{2n},\quad \frac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n}$$

مستقیماً روشن است که برای برقرار بودن نابرابری $f_n(x)<\varepsilon$، کافی است، به‌ازای هر مقدار دلخواه x، داشته باشیم: $n>\frac{1}{2\varepsilon}$. به‌این ترتیب، مثلاً عدد $N=E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$، در این حالت، برای همهٔ xها مناسب است.

۲) حالا فرض می‌کنیم [۴۲۷، ۳]:

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

برای $x>0$ تثبیت شدهٔ دلخواه، کافی است در نظر بگیریم: $n>E\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)$ تا داشته باشیم: $f_n(x)<\frac{1}{nx}<\varepsilon$. ازطرف دیگر، هرقدر n بزرگ اختیار شود، برای تابع $f_n(x)$ در بازهٔ $[0,1]$، همواره نقطهٔ $x=\frac{1}{n}$ وجود دارد، که در آن، مقدار تابع برابر $\frac{1}{2}$ است: $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$. به‌این ترتیب، نمی‌توانیم با بزرگ‌کردن n، برای همهٔ مقدارهای x از ۰ تا ۱، به‌نابرابری $f_n(x)<\frac{1}{2}$ برسیم. بدزبان‌دیگر، برای $\varepsilon=\frac{1}{2}$، نمی‌توان شماره‌ای‌برای N پیدا کردکه، درعین‌حال، برای همهٔ xها مناسب باشد.

در شکل ۵۹، نمودار این تابع‌ها، نظیر $n=۴$ و $n=۴۰$، داده شده است؛ نقطهٔ برآمدهٔ آن، ارتفاعی برابر $\frac{۱}{۲}$ دارد و با بزرگ‌شدن n، از راست به‌چپ، جابه‌جامی‌شود. هرچندکه، با بزرگ‌شدن n، قائم‌هایی‌که از نقطه‌های جداگانهٔ نمودارهای متوالی رسم شوند، به‌محور ox نزدیک‌تر می‌شوند، ولی حتی یك منحنی هم نمی‌توان پیدا کردکه در تمامی فاصلهٔ از $x=۰$ تا $x=۱$ به‌محور ox چسبیده باشد.

وضع، در مورد تابع‌هایی که در مثال ۹) بررسی کردیم، به‌گونهٔ دیگری است. نمودار آن‌هارا رسم نمی‌کنیم، زیرا مثلاً نمودارهای آن‌ها، به‌ازای $n=۴$ و $n=۴۰$، از همان نمودارهای شکل ۵۹ به‌دست می‌آیند، با این شرط‌که همهٔ عرض‌ها را، به‌ترتیب، به‌اندازهٔ ۴ بار یا ۴۰ بار کوچك کرده باشیم. در این حالت، منحنی در تمام نقطه‌های طول محور ox، به‌آن نزدیك می‌شوند.

حالا تعریف اصلی را می‌دهیم:

اگر ۱) دنبالهٔ (۱) در $\mathfrak{D}$، تابع حدی $f(x)$ را داشته باشد و ۲) برای هر عدد $\varepsilon>۰$، چنان شمارهٔ N مستقل از x وجود داشته باشد که، به‌ازای $n>N$، نابرابری (۵) یکباره برای همهٔ xها (از $\mathfrak{D}$) برقرار باشد، درآن‌صورت می‌گویند که دنبالهٔ (۱)، نسبت به x در حوزهٔ $\mathfrak{D}$، به‌طور یکنواخت به‌سمت تابع $f(x)$ متقارب است [یا تابع $f_n(x)$ به‌سمت تابع $f(x)$ میل می‌کند].

به‌این ترتیب، از دو مثالی‌که آوردیم، در اولی، تابع $f_n(x)$ به‌طور یکنواخت، نسبت به x از بازهٔ $[۱\ ۰]$، به سمت صفر میل می‌کند، در حالی که در مثال دومی، میل تابع $f_n(x)$ به‌سمت صفر، یکنواخت نیست.

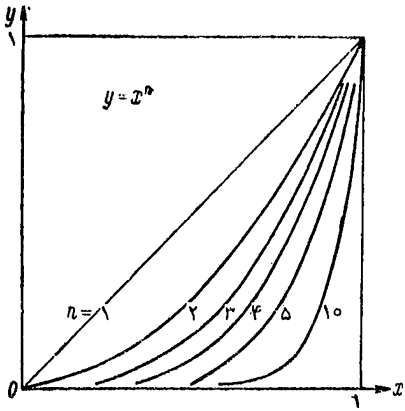
باید گفت‌که، برای سایر تابع‌هایی که درشمارهٔ قبل داشتیم، تقارب، یکنواخت نیست. این مطلب را روشن می‌کنیم.

۳) برای تابع $f_n(x)=x^n$ [۴۲۷، ۱)]، عدم امکان نابرابری $x^n<\varepsilon$ (به‌ازای $\varepsilon<۱$)، یکباره و برای همهٔ مقدارهای $x<۱$ روشن‌است، دست‌کم ازاین‌جاکه (به‌ازای n تثبیت شده)، اگر $x\to ۱$، آن‌وقت $x^n\to ۱$. شکل ۶۰، خصلت خاص از بین رفتن یك‌نواختی‌رانشان می‌دهد. دراین‌جا، تابع‌حدی جهش‌می‌کند و برآمدگی جابه‌جانمی‌شود.

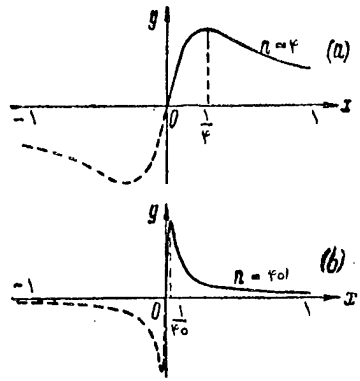
اکنون فرض می‌کنیم

۴) $f_n(x)=\frac{۱}{۱+nx}$ یا

۵) $f_n(x)=۲n^۲x\cdot e^{-n^۲x^۲}$



شکل ۶۰



شکل ۵۹

عدم امکان نزدیک‌شدن یکنواخت در $[۱ ،۰]$ به‌تابع حدی، که برای $x>۰$ در هر دو حالت برابر صفر است، از این‌جا نتیجه می‌شود که، به‌ترتیب

$$f_n\left(\frac{۱}{n}\right)=\frac{۱}{۲}$$

یا

$$f_n\left(\frac{۱}{n}\right)=\frac{۲n}{e}$$

در حالت دوم، ارتفاع برآمدگی‌ها، که مانع میل یکنواخت به‌سمت صفر می‌شوند، ضمناً، به‌طور نامتناهی ترقی می‌کنند.

برای تابع‌های x^n و $\frac{۱}{۱+nx}$، یک راه دیگر هم، برای بررسی مسأله نشان‌می‌دهیم. نابرابری‌های

$$x^n<\varepsilon \quad و \quad \frac{۱}{۱+nx}<\varepsilon$$

به‌ترتیب هم‌ارزند با

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x} \quad و \quad n>\frac{۱}{x}\left(\frac{۱}{\varepsilon}-۱\right) \quad (۰<x<۱;\ ۰<\varepsilon<۱)$$

چون، عبارت‌های سمت راست، به‌طور نامحدود ترقی می‌کنند (اولی، با نزدیک‌شدن x

به ۱ و دومی با نزدیک‌شدن x به ۰)، بنابراین روشن‌است که هیچ شماره‌ای از n، نمی‌تواند به‌ازای همهٔ مقدارهای x، در این نابرابری‌ها صدق کند.

حالا، تمامی آن‌چه را که در بالا دربارهٔ تقارب تابع‌ها گفتیم، برای حالت رشتهٔ تابعی (۳)، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با فرض تقارب رشته، موضوع‌های مربوط به مجموع آن $f(x)$، مجموع جزئی $f_n(x)$ [(۴) را ببینید] و بالاخره باقی‌ماندهٔ آن پس از جملهٔ nام، یعنی

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)=f(x)-f_n(x)$$

را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. وقتی‌که x، مقدار ثابت‌شدهٔ دلخواهی باشد

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)=0$$

اگر برای مقدارهای x از حوزهٔ $\mathfrak{D}$، مجموع جزئی $f_n(x)$ به سمت مجموع $f(x)$ رشته، به‌طوریکنواخت، میل‌کند [یا هم‌ارزآن، اگرباقی‌ماندهٔ $\varphi_n(x)$ رشته، به‌طوریکنواخت به‌سمت صفر میل‌کند]، در آن‌صورت، گویند رشتهٔ (۳) در این حوزه، به‌طور یکنواخت، متقارب است.

این تعریف، به‌روشنی، با تعریف زیر هم‌ارز است:

رشتهٔ متقارب (۳) (برای همهٔ مقدارهای x از حوزهٔ $\mathfrak{D}$)، وقتی متقارب یکنواخت (در این حوزهٔ) نامیده می‌شودکه، برای هر $\varepsilon>0$، بتوان چنان شماره‌ای برای N، مستقل از x، پیدا کرد که به‌ازای $n>N$، نابرابری‌های

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{یا} \quad |\varphi_n(x)|<\varepsilon \qquad (۶)$$

برای همهٔ مقدارهای x از $\mathfrak{D}$ برقرار باشند*.

روشن‌است که می‌توان مثال‌های مربوط‌بدرشته‌های متقارب یکنواخت یاغیریکنواخت را، از دنباله‌هایی که در بالا بررسی کردیم، بیرون کشید؛ ولی ما بازهم، چند مثال تازه می‌آوریم.

۶) تصاعد $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ را درنظرمی‌گیریم. این تصاعد، دربازهٔ باز $\mathfrak{D}=(-۱,۱)$

---

*) مفهوم تقارب یکنواخت رشته‌ها، به‌طور همزمان (در سال ۱۸۴۸)، به‌وسیلهٔ زایدل (Ph. L. v. Seidel) و ستوکس (G. C. Stokes) به‌قلم‌و دانش وارد شده است، ولی قبل از آن‌ها هم، توسط ویرشتراس (در سخن‌رانی‌هایش) به‌کار رفته بود.

متقارب است. برای x دلخواه از $\mathscr{D}$، باقی‌ماندهٔ بعد از جملهٔ nام، به‌این‌صورت است:

$$\varphi_n(x)=\frac{x^n}{1-x}$$

اگر n را به‌دلخواه تثبت کنیم، روشن است که

$$\lim_{x\to 1-0}\varphi_n(x)=\infty \qquad \lim_{x\to -1+0}|\varphi_n(x)|=\frac{1}{2},$$

هر دو رابطه ثابت می‌کنند که نمی‌توان نابرابری

$$|\varphi_n(x)|<\varepsilon \quad (\varepsilon<1 \text{ به‌شرط})$$

را، برای همهٔ xها به‌طور هم‌زمان، برای یك‌شمارهٔ n برقرار کرد. تقارب تصاعد، در بازهٔ $(-1, 1)$ غیریکنواخت است؛ همین نتیجه را در مورد بازه‌های $[0, 1-)$ و $(0, 1]$ هم، به‌طور جداگانه، می‌توان گرفت.

۷) رشتهٔ $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$، به‌ازای مقدارهای‌دلخواه x از $\mathscr{D}=(-\infty, +\infty)$، متقارب‌است، زیرا درشرط‌های قضیهٔ لایب‌نیتس [۳۸۱] صدق‌می‌کند. در روی ملاحظه‌های موجود در اثبات این قضیه، معلوم می‌شود که باقی‌ماندهٔ رشته، از لحاظ قدرمطلق، باجملهٔ اول آن برآورد می‌شود:

$$|\varphi_n(x)|<\frac{1}{x^2+n+1}<\frac{1}{n+1}$$

از این‌جا روشن است که رشتهٔ مفروض، در تمامی بازهٔ نامتناهی، متقارب یکنواخت است.

۸) به‌همین ترتیب، رشتهٔ $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$، در $\mathscr{D}=(-\infty, +\infty)$، متقارب یکنواخت است، زیرا به‌ازای $x\neq 0$

$$|\varphi_n(x)|<\frac{x^2}{(1+x^2)^n}=\frac{x^2}{1+nx^2+\dots}<\frac{1}{n}$$

جالب است یادآوری کنیم که رشتهٔ تشکیل‌شده از قدرمطلق‌ها، یعنی $\sum_1^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$، اگر چه‌متقارب است، ولی متقارب یکنواخت نیست. درواقع، باقی‌ماندهٔ آن، به ازای $x\neq 0$، چنین است:

$$\varphi_n(x)=\frac{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^n}$$

که برای n تثبیت شدهٔ دلخواه، به‌ازای $x\to 0$، به‌سمت ۱ میل می‌کند.

یادداشت. اگر در مثال ۲)، به‌جای بازهٔ $[0,1]$، بازهٔ نامشخص $[0,a]$ $(0<a<1)$ در نظر گرفته شود، در آن‌صورت، تقارب رشته، یکنواخت خواهد بود. در واقع، برای هر $x\geqslant a$ داریم:

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{n}{1+n^2a^2}<\frac{1}{na^2}$$

ولی معلوم است که، در بازهٔ $(0,a)$، تقارب غیریکنواخت خواهیم داشت. به‌این ترتیب، مثل این‌است که ویژگی غیریکنواختی، در نقطهٔ $x=0$، «متراکم» می‌شود؛ این نقطه را، نقطهٔ‌غیریکنواختی گویند. در موردمثال‌های ۴)، ۵) و ۸) هم، می‌توان به‌همین‌نتیجه‌رسید. در مثال ۳)، نقطهٔ $x=1$ و در مثال ۶)، هر دو نقطهٔ $x=-1$ و $x=1$، همین نقش را به‌عهده دارند.

در حالت پیچیده‌تر، ممکن است با تعدادی نامتناهی از نقطه‌های غیریکنواختی، برخورد کنیم.

۴۲۹. شرط‌های تقارب یکنواخت. قضیهٔ بولزانو ـ کوشی [۳۹]، که شرط‌های وجود حدمتناهی را برای دنبالهٔ عددی مفروض معین‌کرد («اصل تقارب»)، می‌توان به‌طور طبیعی به‌شرط تقارب یکنواخت زیر، برای دنبالهٔ تابعی (۱) (در حوزهٔ $\mathfrak{D}$) منجر کرد:

برای آن‌که دنبالهٔ (۱)، ۱) دارای تابع‌حدی باشد و ۲) این‌تابع به‌طوریکنواخت نسبت به x در حوزهٔ $\mathfrak{D}$، متقارب باشد، لازم و کافی است که برای هر عدد $\varepsilon>0$، چنان شمارهٔ N مستقل از x وجود داشته باشد که به‌ازای $n>N$ و $m=1,2,3,\dots$ دلخواه، نابرابری

$$|f_{n+m}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \qquad (7)$$

برای هر x از $\mathfrak{D}$، برقرار باشد.

[این خواست را می‌توان به‌اختصار، این‌طور تنظیم کرد: اصل تقارب برای دنبالهٔ (۱)، باید به‌طور یکنواخت، برای هر x از $\mathfrak{D}$، برقرار باشد.]

اثبات. لازم بودن. اگردنبالهٔ (۱) دارای تابع حدی $f(x)$ باشد و به‌طوریکنواخت

در $\mathfrak{D}$، به‌سمت آن متقارب شود، در آن‌صورت از روی $\varepsilon>0$ مفروض، چنان شمارهٔ N مستقل از x پیدا می‌شود که به‌ازای $n>N$، برای همهٔ xها داشته باشیم:

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

و به‌همین ترتیب

$$|f_{n+m}(x)-f(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon \quad (m=1, 2, 3, \ldots)$$

و از این دو نابرابری، (۷) نتیجه می‌شود.

کافی بودن. فرض کنیم، شرط قضیه، برقرار باشد. در آن‌صورت، برای مقدار تثبیت‌نشدهٔ x از $\mathfrak{D}$، دنباله‌ای عددی به‌صورت دنبالهٔ (۱) خواهیم داشت که برای آن، شرط بولزانو-کوشی برقرار است. بنابراین، برای این دنباله، حدی متناهی وجود دارد که وجود تابع حدی $f(x)$ را، برای دنبالهٔ (۱) ثابت می‌کند.

اکنون، باانتخاب‌دلخواه $n>N$ و x از $\mathfrak{D}$، مقدار m را درنابرابری (۷)، به‌طور نامحدود، بزرگ می‌کنیم (به‌ازای n و x ثابت). با عبور به‌حد، نتیجه می‌شود:

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$$

و با این، میل یکنواخت $f_n(x)$ به‌سمت $f(x)$ ثابت می‌شود.

همین شرط را، بدون هیچ اشکالی، برای رشتهٔ تابعی هم می‌توان بیان کرد:

برای آن‌که رشتهٔ (۳)، به‌طور یکنواخت، در حوزهٔ $\mathfrak{D}$ متقارب باشد، لازم و کافی است‌که برای هر $\varepsilon>0$، چنان شمارهٔ N مستقل از x وجود داشته باشدکه به‌ازای $n>N$ و $m=1, 2, 3, \ldots$ دلخواه، نابرابری

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}u_k(x)\right|=|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+m}(x)|<\varepsilon \qquad (۸)$$

برای هر x از $\mathfrak{D}$ برقرار باشد.

از این‌جا، به‌خصوص، این نتیجهٔ مفید حاصل می‌شود:

اگر همهٔ جمله‌های رشتهٔ (۳) را، که در حوزهٔ $\mathfrak{D}$ متقارب یکنواخت است، در یک تابع $v(x)$، که در $\mathfrak{D}$ کران‌دار است

$$|v(x)|\leqslant M$$

ضرب کنیم، در آن‌صورت، تقارب یکنواخت حفظ می‌شود.

برای اثبات تقارب یکنواخت دنباله یا رشته‌ای مشخص، توجه به شرطها کمتر می‌تواند مناسب باشد؛ برای این منظور از معیارهایی استفاده می‌کنند، که البته براساس همین شرطها پایه‌گذاری شده‌اند، ولی در عمل با راحتی بیشتری قابل‌کاربردند.

۴۳۰. معیارهای تقارب یکنواخت رشته‌ها. اینک، به‌معیارهایی می‌پردازیم که از همه ساده‌ترند و بیش از همه کاربرد دارند.

معیار ویرشتراس. اگر جمله‌های رشتهٔ تابعی (۳) از حوزهٔ $\mathfrak{D}$، در نابرابری

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \quad (n = ۱, ۲, ۳, \dots) \tag{۹}$$

صدق کنند، که در آن c_n معرف جمله‌های یک رشتهٔ عددی متقارب است

$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n = c_۱ + c_۲ + \dots + c_n + \dots \tag{C}$$

در آن‌صورت، (۳) در $\mathfrak{D}$، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود.

با حضور نابرابری (۹)، گویند، رشتهٔ (۳) به‌وسیلهٔ رشتهٔ (C) محدود می‌شود یا (C) رشتهٔ محدودکنندهٔ رشتهٔ (۳) است.

در واقع، از روی (۹)، نابرابری

$$|u_{n+۱}(x) + u_{n+۲}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| \leqslant c_{n+۱} + c_{n+۲} + \dots + c_{n+m}$$

را به‌دست می‌آوریم که، درعین‌حال، برای هر x از حوزهٔ $\mathfrak{D}$ درست است. طبق اصل تقارب، که در مورد رشتهٔ عددی (C) به‌کار می‌بریم، برای $\varepsilon > ۰$ دلخواه، می‌توان N را طوری پیدا کرد که به‌ازای $n > N$، سمت راست نابرابری قبل، و همراه با آن، سمت‌چپ آن نابرابری، برای هر x، کمتر از ε می‌شود و، در نتیجه، با توجه به‌شرط شمارهٔ **۴۲۹** حکم ثابت می‌شود.

به‌این ترتیب، مثلاً اگر رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ متقارب مطلق باشد، رشته‌های

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos nx$$

متقارب یکنواخت خواهند بود (در بازهٔ دلخواه). در واقع، داریم:

$$|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leqslant |a_n|$$

و رشتهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ نقش محدودکننده را به‌عهده دارد.

یادداشت. هر رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ را، که در $\mathfrak{D}$ متقارب مطلق باشد، می‌توان با گذاشتن پرانتزهایی به‌رشته‌ای تبدیل کرد که در آن معیار ویرشتراس کاربرد داشته باشد.

در واقع، رشتهٔ متقارب مثبت $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ را انتخاب می‌کنیم. از روی عدد c_1 [۴۲۹]، چنان شمارهٔ m_1 پیدا می‌شود که برای $n>m_1$ در $\mathfrak{D}$ داشته باشیم:

$$|u_{m_1+1}(x)+\cdots+u_n(x)|<c_1$$

سپس، از روی عدد c_2، چنان شمارهٔ $m_2>m_1$ پیدا می‌شود که برای $n>m_2$ در $\mathfrak{D}$ داشته باشیم:

$$|u_{m_2+1}(x)+\cdots+u_n(x)|<c_2$$

وغیره، آن‌وقت، اگر جمله‌های رشتهٔ مفروض را به‌صورت زیر گروه‌بندی کنیم:

$$|u_1(x)+\cdots+u_{m_1}(x)|+|u_{m_1+1}(x)+\cdots+u_{m_2}(x)|+$$
$$+|u_{m_2+1}(x)+\cdots+u_{m_3}(x)|+\cdots$$

به‌رشته‌ای می‌رسیم که جمله‌های آن ــ باشروع از دومی ــ از لحاظ قدرمطلق، از جمله‌های رشته عددی انتخابی، تجاوز نمی‌کند.

اگر بتوان از معیار ویرشتراس درمورد رشتهٔ (۳) استفاده کرد، در آن‌صورت، رشتهٔ (۳) الزاماً متقارب مطلق می‌شود. علاوه بر آن، همراه با رشتهٔ (۳)، رشته‌ای هم که از قدرمطلق جمله‌های آن تشکیل شده است:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \qquad (10)$$

متقارب یکنواخت می‌شود.

در ضمن، ممکن است به‌حالتی برخورد کنیم که رشتهٔ (۳)، با وجودی که متقارب غیرمطلق است، متقارب یکنواخت باشد. نمونهٔ این گونه رشته‌ها، رشتهٔ ۷) شمارهٔ **۴۲۸** است (این که این رشته، متقارب مطلق نیست، از مقایسهٔ با رشتهٔ توافقی نتیجه می‌شود). حتی ممکن است این وضع پیش آید که رشتهٔ (۳) متقارب و یکنواخت باشد، ولی رشتهٔ (۱۰)، متقارب غیریکنواخت باشد [رشتهٔ ۸) در **۴۲۸** را ببینید]. روشن است که در چنین موردهایی، نمی‌توان از معیار ویرشتراس استفاده کرد؛ برای بررسی آن‌ها، معیارهای ظریف‌تری لازم است.

فعلاً، از دو معیار یاد می‌کنیم که به‌رشتهٔ تابعی به‌صورت زیر مربوط می‌شوند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x) = a_1(x)\cdot b_1(x)+a_2(x)\cdot b_2(x)+\cdots$$

$$\cdots+a_n(x)\cdot b_n(x)+\cdots \qquad (W)$$

که در آن، $a_n(x)$ و $b_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$، تابع‌هایی از x در $\mathfrak{D}$ هستند. این معیارها را، شبیه معیارهای آبل و دیریکله [۳۸۴] در نظریهٔ رشته‌های عددی ساخته‌ایم و، به‌همین مناسبت، آن‌ها را به‌طور مشروط، با نام این دو دانشمند، خواهیم نامید.

معیار آبل. فرض کنیم رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = b_1(x)+b_2(x)+\cdots+b_n(x)+\cdots \qquad (B)$$

در حوزهٔ $\mathfrak{D}$، متقارب یکنواخت باشد؛ و تابع‌های $a_n(x)$ (به‌ازای هرمقدار x)، دنباله‌ای یکنوا (مونوتون) را تشکیل دهند که، به‌ازای x و n دلخواه، کران‌دار باشد.

$$|a_n(x)| \leqslant K$$

آن‌وقت، رشتهٔ (W)، در حوزهٔ $\mathfrak{D}$، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود.

اثبات، مشابه قبلی است. با توجه به تقارب یکنواخت رشتهٔ (B)، می‌توان N را مستقل از x پیدا کرد؛ با استناد به‌شرط شمارهٔ ۴۲۹ (به‌جای اصل تقارب) و، سپس، به‌کمک پیش‌قضیهٔ آبل [۳۸۳]، مانند قبل (با به‌حساب آوردن $n>N$)، برای هر x از $\mathfrak{D}$، نتیجه می‌گیریم:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant \varepsilon(|a_{n+1}(x)|+2|a_{n+m}(x)|) \leqslant 3K\varepsilon$$

و به‌این ترتیب، حکم ثابت می‌شود.

معیار دیریکله. فرض کنیم، مجموع‌های جزئی $B_n(x)$ از رشتهٔ (B) در مجموع ــ به‌ازای x و n دلخواه ــ کران‌دار باشند:

$$|B_n(x)| \leqslant M$$

و تابع‌های a_n (به‌ازای هر x) دنباله‌ای یکنوا (مونوتون) را تشکیل دهند که در حوزهٔ $\mathfrak{D}$، به‌طور یکنواخت به‌سمت صفر متقارب باشد. در این‌صورت، رشتهٔ (W) هم در این حوزه، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود.

در این‌جا هم، اثبات شبیه **۳۸۴** است. فقط توجه کنیم که N را می‌توان، مستقل از x و با توجه به گرایش یکنواخت $a_n(x)$ به‌سمت صفر، اختیار کرد.

درعمل، اغلب به‌جای دنبالهٔ تابعی $\{a_n(x)\}$، دنبالهٔ عددی معمولی $\{a_n\}$، یا به‌جای رشتهٔ تابعی $\sum_1^\infty b_n(x)$، رشتهٔ عددی معمولی $\sum_1^\infty b_n$ پیدا می‌شود. لازم است یادآوری کنیم که، چنین حالتی را، باید به‌عنوان حالت خاصی از حالت کلی بالا درنظر گرفت، زیرا تقارب دنبالهٔ $\{a_n\}$ و تقارب رشتهٔ $\sum_1^\infty b_n$ را می‌توان به‌عنوان تقارب یکنواخت در نظر گرفت (درآن‌ها، وابستگی به x وجود ندارد).

مثلا، اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از عددهای مثبت باشد که به‌طور یکنوا (مونوتون) به‌سمت صفر میل می‌کند، درآن صورت، هردو دنبالهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

با توجه به‌معیار دیریکله، در بازهٔ بستهٔ دلخواهی که شامل نقطه‌های $2k\pi$ نباشد ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود. و این، ازآن‌جا نتیجه می‌شود که مثلاً [**۳۸۵**، ۲) را ببینید]

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin ix\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|}$$

و در بازهٔ نامبرده، $\sin\frac{1}{2}x$ برابر صفر نمی‌شود، به‌طوری که برای مجموع، می‌توان مرزی معین کرد که بستگی به x نداشته باشد.

مثال‌های دیگر کاربرد معیارهای تقارب یکنواخت را، می‌توانید در شمارهٔ **۴۳۹** و شماره‌های بعدی پیدا کنید.

§۲. ویژگی‌های تابعی مجموع رشته‌ها

۴۳۱. پیوستگی مجموع رشته. اکنون به‌بررسی ویژگی‌های تابعی مجموع رشته‌ای که ازتابع‌ها تشکیل شده است و بستگی آن‌ها با ویژگی‌های جمله‌های رشته، می‌پردازیم. قبلاً دربارهٔ هم‌ارزی نقطه‌نظرهای مربوط به‌دنباله‌ها و نقطه‌نظرهای رشته‌های نامتناهی،

صحبت کرده‌ایم. در بحثی که پیش‌رو داریم، ترجیح می‌دهیم، دیدگاه‌های مربوط به‌رشته‌ها را مطرح کنیم، زیرا، در کاربردها، تقریباً همه‌جا با رشته‌های نامتناهی سروکار داریم. با وجود این، در شمارهٔ **۴۳۶**، بحثی دربارهٔ انتقال مطالب مربوط به‌رشته‌های تابعی به‌حالت دنباله‌های تابعی، خواهیم داشت.

مفهوم تقارب یکنواخت، که قبلا دربارهٔ آن صحبت کرده‌ایم، در تمامی بخش‌های آینده، نقشی قاطع را به‌عهده دارد، به‌نحوی که در جریان بحث، به‌اهمیت جدی آن پی‌خواهید برد.

با مسالهٔ پیوستگی مجموع رشته‌ها آغاز می‌کنیم، که قبلا هم درشمارهٔ **۴۲۷**، به‌آن اشاره کرده بودیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم، تابع‌های $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \dots)$، در بازهٔ $\mathscr{D}=[a, b]$ معین و همهٔ آن‌ها در یک نقطهٔ $x=x_0$ این بازه، پیوسته باشند. اگر رشتهٔ (۳) در بازهٔ $\mathscr{D}$، متقارب یکنواخت باشد، درآن صورت، مجموع $f(x)$ رشته، در نقطهٔ $x=x_0$، پیوسته خواهد بود.

[این حکم را، برای نخستین بار، کوشی مطرح کرد. ولی مؤلف نامدار آن، درطرح خود، شرط یکنواختی را وارد نکرد، شرطی که، بدون آن، نمی‌توان درستی حکم را تضمین کرد.]

اثبات. باحفظ علامت‌های قبلی، برای $n=1, 2, 3, \dots$ دلخواه و x از $\mathscr{D}$، داریم:

$$f(x)=f_n(x)+\varphi_n(x) \qquad (11)$$

ودرحالت خاص

$$f(x_0)=f_n(x_0)+\varphi_n(x_0)$$

از آن‌جا

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x_0)|+|\varphi_n(x)|+|\varphi_n(x_0)| \qquad (12)$$

اکنون $\varepsilon>0$ دلخواه را درنظر می‌گیریم. با توجه به تقارب یکنواخت رشته، می‌توان n را طوری تثبیت کرد که نابرابری

$$|\varphi_n(x)|<\varepsilon \qquad (13)$$

برای همهٔ مقدارهای x ازبازهٔ $\mathscr{D}$ (وازآن جمله، برای $x=x_0$) برقرار باشد. توجه کنیم که، با تثبیت n، تابع $f_n(x)$ عبارت است از مجموع تعداد معین ومحدودی از تابع‌های $u_k(x)$، که در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته‌اند. بنابراین، $f_n(x)$ هم، دراین نقطه، پیوسته است و

از روی $\varepsilon>0$ مفروض، می‌توان $\delta>0$ را طوری پیدا کرد که به‌ازای $|x-x_0|<\delta$، داشته باشیم:

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon \qquad (۱۴)$$

آن‌وقت، با توجه به (۱۲)، (۱۳) و (۱۴)، از نابرابری $|x-x_0|<\delta$ نتیجه می‌شود:

$$|f(x)-f(x_0)|<3\varepsilon$$

که قضیه را هم ثابت می‌کند.

طبیعی است که، اگر تابع $u_n(x)$ در سراسر بازهٔ $\mathscr{D}=[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌وقت به‌شرط وجود تقارب یکنواخت، مجموع $f(x)$ رشتهٔ (۳) هم، در سراسر بازه پیوسته خواهد بود.

این مطلب را که شرط یکنواختی تقارب نمی‌تواند از متن قضیه حذف شود، مثلاً می‌توان از رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

[قضیهٔ [۴۲۸، ۸) را ببینید]، که مجموع آن برای $x\neq 0$ برابر ۱ و برای $x=0$ برابر ۰ است. با وجود این، وجود یکنواختی تقارب در قضیه، تنها به‌عنوان شرط کافی باید در نظر گرفته شود و نباید فکر کرد که، برای پیوستگی مجموع رشته، این شرط حتماً لازم است. مثلا رشته‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty}2x[n^2e^{-n^2x^2}-(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}],$$

(۱۵)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

[۴۲۸، ۵) و ۲) را ببینید]، در بازهٔ $[0,1]$، دارای مجموع پیوستهٔ ۰ می‌باشند، درحالی که هردو، به‌صورتی غیریکنواخت، به‌سمت آن متقارب‌اند.

با همهٔ این‌ها، گروهی از حالت‌ها وجود دارد که شرط یکنواختی تقارب برای آن‌ها ضروری است. به‌این مناسبت، قضیهٔ زیر را، که متعلق به‌دینی (U. Dini) است، ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم، جمله‌های رشتهٔ (۳)، در سراسر بازهٔ $\mathscr{D}=[a,b]$، پیوسته و مثبت باشند. اگر رشته، دارای مجموع $f(x)$، و پیوسته در سراسر بازه، باشد، در آن صورت، در این بازه، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود.

اثبات. باقی‌ماندهٔ رشتهٔ (۳) را درنظر می‌گیریم:

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)=f(x)-f_n(x)$$

تابع $\varphi_n(x)$ از x، به‌عنوان تفاضل دو تابع پیوسته، خود پیوسته است. با توجه به‌مثبت‌بودن جمله‌های رشته، دنبالهٔ $\{\varphi_n(x)\}$، به‌ازای x ثابت، نزولی (غیرصعودی) است:

$$\varphi_1(x)\geqslant\varphi_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\varphi_n(x)\geqslant\varphi_{n+1}(x)\geqslant\cdots$$

بالاخره، مادام‌که رشتهٔ (۳) در بازهٔ $\mathfrak{D}$ متقارب است، برای x ثابت نامشخص داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$$

برای اثبات یکنواختی تقارب رشته، کافی‌است ثابت کنیم که، به‌ازای هرعدد $\varepsilon>0$، دست‌کم یك n وجود دارد که به‌ازای آن، برای همهٔ xها داشته باشیم $\varphi_n(x)<\varepsilon$ (زیرا دراین صورت، مسلماً برای مقدارهای بزرگتر n، این نابرابری برقرار خواهد بود).

این اثبات را، به طریق برهان خلف می‌آوریم. فرض کنیم، برای یك $\varepsilon>0$، چنان شماره‌ای برای n وجود نداشته باشد. آن‌وقت، به‌ازای $n=1,2,3,\cdots$ دلخواه در بازهٔ $\mathfrak{D}$، چنان $x=x_n$ پیدا می‌شود که، برای آن، داشته باشیم: $\varphi_n(x_n)\geqslant\varepsilon$. درمورد دنبالهٔ $\{x_n\}$، که همهٔ عضوهای‌آن در بازهٔ‌متناهی $\mathfrak{D}$ قراردارند، پیش قضیهٔ بولزانو-ویرشتراس [۴۱] را به‌کار می‌بریم وازآن، دنبالهٔ جزئی $\{x_{n_k}\}$، متقارب به‌سمت حد x_0 را جدا می‌کنیم.

با توجه به‌پیوستگی $\varphi_m(x)$، برای هرمقدار دلخواه m داریم:

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0)$$

از طرف دیگر، به‌ازای m دلخواه، برای مقدارهای به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ k: $n_k\geqslant m$، به‌نحوی که

$$\varphi_m(x_{n_k})\geqslant\varphi_{n_k}(x_{n_k})\geqslant\varepsilon$$

دراین‌جا، با گذر به‌حد، وقتی $k\to\infty$، پیدا می‌کنیم که

$$\lim_{k\to0}\varphi_m(x_{n_k})=\varphi_m(x_0)\geqslant\varepsilon$$

ولی این نابرابری، که به‌ازای هرمقدار m برقرار است، متناقض است با این‌که

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x_0)=0$$

قضیه ثابت شد.

۴۳۲. ملاحظه‌هایی دربارهٔ تقارب شبه یکنواخت. به‌این‌ترتیب، اگر رشتهٔ تابعی (۳)، از تابع‌های پیوسته دربازهٔ $\mathfrak{X}=[a, b]$ تشکیل شده باشد و دراین بازه به‌سمت مجموع $f(x)$ متقارب شود، درآن‌صورت، برای پیوستگی $f(x)$، تقارب یکنواخت رشته کافی است، ولی، درحالت کلی، به‌هیچ‌وجه، لازم نیست. «دینی» ودیگران توجه داشتند که، به‌عنوان شرط کافی، باید از نوعی یکنواختی «ضعیف‌تر» تقارب استفاده کرد. این شرط را می‌توان، این‌طور تنظیم کرد: برای هرعدد $\varepsilon>0$ و هرشمارهٔ N'، دست‌کم یک شمارهٔ $n>N'$ مستقل از x، چنان وجود داشته باشد که نابرابری (۶)، به طور هم‌زمان، برای همهٔ xها از $\mathfrak{X}$ برقرار شود. درواقع، وقتی هم که قضیهٔ ۱ را ثابت می‌کردیم، تنها ازیک شمارهٔ n استفاده کردیم که، به‌ازای آن، نابرابری (۱۳) برای همهٔ xها از $\mathfrak{X}$ برقرار بود.

لکن، حتی این یکنواختی «تضعیف شده» هم، هنوز برای پیوستگی مجموع $f(x)$ رشتهٔ (۳)، لازم نیست. مثلا، این شرط، برای رشته‌های (۱۵)، که به‌سمت مجموع پیوستهٔ $f(x)\equiv 0$ متقارب‌اند، وجود ندارد.

آرتسه‌لا (C. Artzela)، درسال ۱۸۸۳ میلادی، گونهٔ ویژه‌ای از تقارب را (که بعدها، نام تقارب شبه‌یکنواخت را به‌خود گرفت) در بررسی‌های خود وارد کرد، که مسالهٔ مربوط به‌خصلت دقیق تقارب رشته را، برای تامین پیوستگی مجموع آن، حل می‌کند.

رشتهٔ (۳)، متقارب در بازهٔ $\mathfrak{X}=[a, b]$، وقتی در $\mathfrak{X}$ به‌مجموع $f(x)$ به‌طور شبه یکنواخت متقارب می‌شود، که برای هرعدد $\varepsilon>0$ و هرشمارهٔ N'، بتوان بازهٔ $\mathfrak{X}$ را با تعداد متناهی فاصله‌های باز

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_i, b_i), \ldots, (a_k, b_k)$$

پوشاند و به‌آن‌ها، به‌ترتیب، k شماره داد:

$$n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_k (>N')$$

به قسمی که، برای همهٔ مقدارهای x (از $\mathfrak{X}$) واقع در (a_i, b_i) $(i=1, 2, \ldots, k)$، نابرابری

$$|f(x)-f_{n_i}(x)|=|\varphi_{n_i}(x)|<\varepsilon$$

به‌طور هم‌زمان برقرار باشد.

دراین یکنواختی «تضعیف شدهٔ» تقارب، همهٔ مقدارهای x از $\mathfrak{X}$، متناظر با یک و تنها یک شمارهٔ n قرار می‌گیرند وهمهٔ xها، به‌گروه‌هایی تقسیم می‌شوند که در تناظر با

مقدارهای مختلف n ــ وهربار به‌تعداد متناهی ــ قرار می‌گیرند.

آرتسه‌لا، بااستفاده ازاین مفهوم، حکم زیررا ثابت‌کرد:

قضیهٔ ۳. فرض کنیم، تابع $u_n(x)$، معین و پیوسته در بازهٔ $\mathfrak{X}=[a, b]$ و رشتهٔ (۳)، متقارب در این بازه، داده شده باشند؛ برای آن‌که مجموع $f(x)$ رشته نیز در $\mathfrak{X}$ پیوسته باشد، لازم وکافی است‌که رشته، در $\mathfrak{X}$ به‌طور شبه‌یکنواخت، به‌سمت $f(x)$ متقارب باشد.

شرط لازم است. ابتدا فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، و درنتیجه همهٔ باقی‌مانده‌های $\varphi_n(x)$، پیوسته باشند. نقطهٔ دلخواه x' از $\mathfrak{X}$ را انتخاب می‌کنیم. از روی عددهای مفروض ε و N، چنان شمارهٔ $n'>N$ پیدا می‌شودکه، برای آن، داشته باشیم:

$$|\varphi_{n'}(x')|<\varepsilon$$

با توجه به‌پیوستگی تابع $\varphi_{n'}(x)$، نابرابری مشابه

$$|\varphi_{n'}(x)|<\varepsilon$$

نیز دریك همسایگی $\sigma'=(x'-\delta', x'+\delta')$ نقطهٔ x' برقرار خواهد بود. از همهٔ این بازه‌های باز σ'، که برای همهٔ x'ها از $\mathfrak{X}$ ساخته شود، یك دستگاه نامتناهی Σ تشکیل می‌شودکه بازهٔ $\mathfrak{X}$ را می‌پوشانند. آن‌وقت، ازروی پیش قضیهٔ بورل [۸۸]، می‌توان زیر-دستگاه متناهی بازه‌های

$$\sum^*=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$$

را جداکردکه بازهم $\mathfrak{X}$ را پوشانده باشد. واین بازه‌ها، همان‌هایی هستندکه در تعریف تقارب شبه یکنواخت دربارهٔ آن‌ها صحبت می‌شود.

شرط کافی است. حال فرض می‌کنیم، رشتهٔ (۳)، به‌طور شبه یکنواخت، به‌سمت مجموع خود $f(x)$، متقارب باشد. با انتخاب عددهای ε و N'، بازه‌های (a_i, b_i) را می‌سازیم و شماره‌های n_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ را، متناظربا ویژگی‌های تعریف، درنظر می‌گیریم. نقطهٔ x_0 را به دلخواه از $\mathfrak{X}$ برمی‌داریم وفرض می‌کنیم دربازهٔ (a_{i_0}, b_{i_0}) واقع باشد. شبیه اثبات قضیهٔ ۱ [۴۳۱، (۱۲)]، می‌توانیم بنویسیم:

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f_{n_i}(x)-f_{n_i}(x_0)|+|\varphi_{n_i}(x)|+|\varphi_{n_i}(x_0)| \quad (12a)$$

ضمناً، روشن است‌که

$$|\varphi_{n_i}(x_0)|<\varepsilon$$

و اگر x هم، متعلق به‌بازهٔ (a_{i_0}, b_{i_0}) باشد، در آن صورت

$$|\varphi_{n_i}(x)|<\varepsilon$$

می‌توان عدد $\delta>0$ را طوری پیدا کرد که به‌ازای $|x-x_0|<\delta$، نه تنها x در بازهٔ نامبرده باشد، بلکه جمله اول سمت راست در (۱۲a) هم، کوچکتر از ε باشد، یعنی

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

که تقارب $f(x)$ درنقطهٔ x_0 را ثابت می‌کند*.

از همین قضیه، می‌توان به‌سادگی قضیهٔ دینی شمارهٔ قبل را بیرون کشید. درواقع، اگررشتهٔ (۳)، از تابع‌های پیوستهٔ مثبت تشکیل شود و به‌سمت مجموعی پیوسته متقارب باشد، در آن صورت، همان‌طور که دیدیم، تقارب الزاماً شبه‌یکنواخت خواهد بود.

با توجه به‌این که، درحالت مفروض، باقی‌مانده‌های $\varphi_n(x)$، با صعود n، نزول می‌کنند، کافی است N را بزرگترین همهٔ n_iها $(k$ ،... ،۲ ،۱$=i)$ بگیریم، تا برای $n>N$، نابرابری (۶) به‌طور هم‌زمان، برای همهٔ xها از $\mathfrak{D}$، برقرار باشد، تقارب یکنواخت می‌شود.

۴۳۳. عبور جمله به‌جمله به‌سمت حد. قضیهٔ دیگری می‌آوریم که تعمیم قضیهٔ ۱ است. در آن، $\mathfrak{D}=\{x_i\}$، مجموعه‌ای نامتناهی و اختیاری، دارای نقطهٔ تجمع a (متناهی یا نامتناهی) [۵۲] است؛ خود این نقطه، می‌تواند متعلق به‌مجموعه نباشد.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم، هریك از تابع‌های $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$، که درحوزهٔ $\mathfrak{D}$ معین‌اند، با میل x به‌سمت a، حدی متناهی داشته باشند:

$$\lim_{x\to a} u_n(x)=c_n \qquad (۱۶)$$

اگررشتهٔ (۳) در حوزهٔ $\mathfrak{D}$، متقارب یکنواخت باشد، در آن صورت، ۱) رشتهٔ تشکیل شده از این حدها

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=C \qquad (C)$$

متقارب می‌شود و ۲) مجموع $f(x)$ رشتهٔ (۳) نیز، به‌ازای $x\to a$، دارای حد است و به‌خصوص

---

*) به‌طوری که خواننده ملاحظه می‌کند، فرض این که همهٔ شماره‌های n_i می‌توانند به‌قدر کافی بزرگ انتخاب شوند، عملاً درهیچجا به‌کار نمی‌رود.

$$\lim_{x \to a} f(x) = C \qquad (۱۷)$$

اثبات. طبق شرط تقارب یکنواخت شمارهٔ **۴۲۹**، برای $\varepsilon > ۰$ اختیاری، چنان شماره‌ای برای N وجود دارد که، به‌ازای $n > N$ و $m = ۱, ۲, ۳, \ldots$، نابرابری (۸) برای همهٔ xها از $\mathfrak{M}$ برقرار باشد. دراین‌جا، با گذر به‌حد به‌ازای $x \to a$ و با به‌حساب آوردن (۱۶)، معلوم می‌شود که

$$|c_{n+۱} + c_{n+۲} + \cdots + c_{n+m}| \leqslant \varepsilon$$

به‌طوری‌که برای رشتهٔ (۳)، شرط تقارب [**۳۷۶**] برقرار می‌شود.

اگر C، C_n و γ_n، طبق معمول، معرف مجموع، مجموع جزئی و باقی‌ماندهٔ آن باشند، داریم:

$$C = C_n + \gamma_n$$

اگر این برابری را، عضو به‌عضو، از (۱۱) کم کنیم، به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$|f(x) - C| \leqslant |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n| \qquad (۱۸)$$

با توجه به‌تقارب یکنواخت رشتهٔ (۳) و تقارب رشتهٔ (C)، ازروی $\varepsilon > ۰$ دلخواه، می‌توان n را آن‌قدر بزرگ تثبیت کرد تا برای همهٔ xها از $\mathfrak{M}$ داشته باشیم:

$$\varphi_n(x) < \frac{\varepsilon}{۳}; \quad |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{۳} \qquad (۱۹)$$

زیرا، معلوم است

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{k=۱}^{n} u_k(x) = \sum_{k=۱}^{n} c_k = C_n$$

پس، اگر فقط a را معین بگیریم، چنان $\delta > ۰$ پیدا می‌شود که به‌ازای $|x - a| < \delta$ داشته باشیم:

$$|f_n(x) - C_n| < \varepsilon \qquad (۲۰)$$

آن‌وقت، به‌ازای مقدارهای نامبردهٔ x، طبق (۱۸)، (۱۹) و (۲۰)، نابرابری

$$|f(x) - C| < ۳\varepsilon$$

برقرار و منجر به (۱۷) می‌شود*.

---

*) خواننده، دراین بحث، ازآن‌چه قبلا برای اثبات قضیهٔ ۱ به‌کاررفته بود، اطلاع دارد.

برابری (۱۷) را می‌توان به‌این صورت نوشت [(۱۶) را ببینید]:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to a}u_n(x)\right\}$$

به‌این‌ترتیب، به‌شرط وجود تقارب یکنواخت، حد مجموع رشته، برابر است با مجموع تشکیل شده از حد جمله‌های آن. به‌زبان دیگر: در رشته، عبور حدی جمله به‌جمله، مجاز است.

۴۳۴. انتگرال‌گیری جمله به‌جملهٔ رشته‌ها. اکنون به بررسی مسالهٔ مربوط به‌انتگرال‌گیری مجموع رشته‌های تابعی متقارب می‌پردازیم.

قضیهٔ ۵. اگر تابع‌های $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \dots)$ در بازهٔ $\mathscr{C}=[a, b]$ پیوسته باشند، و رشتهٔ (۳) که از آن‌ها تشکیل شده است، در این بازه، به‌طور یکنواخت، متقارب باشد، آن‌گاه انتگرال مجموع $f(x)$ رشتهٔ (۳)، به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\dots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\dots \qquad (۲۱)$$

اثبات. با توجه به پیوستگی تابع‌های $u_n(x)$ و $f(x)$ [**۴۳۱**، قضیهٔ ۱]، وجود همهٔ این انتگرال‌ها روشن است. اگر از اتحاد

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\varphi_n(x)$$

در بازهٔ $[a, b]$ انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\dots+\int_a^b u_n(x)\,dx+$$

$$+\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

به‌این ترتیب، مجموع n جمله از رشتهٔ (۲۱)، در جملهٔ متمم $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$، با $\int_a^b f(x)\,dx$ فرق دارد. برای اثبات بسط (۲۱)، تنها باید ثابت کرد که

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx=0 \qquad (۲۲)$$

با توجه به‌تقارب یکنواخت رشتهٔ (۳)، برای $\varepsilon>0$ دلخواه، می‌توان N را طوری

پیدا کرد که به‌ازای $n>N$، برای همهٔ xها در بازهٔ موردنظر، داشته باشیم:

$$|\varphi_n(x)|<\varepsilon$$

دراین صورت، برای همین مقدارهای n، خواهیم داشت:

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < (b-a)\varepsilon$$

که، درنتیجه، رابطهٔ حدی (۲۲) را هم ثابت می‌کند.

برابری (۲۱) را، به‌این صورت هم می‌توان نوشت:

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_a^b u_n(x)\,dx\right\}$$

به‌نحوی که درحالت تقارب یکنواخت رشته‌ها، انتگرال مجموع یك رشته، برابر است با مجموع رشته‌ای که از انتگرال‌های جمله‌های آن تشکیل شده است. یا به‌زبان دیگر: انتگرال‌گیری جمله به‌جملهٔ رشته‌ها، مجاز است.

شبیه قضیهٔ ۱، دراین‌جا هم، شرط یکنواخت بودن تقارب، شرطی اساسی برای درستی بسط (۲۱) است، یعنی نمی‌توان، خیلی ساده، آن را حذف کرد. ولی با همهٔ این‌ها، این شرط لازم نیست. رشته‌های (۱۵)، که در **۴۳۱** بررسی کردیم، این کیفیت را روشن می‌کنند. هردوی آن‌ها، دربازهٔ $[۰\ ۱]$، به‌طور غیریکنواخت، به‌سمت تابع $f(x)=۰$ متقارب می‌شوند. اگر از اولی ازجمله به‌جملهٔ آن انتگرال بگیریم، به‌عنوان مجموع رشتهٔ انتگرال‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 ۲n^۲x\,e^{-n^۲x^۲}\,dx = \lim_{n\to\infty}(۱-e^{-n^۲}) = ۱$$

درصورتی که داریم: $\int_0^1 f(x)\,dx = ۰$. درحالی که، برای رشتهٔ دوم، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{۱+n^۲x^۲}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(۱+n^۲)}{۲n} = ۰ = \int_0^1 f(x)\,dx$$

مثال رشتهٔ

$$\frac{۱}{۱+x} = ۱-x+x^۲-\cdots+(-۱)^n x^n+\cdots \quad (۰\leqslant x<۱)$$

جالب است. دراین‌جا

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

به‌طوری که می‌توان از رشته، جمله به‌جمله انتگرال گرفت، درحالی‌که به‌ازای $x=1$، به‌کلی متباعد است.

حالا، تعمیم قضیهٔ ۵ را، در ارتباط با نفی شرط پیوستگی تابع‌های مورد بررسی، می‌آوریم.

قضیهٔ ۶. اگر توابع $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \dots)$، در بازهٔ $\mathfrak{D}=[a, b]$، انتگرال‌پذیر* باشند و رشتهٔ (۳) که از آن‌ها تشکیل شده است، متقارب یکنواخت باشد، درآن صورت، مجموع $f(x)$ رشته نیز، طبق بسط (۲۱)، انتگرال‌پذیر است.

اثبات. به‌انتگرال‌پذیری تابع $f(x)$ بپردازیم.

با توجه به تقارب یکنواخت رشته، به‌ازای ε مفروض، می‌توانیم n را آن‌قدر بزرگ تثبیت کنیم تا درهمهٔ نقطه‌های بازهٔ $[a, b]$ داشته باشیم:

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{یا} \quad f_n(x)-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f_n(x)+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (۲۳)$$

بخش $[a, \beta]$ از بازهٔ $[a, b]$ را انتخاب‌وفرض می‌کنیم m و M، مرزهای تابع $f_n(x)$ در $[a, b]$ و $\omega = M-m$، نوسان آن باشد. نوسان نظیر تابع $f(x)$ را با Ω نشان می‌دهیم. با توجه به (۲۳)، در محدودهٔ بازهٔ $[\alpha, \beta]$ داریم:

$$m-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) < M+\frac{\varepsilon}{2}; \quad \Omega \leqslant \omega+\varepsilon$$

اکنون، بازهٔ $[a, b]$ را، به‌ترتیب معمول، به‌بازه‌های جزئی $[x_i, x_{i+1}]$ تجزیه می‌کنیم، و نوسان مربوط به‌بازهٔ iام را با اندیس i علامت می‌گذاریم، آن وقت $\Omega_i \leqslant \omega_i+\varepsilon$ و

$$\sum_i \Omega_i \Delta x_i \leqslant \sum_i \omega_i \Delta x_i + \varepsilon(b-a)$$

چون، جملهٔ دوم سمت راست به‌قدر دلخواه کوچك است و جملهٔ اول، همراه با $\lambda = \max \Delta x_i$ به‌سمت صفرمیل می‌کند، سمت‌چپ هم، به‌دلخواه، کوچك می‌شود و، از آن‌جا، انتگرال‌پذیری تابع $f(x)$ نتیجه می‌شود [۲۹۷، (۸)].

برابری (۲۱) را هم می‌توان، دقیقاً به‌همین صورت، ثابت کرد.

---

*) به‌معنای شمارهٔ ۲۹۵.

روی مثال نشان می‌دهیم که، اگر یکنواختی رشته‌ای که از تابع‌های انتگرال‌پذیر تشکیل شده است، خراب شود، ممکن است به‌مجموعی برسیم که انتگرال‌پذیر نباشد. در نقطه‌هایی از بازهٔ $[a, b]$ که x باکسر تحویل‌ناپذیر $\frac{m}{n}$ بیان می‌شود، $u_n(x)$ را برابر ۱ ودرسایر نقطه‌های بازه، برابر صفر می‌گیریم. این تابع‌ها، که تنها تعداد محدودی ناپیوستگی دارند، در بازهٔ $[۱, ۰]$ انتگرال‌پذیرند، درحالی که رشتهٔ مجموع آن‌ها، تابع انتگرال‌ناپذیر دیریکله [۳۰۰، ۲)] از آب درمی‌آید.

ضمناً، روشن است (وما آن را، روی مثال‌ها دیدیم) که، تقارب یکنواخت، شرط لازم برای انتگرال‌پذیری مجموع رشته‌ای که از تابع‌های انتگرال‌پذیر تشکیل شده‌است، نیست. دراین‌جاهم، آرتسه‌لا، شرط لازم‌وکافی رانشان‌داده‌است («تقارب شبه‌یکنواخت»)، با **۴۳۲** مقایسه کنید.

۴۳۵. مشتق‌گیری جمله به جملهٔ رشته‌ها. به‌کمک قضیهٔ ۵ شمارهٔ قبل، قضیهٔ زیر به‌سادگی ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۷. فرض کنیم، تابع $u_n(x)$ $(n = ۱, ۲, ۳, \dots)$ در بازهٔ $\mathfrak{D} = [a, b]$ معین و دارای مشتق پیوستهٔ $u'_n(x)$، درآن بازه، باشد. اگر در این بازه، نه‌فقط رشتهٔ (۳) متقارب باشد، بلکه رشته تشکیل شده از مشتق‌ها

$$\sum_{n=۱}^{\infty} u'_n(x) = u'_۱(x) + u'_۲(x) + \dots + u'_n(x) + \dots \qquad (۲۴)$$

هم به‌طور یکنواخت متقارب باشد، درآن صورت، مجموع $f(x)$ رشتهٔ (۳) هم در $\mathfrak{D}$ دارای مشتق است و ضمناً

$$f'(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} u'_n(x) \qquad (۲۵)$$

اثبات. مجموع رشتهٔ (۲۴) را با $f^*(x)$ نشان می‌دهیم. با توجه به قضیهٔ ۱، این مجموع تابعی است پیوسته از x. اکنون، با استفاده از قضیهٔ ۵، ازرشتهٔ (۲۴)، در فاصلهٔ از a تا مقدار اختیاری x از بازهٔ $\mathfrak{D}$، جمله به‌جمله انتگرال می‌گیریم، نتیجه می‌شود:

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \sum_{n=۱}^{\infty} \int_a^x u'_n(t)\,dt$$

ولی معلوم است که $\int_a^x u'_n(t)dt = u_n(x) - u_n(a)$، به‌طوری که

$$\int_a^x f^*(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)=f(x)-f(a)$$

[این تبدیل، با توجه به تقارب رشته‌های $\sum u_n(x)$ و $\sum u_n(a)$ روشن است؛ ۳۶۴، ۴° را ببینید.] چون انتگرال سمت چپ، با توجه به پیوستگی تابع زیر انتگرال، دارای مشتق برابر $f^*(x)$ است [۳۰۵، ۱۲°]، پس همان مشتق را هم تابع $f(x)$ دارد، که تنها در یک مقدار ثابت، با انتگرال تفاوت دارد.

برابری (۲۵) را (اگر با پیروی از کوشی، از علامت D برای مشتق استفاده کنیم)، می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$D\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}Du_n(x)$$

به‌این ترتیب، با توجه به شرط‌های مذکور، مشتق از مجموع رشته، برابر است با مجموع رشته‌ای که از مشتق جمله‌های آن تشکیل شده است. به‌زبان دیگر: مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ رشته، مجاز است.

رشته‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}]$$

و

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)-\frac{1}{2(n-1)}\ln(1+(n-1)^2x^2)\right]$$

را در نظر می‌گیریم. رشتهٔ اول، به‌ازای $x=0$ به‌سمت صفر و در سایر نقطه‌ها به‌سمت ۱ میل می‌کند، ولی مجموع دومی، همه‌جا برابر صفر است. اگر از آن‌ها، جمله به‌جمله مشتق بگیریم، در آن صورت، رشته‌های (۱۵) [۴۳۱] برای ما به‌دست می‌آید، که در تمامی بازهٔ $[0, 1]$ به‌سمت صفر متقاربند، ولی هردو به صورتی غیریکنواخت. درحالت اول، رشتهٔ مشتق‌ها، به‌ازای $x=0$ هم متقارب می‌شود، در این‌جا، مجموع رشتهٔ اول نمی‌تواند مشتق داشته باشد، زیرا در این نقطه ناپیوسته است. درحالت دوم، برعکس، مشتق‌گیری جمله به‌جمله، درهمه‌جا، به‌نتیجهٔ درست منتهی می‌شود. با این مثال‌ها، نقش این شرط که رشتهٔ مشتق‌ها متقارب مطلق باشد، روشن می‌شود. این شرط اساسی است، ولی لازم نیست.

قضیهٔ ۷ را می‌توان، با اثباتی کمی پیچیده‌تر، از بعضی فرض‌های اضافی آزاد کرد.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \dots)$، که در بازهٔ $\mathscr{D}=[a,b]$ معین است، دراین بازه، دارای مشتق متناهی $u'_n(x)$ باشد. اگر رشتهٔ (۳)، دست‌کم در یك نقطه ومثلاً به‌ازای $x=a$ متقارب و رشتهٔ (۲۴)، که از مشتق‌ها تشکیل شده است، در تمامی بازهٔ $\mathscr{D}$ به‌طوریکنواخت متقارب باشد، آن‌وقت ۱) رشتهٔ (۳) درتمامی بازه به‌طوریکنواخت‌متقارب و ۲) مجموع آن $f(x)$، در $\mathscr{D}$ دارای مشتق قابل بیان به‌وسیلهٔ (۲۵) است.

اثبات. دو نقطهٔ متفاوت x_0 و x را در بازهٔ $[a, b]$ انتخاب می‌کنیم و رشتهٔ زیررا تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0} \qquad (۲۶)$$

ثابت می‌کنیم که برای مقدار ثابت دلخواه x_0، این‌رشته برای هر $x\neq x_0$ متقارب وضمناً، نسبت به x، یکنواخت می‌شود.

برای این‌منظور، با درنظرگرفتن عدد اختیاری $\varepsilon>0$، با توجه به‌تقارب یکنواخت رشتهٔ (۲۴)، شمارهٔ N را چنان پیدا می‌کنیم که به‌ازای $n>N$ و $m=1, 2, 3, \dots$، نابرابری

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u'_n(x)\right|<\varepsilon \qquad (۲۷)$$

برای همهٔ مقدارهای x، به‌طور هم‌زمان، برقرار باشد. با تثبیت موقتی n و m، تابع

$$U(x)=\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)$$

را در نظر می‌گیریم. مشتق این تابع

$$U'(x)=\sum_{k=n+1}^{n+m} u'_k(x)$$

بنابر (۲۷)، از لحاظ قدرمطلق، همیشه کوچکتر از ε است. ولی روشن است که

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}=\frac{U(x)-U(x_0)}{x-x_0}=U'(c)$$

که در آن، c مقداری است واقع بین x_0 و x [از روی قضیهٔ لاگرانژ، ۱۱۲]. به‌این‌جهت، به‌ازای هر $x\neq x_0$ داریم:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}\right|<\varepsilon$$

چون این نابرابری، برای هر مقدار دلخواه ... ، ۳ ، ۲ ، ۱ = m، تنها به ازای $n>N$ برقرار است، تقارب یکنواخت رشتهٔ (۲۷) ثابت می‌شود. از همین‌جا، نتیجه‌گیری‌های موردنیاز به‌دست می‌آید.

پیش از همه، با اختیار $x_0=a$، از تقارب یکنواخت رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)-u_n(a)}{x-a}$$

و همراه با آن، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)]$$

[نتیجهٔ شمارهٔ ۴۲۹ را ببینید] و از تقارب رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}u_n(a)$، یکنواختی تقارب رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}u_n(x)$ را نتیجه می‌گیریم.

اگر مجموع آن را $f(x)$ بنامیم، در آن‌صورت مجموع (۲۶) ــ که در آن، x_0 بازهم مقدار دلخواهی از x در بازهٔ $[a, b]$ است ــ به روشنی برابر $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ خواهدشد. چون در رشته‌های متقارب یکنواخت، می‌توان جمله به جمله به حد گذشت (بنابر قضیهٔ ۴)، بنابراین با میل‌دادن x به‌سمت x_0، نتیجه می‌گیریم:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to x_0}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}\right\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x_0)$$

آن‌چه لازم بود، ثابت شد.

یادداشت. همهٔ این قضیه‌ها ــ دربارهٔ گذر جمله به‌جمله به حد، انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله ــ شباهت بین رشتهٔ تابعی را با مجموع تعداد متناهی تابع‌ها، نشان می‌دهد. تنها، درمورد اخیر، نقش اساسی و استثنائی یکنواختی تقارب را، نباید فراموش کرد.

۴۳۶. دیدگاه دنباله‌ها. بیان نتیجه‌های حاصل از دیدگاه دنبالهٔ تابع‌ها، می‌تواند جالب باشد. این بیان امکان می‌دهد تا ارتباط بین مساله‌هایی‌را که تاکنون حل کرده‌ایم، با مسألهٔ کلی مربوط به تبدیل‌دو روند حدی به‌یکدیگر، پیدا کنیم، تبدیلی که در آنالیز ریاضی، نقشی فوق‌العاده مهم دارد. از طرف دیگر، این بیان، می‌تواند راه را برای تعمیم نتیجه‌گیری‌ها، باز کند.

به‌این ترتیب، دوباره، دنبالهٔ تابع‌های (۱) و رشتهٔ تابعی را مطرح می‌کنیم و فرض می‌کنیم، با رابطهٔ

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

و یا رابطه‌های هم‌ارز آن

$$u_1(x)=f_1(x), \quad u_n(x)=f_n(x)-f_{n-1}(x) \quad (n=2, 3, \dots)$$

به‌هم‌مربوط باشند. تابع‌حدی برای دنباله، همان‌مجموع‌رشتهٔ نظیر است. تقارب‌یکنواخت، تنها به‌طور هم‌زمان، می‌تواند برای دنباله و رشته با هم صورت پذیرد.

I. ابتدا، مسألهٔ مربوط به حد تابع حدی نامبرده را، بررسی می‌کنیم. فرض کنیم، همهٔ تابع‌های مورد نظر، در مجموعهٔ $\{x\}=\mathfrak{M}$، معین باشند؛ نقطهٔ تجمع مجموعه را a می‌گیریم. آن‌وقت، قضیهٔ ۴ شمارهٔ **۴۳۳** این‌طور بیان می‌شود:

قضیهٔ **۴۰**. اگر تابع‌های $f_n(x)$، دارای حدی باشند

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad (\text{در } \mathfrak{M}) \qquad (۲۸)$$

و

$$\lim_{x\to a} f_n(x)=C_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \qquad (۲۹)$$

ضمناً، در حالت اول، گرایش به‌حد، نسبت به x، به‌طور یکنواخت انجام پذیرد، آن‌وقت، دو حد متناهی وجود دارد

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} C_n$$

که با هم برابرند.

برابری

$$\lim_{n\to a} f(x)=\lim_{n\to\infty} C_n$$

را، با توجه به (۲۸) و (۲۹)، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

به‌این ترتیب، قضیهٔ مورد بررسی، برای تابع $f_n(x)$ از دو متغیر x و n، ثابت می‌شود؛ شرط وجود و برابری دو حد تکراری هم، مستقیماً به بررسی شمارهٔ **۱۶۸** مربوط می‌شود.

از خواننده می‌خواهیم، خود، دو قضیهٔ شمارهٔ **۴۳۱** را، به‌زبان دنباله‌ها، بیان کند.

II. حوزهٔ $\mathfrak{D}$ را، بازهٔ $[a, b]$ می‌گیریم و به‌بررسی مسالهٔ مربوط به انتگرال تابع حدی می‌پردازیم. اینك، قضیهٔ مشابه قضیهٔ ۶ [**۴۳۴**]:

قضیهٔ *۶. اگر دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$، شامل تابع‌های انتگرال‌پذیر در بازهٔ $[a, b]$ باشد، و به‌طور یکنواخت نسبت به x، در $[a, b]$، به‌سمت تابع حدی $f(x)$ متقارب شود، در آن‌صورت، تابع $f(x)$ هم، در $[a, b]$، انتگرال‌پذیر خواهد بود و ضمناً

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

تساوی اخیر را، می‌توان چنین نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}dx \qquad (۳۰)$$

به‌طوری‌که، به‌جای حد انتگرال، می‌توان مستقیماً به‌انتگرال حد تابع را در نظر گرفت در این حالت می‌گویند: عبور حدی به‌زیر علامت انتگرال مجاز است.

در برابری (۳۰)، علامت‌های حد و انتگرال جای خود را با هم عوض می‌کنند، چرا که انتگرال معین، خود در نتیجهٔ یك روش حدی به‌دست می‌آید، بنابراین، مساله‌ای که در این‌جا بررسی کردیم، با مسالهٔ شمارهٔ **۱۶۸** خویشاوند است.

III. بالاخره، به‌مسالهٔ مربوط به‌مشتق تابع حدی می‌پردازیم. قضیهٔ (۸) [**۴۳۵**] را به‌این‌صورت درمی‌آوریم:

قضیهٔ *۸. فرض کنیم، همهٔ تابع‌های $f_n(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، مشتق‌پذیر و دنبالهٔ مشتق‌های $\{f'_n(x)\}$، در تمامی بازه، به‌طور یکنواخت نسبت به x متقارب باشند. اگر بدانیم، دنبالهٔ تابع‌های $\{f_n(x)\}$، دست‌کم در یك نقطهٔ بازهٔ $[a, b]$ متقارب است، در آن‌صورت، می‌توان حکم کرد: ۱) این دنباله، در تمامی بازه متقارب است، حتی به‌طور یکنواخت و ۲) تابع حدی $f(x)$ مشتق‌پذیر است و ضمناً

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

اگر این برابری را به‌صورت گویاتری بنویسیم:

$$D\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}=\lim_{n\to\infty}\{Df_n(x)\}$$

آن‌وقت روشن‌می‌شود که صحبت برسر تغییر جای علامت‌های حد و مشتق است. ازآن‌جا که مشتق نیز یك حد است، این مساله، در واقع، مساله‌ای است دربارهٔ تعویض جای دو گذر حدی.

درخاتمه، به‌مطلب زیر هم توجه کنیم. اگر از دیدگاه رشته‌های نامتناهی نگاه کنیم، نمی‌توان پارامتر طبیعی n را، با مفهوم کلی‌تری عوض کرد. درحالی‌که، در صحبت از دنبالهٔ تابع‌ها، وضع به‌گونهٔ دیگری است. در این‌جا، تابع $f_n(x)$ را می‌توان با تابع دو متغیر $f(x, y)$ عوض کرد، که در آن، y می‌تواند در حوزهٔ دلخواه $Y=\{y\}$ و دارای نقطهٔ تجمع y_0 (متناهی یا نامتناهی) تغییر کند. تنظیم و اثبات قضیه‌ای که به‌این حالت کلی مربوط می‌شود، اشکالی پیش نمی‌آورد و ما، در فصل چهاردهم، به یکی از تعمیم‌ها، اشاره‌ای خواهیم داشت.

۴۳۷. پیوستگی مجموع رشتهٔ توانی. مهم‌ترین نمونهٔ کاربرد نظریهٔ مورد بحث ما، به‌آموزش ویژگی‌های رشته‌های توانی مربوط می‌شود. ما به‌رشته‌های توانی به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (۳۱)$$

اکتفا می‌کنیم، زیرا، همان‌طور که در **۴۰۳** دیدیم، رشته‌های کلی‌تر

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \qquad (۳۱^*)$$

مستقیماً و با تغییر ساده‌ای، به همان صورت (۳۱) در می‌آیند.

فرض کنیم، رشتهٔ (۳۱) دارای شعاع تقارب $R>0$ [۳۷۹] باشد. قبل از هر چیز می‌توان گفت:

۱°. به‌ازای هر عدد دلخواه و مثبت $r<R$، رشتهٔ (۳۱)، در بازهٔ بستهٔ $[-r, r]$، نسبت به x، به‌طور یکنواخت متقارب است.

در واقع، چون $r<R$، بنابراین، به‌ازای $x=r$، رشتهٔ (۳۱) متقارب‌مطلق می‌شود،

یعنی رشتهٔ مثبت

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n = |a_0| + |a_1| \cdot r + |a_2| \cdot r^2 + \cdots + |a_n| \cdot r^n + \cdots \qquad (۳۲)$$

متقارب است. به‌ازای $|x| \leqslant r$، جمله‌های رشتهٔ (۳۱)، از لحاظ قدر مطلق، از جمله‌های نظیر این رشته تجاوز نمی‌کنند و، در نتیجه، رشتهٔ (۳۲)، نقش رشتهٔ محدودکننده را بازی می‌کند و، با توجه به‌معیار ویرشتراس، رشتهٔ (۳۱)، برای مقدارهای مذکور x، متقارب یکنواخت می‌شود.

هر چند، عدد r را می‌توان به قدر دلخواه نزدیك به R گرفت، ولی با وجود این، از آن‌چه ثابت شد، نمی‌توان تقارب یکنواخت در بازهٔ $(-R, R)$ را نتیجه گرفت. در نمونهٔ تصاعد [۴۲۸، ۶)] دیده‌می‌شود که درست در دوانتهای بازه، ممکن‌است با نقطه‌های غیریکنواختی تقارب برخورد کنیم.

اکنون، به‌عنوان نتیجهٔ قضیهٔ ۱، به‌دست می‌آوریم:

۲°. مجموع $f(x)$ رشتهٔ‌توانی (۳۱)، برای همهٔ‌مقدارهای x بین $-R$ و $+R$، تابع پیوسته‌ای از x است.

$x = x_0$ را در درون بازهٔ تقارب به‌هر نحو اختیارکنیم، می‌توان عدد $r < R$ را چنان انتخاب کرد که داشته باشیم: $|x_0| < r$. با استفاده از قضیهٔ ۱ در بازهٔ $[-r, r]$ و با توجه به ۱°، پیوستگی تابع $f(x)$ دراین بازه، و درنتیجه برای $x = x_0$، ثابت‌می‌شود.

[توجه خواننده را به‌این نکته جلب می‌کنیم که، از به‌کارگرفتن قضیهٔ ۱ در بازهٔ $(-R, R)$، که در آن‌جا نمی‌توان تقارب یکنواخت را تضمین کرد، پرهیز کردیم.]

ازپیوستگی مجموع‌رشتهٔ‌توانی، می‌توان برای‌اثبات قضیهٔ مربوط به‌اتحادرشته‌های توانی (که شبیه قضیهٔ مربوط به‌چندجمله‌ای‌هاست) استفاده کرد.

۳°. اگر دورشتهٔ توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

در همسایگی نقطهٔ $x = 0$* دارای یك مجموع باشند، درآن‌صورت، این دو رشته‌متحدند،

---

*) در این‌جا، نه‌تنها همسایگی دو طرفهٔ $(-\delta, \delta)$ از نقطهٔ $x = 0$، بلکه همسایگی یك‌طرفهٔ به‌صورت $[0, \delta)$ یا $(-\delta, 0]$ هم در نظر است.

یعنی ضریب‌های نظیر آن‌ها، دو به‌دو برابرند:

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \dots,\ a_n=b_n,\ \dots$$

با گذاشتن $x=0$ در اتحاد

$$a_0+a_1x+\dots=b_0+b_1x+\dots$$

بلافاصله به‌برابری $a_0=b_0$ می‌رسیم. با حذف این جمله‌ها در دو طرف اتحاد و تقسیم دو طرف آن بر x (در این جا ناچاریم $x\neq 0$ به حساب آوریم)، اتحاد جدیدی به دست می‌آید:

$$a_1+a_2x+\dots=b_1+b_2x+\dots$$

این اتحاد هم، در همسایگی نقطهٔ $x=0$، به‌استثنای خود این نقطه، برقرار است. چون، حق نداریم $x=0$ بگذاریم، x را به‌سمت صفر میل می‌دهیم. درحد، با استفاده از پیوستگی، به برابری $a_1=b_1$ می‌رسیم. این جمله‌ها را کنار می‌گذاریم و دوباره، بعد از تقسیم دو طرف بر $x\neq 0$، x را به‌سمت صفر میل می‌دهیم، برابری $a_2=b_2$ به‌دست می‌آید و غیره.

این قضیهٔ ساده، که منحصربه‌فرد بودن بسط تابع را به‌رشتهٔ توانی ثابت می‌کند، کاربردهای زیادی دارد، مثلاً، به‌کمك این قضیه، فوراً معلوم می‌شود که بسط تابع‌های زوج (فرد)، به‌رشتهٔ توانی به‌صورت (۳۱)، می‌تواند تنها شامل توان‌های زوج (فرد) x باشد.

اکنون، مسالهٔ دقیق‌تری را، دربارهٔ رفتار رشته در نزدیکی یکی از دو انتهای $x=\pm R$ آن، وقتی که رشته در این بازه (که آن‌را متناهی می‌گیریم) متقارب باشد، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. می‌توانیم به‌انتهای سمت راست $x=R$ اکتفا کنیم؛ هرچه در این‌باره گفته‌شود، می‌توان با تبدیل سادهٔ x به $-x$، به‌حالت انتهای سمت‌چپ $x=-R$ انتقال داد.

پیش از همه، روشن است که

۴°. اگر رشتهٔ توانی (۳۱) در انتهای $x=R$ از بازهٔ تقارب خود، متباعد باشد، درآن‌صورت، تقارب رشته در بازهٔ $(R\ ,0]$ نمی‌تواند یکنواخت باشد.

در واقع، اگر فرض را بر تقارب یکنواخت بگیریم، با توجه به‌قضیهٔ ۳، می‌توان در رشته، به‌ازای $x\to R-0$، جمله به‌جمله به‌حد گذشت و از آن‌جا، تقارب رشته را از حدهای

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_n R^n + \cdots$$

برخلاف فرض، نتیجه گرفت.

حکم زیر هم، که به‌معنایی می‌توان عکس این قضیه به‌حساب آورد، درست است:

۵°. اگر رشتهٔ توانی (۳۱)، به‌ازای $x = R$ هم متقارب (ولو غیرمطلق) باشد، در آن‌صورت، تقارب رشته، در تمامی بازهٔ $[0, R]$، یکنواخت خواهد بود.

در واقع، اگر رشتهٔ (۳۱) را به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n \qquad 0 \leqslant x \leqslant R$$

بنویسیم، آن‌وقت، نتیجهٔ مطلوب مستقیماً و از معیار آبل حاصل می‌شود، زیرا رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ متقارب است و عامل $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ هم، دنباله‌ای کران‌دار، یکنواخت و یکنوا، تشکیل می‌دهد:

$$1 \geqslant \frac{x}{R} \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geqslant \cdots \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geqslant \cdots$$

این گزاره امکان می‌دهد تا قضیهٔ ۱ را در تمامی بازهٔ $[0, R]$ به‌کار ببریم. به‌این ترتیب، مکملی برای قضیهٔ ۲°، دربارهٔ پیوستگی مجموع رشتهٔ توانی در بازهٔ باز $(-R, R)$ به‌دست می‌آوریم (که متعلق به‌آبل است)*:

۶°. **قضیهٔ آبل.** اگر رشتهٔ توانی (۳۱)، در $x = R$ متقارب باشد، در آن‌صورت، مجموع آن هم، در این نقطه (و معلوم است از سمت چپ) پیوستگی را حفظ می‌کند، یعنی

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{0}^{\infty} a_n R^n$$

قضیهٔ آبل، کاربردهای مهمی دارد.

اگر بسط تابع $f(x)$ به‌رشتهٔ توانی را تنها در بازهٔ باز $(-R, R)$ داشته باشیم:

---

*) اثبات دیگری از این قضیه را (با فرض $R = 1$)، در شمارهٔ **۴۱۸** و در ارتباط با مسالهٔ منتظم‌بودن روش پواسون ـ آبل دربارهٔ جمع‌کردن رشته‌های متقارب، دیدیم.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-R<x<R)$$

ولی پیوستگی تابع و تقارب رشته در یکی از دو انتهای این بازه، و مثلاً برای $x=R$ ادامه یافته باشد، در این صورت، بسط برای این انتها هم درست باقی می‌ماند. و این، به‌سادگی و با گذر به‌حد به‌ازای $x \to R-0$ در این برابری، فهمیده می‌شود.

مثلاً، بسط

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots$$

تنها برای $-1<x\leq 1$ به‌دست می‌آید؛ ولی با اطلاع از این مطلب که رشتهٔ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots$$

متقارب است، نتیجه می‌گیریم که مجموع آن برابر است با $\ln 2$. به‌همین ترتیب، حکم شمارهٔ **۴۰۷** هم تایید می‌کند که رشتهٔ دو جمله‌ای

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\times 2}x^2+\dots$$

$$\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}x^n+\dots$$

به‌ازای $x=\pm 1$ هم، دارای مجموع $(1+x)^m$ است، تنها به شرطی که رشته متقارب باشد.

۴۳۸. انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری رشته‌های توانی. حال، قضیه‌های شماره‌های **۴۳۴** و **۴۳۵** را در مورد رشته‌های توانی به‌کار می‌بریم.

ویژگی‌های ۱° و ۵° را، که قبلاً ثابت کردیم، با قضیهٔ ۵ شمارهٔ **۴۳۴** مقایسه می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

۷°. رشتهٔ توانی (۳۱) را، در بازهٔ $[x, 0]$، که در آن‌جا $|x|<R$، همیشه می‌توان جمله به‌جمله انتگرال‌گیری کرد، به‌نحوی که

$$\int_0^x f(x)dx=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\dots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\dots \qquad (۳۳)$$

در این‌جا، مقدارهای x، می‌توانند بر یکی از دو انتهای بازهٔ تقارب هم، منطبق شوند،

به‌شرطی‌که، رشته در این انتها، متقارب باشد.

به‌سراغ مسالهٔ مربوط به‌مشتق‌گیری از رشتهٔ توانی می‌رویم.

۸°. رشتهٔ توانی (۳۱) را می‌توان، در درون بازهٔ تقارب آن، جمله به‌جمله مشتق‌گیری کرد، به‌نحوی‌که

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}=$$

$$=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \qquad (۳۴)$$

حکم اعتبار خود را برای انتهای بازهٔ تقارب‌هم حفظ می‌کند، تنها به‌شرطی‌که رشتهٔ‌مفروض در این انتها متقارب باشد.

x غیرمشخص را در درون بازهٔ تقارب رشتهٔ اول انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که $|x|<R$، عدد r' را بین $|x|$ و R در نظر می‌گیریم: $|x|<r'<R$. با توجه به‌تقارب رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r'^n=a_0+a_1r'+a_2r'^2+\cdots+a_nr'^n+\cdots$$

جملهٔ عمومی آن کران‌دار است:

$$|a_n|r'^n\leqslant L \quad (L=\text{const.};\ n=1, 2, 3, \ldots)$$

آن‌وقت، قدرمطلق جملهٔ nام رشتهٔ (۳۴) را، می‌توان این‌طور برآورد کرد:

$$n|a_n|\cdot|x|^{n-1}=n|a_n|\cdot r'^n\cdot\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1}\cdot\frac{1}{r'}\leqslant\frac{L}{r'}\cdot n\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1}$$

رشتهٔ

$$\frac{L}{r'}\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1}=\frac{L}{r'}\left\{1+2\left|\frac{x}{r'}\right|+\cdots+n\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1}+\cdots\right\}$$

متقارب می‌شود. این‌را، با توجه به $\left|\frac{x}{r'}\right|<1$، به‌سادگی و به‌کمك معیار دالامبر [۳۶۸]، می‌توان فهمید. در این‌حالت، رشتهٔ (۳۴) متقارب مطلق می‌شود و، در نتیجه،معلوم می‌شود که شعاع تقارب R' این رشته، کمتر از R نیست.

حالا اگر $r<R$ غیرمشخص را اختیار کنیم، درعین‌حال، خواهیم داشت: $r<R'$؛ بنابر ۱°، رشتهٔ (۳۴) در بازهٔ $[-r, r]$ متقارب یکنواخت می‌شود، به‌طوری که ـ بنابر

قضیهٔ شمارهٔ ۴۳۵ ــ مشتق‌گیری جمله به‌جمله رشتهٔ (۳۱)، در این بازه، قابل قبول است. چون $r<R$ غیرمشخص است، حکم اصلی قضیه، ثابت می‌شود.

وقتی که رشتهٔ (۳۴)، مثلاً برای $x=R$، متقارب باشد، این تقارب در بازهٔ $[0, R]$ به‌صورت یکنواخت درمی‌آید و قضیهٔ (۷) را در مورد تمامی این بازه می‌توان به‌کار برد ــ مشتق‌گیری جمله به‌جمله، به‌ازای $x=R$ هم، مجاز است.

یادداشت. به‌این نتیجه قانع شدیم که $R' \geqslant R$. ازطرف دیگر، جمله‌های رشتهٔ اصلی (۳۱)، از لحاظ قدرمطلق، از جمله‌های متناظر در رشتهٔ زیر تجاوز نمی‌کنند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots + na_n x^n + \cdots$$

که دارای همان شعاع تقارب R' است که رشتهٔ (۳۴). در نتیجه $R \geqslant R'$. به‌این ترتیب، بالاخره $R=R'$. شعاع تقارب رشتهٔ توانی (۳۱)، با شعاع تقارب رشتهٔ (۳۴) که از مشتق جمله به‌جملهٔ اولی حاصل می‌شود، برابر است. ضمناً، همین مطلب را، به‌کمک قضیهٔ کوشی ـ آدامار [۳۸۰] هم می‌توان ثابت کرد، اگر به‌یاد بیاوریم که به‌ازای $n \to \infty$ داریم $\sqrt[n]{n} \to 1$ [۳۲، ۱۰)].

چون، رشتهٔ (۳۱)، بامشتق‌گیری جمله به‌جمله، از رشتهٔ (۳۳) حاصل می‌شود، بنابراین، این دو رشته هم دارای یك شعاع تقارب هستند.

قضیهٔ ۸°. امکان مشتق‌گیری متوالی را از رشتهٔ توانی، به‌وجود می‌آورد. به‌این ترتیب، اگر $f(x)$ را معرف رشتهٔ توانی (۳۱) بگیریم، همه‌جا در درون بازهٔ تعریف، خواهیم داشت:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

$$f'(x) = 1 \times a_1 + 2 \times a_2 x + 3 \times a_3 x^2 + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1} + \cdots,$$

$$f''(x) = 1 \times 2a_2 + 2 \times 3a_3 x + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-2} + \cdots,$$

$$f'''(x) = 1 \times 2 \times 3a_3 + \cdots + (n-2)(n-1)n \cdot a_n x^{n-3} + \cdots,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \cdot na_n + \cdots$$

. . . . . .

. . . . . .

اگر درهمهٔ این برابری‌ها، $x=0$ قرار دهیم، در آن صورت، به‌عبارت‌ضریب‌های رشتهٔ توانی ــ که آن‌ها را می‌شناسیم ــ می‌رسیم:

$$a_0=f(0);\ a_1=f'(0);\ a_2=\frac{f''(0)}{2!};\ a_3=\frac{f'''(0)}{3!};\ \ldots$$

$$\ldots;\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!};\ \ldots$$

[با ۴۵۳، (۷) مقایسه کنید]. اگر صحبت بر سر رشتهٔ کلی(*۳۱) باشد، کافی است به‌جای $x=0$ بگذاریم $x=x_0$. به‌این ترتیب:

۹°. تابعی که به‌وسیلهٔ رشتهٔ توانی در بازهٔ تقارب خود داده شده باشد، در درون این بازه، دارای مشتق‌های همهٔ مرتبه‌ها می‌باشد و خود رشته، نسبت به‌این تابع، چیزی جز رشتهٔ تیلور نیست.

این گزارهٔ مهم، می‌تواند برمسألهٔ مربوط به‌بسط تابع‌ها به‌رشته‌های توانی ــ که در فصل قبل آموختیم ــ روشنی بیندازد. دیدیم که اگر تابع، به‌طور کلی، به‌رشتهٔ توانی بسط داده شود، در آن صورت، این رشتهٔ توانی، الزاماً همان رشتهٔ تیلور خواهد بود؛ به‌همین مناسبت، ما هم امکان‌هایی را مورد مطالعه قراردادیم که تابع می‌تواند به‌صورت رشتهٔ تیلور خود نمایش داده شود. توجه کنیم: تابعی که برحسب توان‌های $x-x_0$ به‌رشتهٔ تیلور بسط داده شود، تابع تحلیلی در نقطهٔ x_0 نامیده می‌شود.

این نظریه را، درمورد رشته‌های توانی چندگانه هم، می‌توان گسترش داد. به‌عنوان مثال، رشتهٔ با دو متغیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}(x-x_0)^i(y-y_0)^k$$

از این رشته هم می‌توان، در درون بازهٔ تقارب [۳۹۶]، جمله به‌جمله و نسبت به‌هر کدام ازمتغیرها، به‌تعداددفعه‌های دلخواه، مشتق گرفت. ازاین‌جا، مثل سابق، عبارت‌های ضریب‌ها را می‌توان به‌دست آورد:

$$a_{00}=f(x_0,y_0);\ a_{10}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x};\ a_{01}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y};$$

$$a_{20}=\frac{1}{2!}\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2};\ \ldots$$

و به‌طور کلی

$$a_{ik}=\frac{1}{i!k!}\cdot\frac{\partial^{i+k}f(x_0,y_0)}{\partial x^i\partial y^k}$$

به‌این‌ترتیب، بسط تابع $f(x,y)$ (اگراین بسط ممکن باشد)، الزاماً به صورت زیراست:

$$f(x,y)=\sum_{i,k=0}^{\infty}\frac{1}{i!k!}\cdot\frac{\partial^{i+k}f(x_0,y_0)}{\partial x^i\partial y^k}(x-x_0)^i(y-y_0)^k$$

که به‌رشتهٔ تیلور موسوم است؛ وطبیعی است که با دستور تیلور ــ که دربارهٔ آن، در **۱۹۵** صحبت کرده‌ایم ــ بستگی پیدا می‌کند. اگر تابع $f(x,y)$ را بتوان به‌این‌ترتیب بسط‌داد، گویند که در نقطهٔ (x_0,y_0)، یك تابع تحلیلی است.

§۳. کاربردها

۴۳۹. مثال‌هایی دربارهٔ پیوستگی مجموع رشته‌ها و دربارهٔ مشتق جمله به‌جمله به‌حد.

۱) دربارهٔ پیوستگی مجموع رشته زیر، تحقیق کنید:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^p+x^2\cdot n^q}$$

که درآن $p,q\geqslant 0$ ویکی ازآن‌ها بزرگتر از واحد است (تا تقارب رشته را، برای همهٔ مقدارهای x، تأمین کند). کافی است تنها به‌حالت x غیرمنفی، بپردازیم.

اگر $q>0$، آن وقت $x\leqslant x_0$ ($x_0>0$، عددی دلخواه)، رشتهٔ ما به‌وسیلهٔ رشتهٔ متقارب

$$x_0\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

محدود می‌شود و، بنابراین، بنابرمعیار ویرشتراس، متقارب یکنواخت ومجموع آن، در فاصلهٔ $[0,x_0]$ پیوسته است. با توجه به‌غیر مشخص بودن x_0، این حکم، به‌تمامی بازهٔ $[0,+\infty)$ سرایت می‌کند.

اگرهم $p\leqslant 1$، ولی $q>1$، درآن‌صورت، با نوشتن رشته‌برای $x>0$ به‌صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n^q\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2\cdot n^p}$$

پیوستگی مجموع آن را برای همهٔ xها (از روی قبلی) نتیجه می‌گیریم. بنابراین، تنها باید مسأله را دربارهٔ نقطهٔ $x=0$ حل کرد.

بـا روش‌های محاسبهٔ دیفرانسیلی، می‌توان ثابت کرد کـه جملهٔ nام رشته، به‌ازای $x=n^{\frac{p-q}{2}}$، به‌بزرگترین مقدار خود می‌رسد؛ واین مقدار حداکثر، برابراست با

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{p+q}{2}}}$$

اگر $p+q>2$، آن‌وقت رشتهٔ ما، به‌وسیلهٔ رشتهٔ متقارب

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p+q}{2}}}$$

محدود می‌شود، که پیوستگی تابع $f(x)$ را برای همهٔ xهـا، منجمله نقطهٔ $x=0$، تأمین می‌کند.

مسألهٔ مربوط به‌پیوستگی تابع $f(x)$، به‌ازای $x=0$، درحالت $p<1$، $q>1$ و $p+q\leqslant 2$، باز باقی می‌ماند. بعداً [۴۹۱، ۱۳)] خواهیم دید که تابع $f(x)$، با توجه به‌این شرط‌ها، درنقطهٔ $x=0$، دارای ناپیوستگی است.

۲) به‌بررسی رشتهٔ دیریکله [۳۸۵، ۳)]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

می‌پردازیم، که در آن: $\{a_n\}$، دنباله‌ای از عددهای حقیقی است. فرض کنیم که، این تابع «همه‌جامتباعد» نباشد، به‌نحوی که برای آن، طول محدود تقارب $\lambda<+\infty$ وجودداشته باشد. عدد اختیاری $x_0>\lambda$ هرچه باشد، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$$

متقارب است. ازاین‌جا نتیجه می‌شود که رشتهٔ مفروض، برای همهٔ $x\geqslant x_0$ [شبیه قضیهٔ ۱°، ۴۳۷] متقارب یکنواخت است. این حکم را می‌توان از معیار آبل نتیجه گرفت، به‌شرطی که رشته را، به‌این صورت بنویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$$

و توجه کنیم که عامل‌های $\frac{۱}{n^{x-x_۰}}$، با صعود n، نزول می‌کنند و همه، بـا واحد، کران‌دار می‌شوند. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱°، برای $x>x_۰$، وبنابراین (با توجه به‌دلخواه بودن $x_۰$) برای همهٔ مقدارهای $x>\lambda$، (شبیه قضیهٔ ۲°)، پیوسته می‌شود.

اگر λ متناهی، ورشتهٔ

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$$

متقارب باشد، به‌همان‌ترتیب، به‌تقارب یکنواخت رشتهٔ موردنظر برای $x\geqslant\lambda$ [بـا ۵° مقایسه کنید] و پیوستگی مجموع آن، به ازای $x=\lambda$ [با ۶° مقایسه کنید] قانع می‌شویم.

۳) در ۳۹۰، ۶)، با تعریف تابع $E(x)$ به‌وسیلهٔ برابری

$$E(x)=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

قانع شدیم که دررابطهٔ زیرصدق می‌کند:

$$E(x+y)=E(x).E(y) \qquad (۱)$$

اکنون، طبق قضیهٔ ۲°، ۴۳۷، تابـع $E(x)$ در سراسر بازهٔ از $-\infty$ تا $+\infty$، پیوسته‌می‌شود. بنابرآن‌چه در ۷۵، ۱° ثابت شد، جواب پیوستهٔ معادلهٔ (۷)، الزاماً به‌صورت $E(x)=a^x$ است. بالاخره، پایه، به‌روشنی، با برابری

$$a=E(۱)=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n!}=e$$

معین می‌شود. به‌این ترتیب، سرانجام $E(x)=e^x$ [با ۴۰۴، (۱۱) مقایسه کنید].

۴) شرح تازه‌ای از رشتهٔ دوجمله‌ای [۴۰۷، (۲۲)] می‌دهیم، می‌خواهیم مجموع رشتهٔ

$$۱+mx+\frac{m(m-۱)}{۱\times۲}x^۲+\frac{m(m-۱)(m-۲)}{۱\times۲\times۳}x^۳+\cdots$$

$$\cdots+\frac{m(m-۱)\cdots(m-n+۱)}{۱\times۲\times\cdots\times n}x^n+\cdots$$

را تعیین کنیم، که برای $|x|<۱$، به‌ازای m غیر مشخص، متقارب مطلـق است. مجموع این رشته‌را، به‌عنوان تابعی از m (برای x تثبیت‌شده؛ $|x|<۱$)؛ با $\varphi(m)$ نشان‌می‌دهیم.

از جبرمی‌دانیم که، اگر m عدد طبیعی غیرمشخصی باشد (که دراین صورت، رشته، در جملهٔ $(m+1)$ام قطع می‌شود)، خواهیم داشت: $\varphi(m)=(1+x)^m$؛ ثابت می‌کنیم که همین نتیجه، برای همهٔ mها درست است.

با اختیار k دلخواه، رشتهٔ مشابه

$$1+kx+\frac{k(k-1)}{1\times 2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\times 2\times 3}x^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{1\times 2\times\cdots\times n}x^n+\cdots$$

را، با مجموع $\varphi(k)$، درنظر می‌گیریم و دورشته را، با توجه به‌قاعدهٔ کوشی، درهم‌ضرب می‌کنیم. چندجملهٔ اول این حاصل‌ضرب، بدون هیچ دشواری، نوشته می‌شود:

$$\varphi(m).\varphi(k)=1+(m+k)x+$$

$$+\left[\frac{m(m-1)}{2}+mk+\frac{k(k-1)}{2}\right]x^2+\cdots=$$

$$=1+(m+k)x+\frac{(m+k)(m+k-1)}{1\times 2}x^2+\cdots$$

روشن است که ضریب $\frac{x^n}{n!}$، عبارت است از یک‌چندجمله‌ای صحیح، نسبت به m و k. این ضریب، چه صورتی دارد؟ اگر m و k، عددهای طبیعی دلخواه بزرگتر از n باشند، با ملاحظه‌های مقدماتی، روشن می‌شود که ضریب مذکور، چنین است.

$$(m+k)(m+k-1)\cdots(m+k-n+1)$$

بنابراین (همان‌طور که از قضیهٔ جبری مربوط به‌اتحاد چندجمله‌ای‌های صحیح با دومتغیر نتیجه می‌شود)، برای m و k دلخواه هم، به‌همین صورت خواهد بود. به‌این‌ترتیب، تابع مطلوب $\varphi(m)$، دررابطهٔ تابعی زیرصدق می‌کند:

$$\varphi(m).\varphi(k)=\varphi(m+k)$$

اکنون، پیوستگی تابع $\varphi(m)$ راثابت می‌کنیم. این پیوستگی، از تقارب یکنواخت رشتهٔ دوجمله‌ای برای همهٔ مقدارهای m که ازلحاظ قدرمطلق ازعدد انتخاب شدهٔ دلخواه $m_0>0$ تجاوز نکند، نتیجه می‌شود. برای این مقدارها، رشتهٔ دوجمله‌ای، به وسیلهٔ رشتهٔ متقارب

$$۱+m_۰|x|+\frac{m_۰(m_۰+۱)}{۱\times۲}|x|^۲+\frac{m_۰(m_۰+۱)(m_۰+۲)}{۱\times۲\times۳}|x|^۳+\cdots$$

محدود می‌شود. درچنین حالتی، همان‌طور که می‌دانیم [۷۵، ۱°]، باید داشته باشیم:

$$\varphi(m)=a^m$$

وچون $a=\varphi(۱)=۱+x$، بنابراین

$$\varphi(m)=(۱+x)^m$$

۵) می‌دانیم [۴۰۵، (۱۷)] که‌رشتهٔ لگاریتمی‌رامی‌توان ازرشتهٔ دوجمله‌ای [۴۰۷، (۲۲)] و به‌کمك رابطهٔ زیر به‌دست آورد [۷۷، ۵(b)]:

$$\ln a=\lim_{k\to\infty} k(\sqrt[k]{a}-۱)\quad(k=۱,۲,۳,\ldots)$$

$a=۱+x$ می‌گیریم (که درآن $|x|<۱$) و به‌جای $(۱+x)^{\frac{۱}{k}}$، بسط آن‌راقرار می‌دهیم:

$$(۱+x)^{\frac{۱}{k}}=۱+\frac{۱}{k}x+\frac{\frac{۱}{k}\left(\frac{۱}{k}-۱\right)}{۱\times۲}x^۲+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\frac{۱}{k}\left(\frac{۱}{k}-۱\right)\cdots\left(\frac{۱}{k}-n+۱\right)}{۱\times۲\times\cdots\times n}x^n+\cdots$$

آن‌وقت $\ln(۱+x)$، به‌عنوان حد عبارت زیر، وقتی $k\to\infty$، به‌دست می‌آید:

$$k\left[(۱+x)^{\frac{۱}{k}}-۱\right]=x-\frac{x^۲}{۲}\left(۱-\frac{۱}{k}\right)+\frac{x^۳}{۳}\left(۱-\frac{۱}{k}\right)\left(۱-\frac{۱}{۲k}\right)-\cdots$$

$$\cdots+(-۱)^{n-۱}\frac{x^n}{n}\left(۱-\frac{۱}{k}\right)\left(۱-\frac{۱}{۲k}\right)\cdots\left(۱-\frac{۱}{(n-۱)k}\right)+\cdots \quad (۲)$$

اگر x را ثابت بگیریم، جمله‌های این رشته، به‌عنوان متغیر، شامل پارامترطبیعی k هستند. رشتهٔ (۲)، درتمامی حوزهٔ تغییر خود، نسبت به k، متقارب یکنواخت است؛ واین (بنابرمعیار ویرشتراس)، از آن‌جا نتیجه می‌شود که‌ـه، این رشته، به‌وسیلهٔ رشتهٔ زیرمحدود می‌شود:

$$|x|+\frac{|x|^2}{2}+\frac{|x|^3}{3}+\cdots+\frac{|x|^n}{n}+\cdots\ (x=\text{consts.};|x|<1)$$

که شامل k نیست، در چنین حالتی، با توجه به‌قضیهٔ ۴*، دررشتهٔ (۲)، می‌توان به‌ازای $k\to\infty$، جمله به‌جمله به‌سمت حد رفت‌که به‌رشتهٔ لگاریتمی منجرمی‌شود.

۶) مثال جالب دیگری ازاین نوع، بیرون آوردن رشتهٔ نمائی [۴۰۴، (۱۱)]، از رابطهٔ زیراست:

$$e^x=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k\quad(k=1,2,3,\ldots)$$

اگر دوجمله‌ای را از روی دستور نیوتون بسط دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k=1+k.\frac{x}{k}+\frac{k(k-1)}{1\times2}\left(\frac{x}{k}\right)^2+\cdots+$$

$$+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{1\times2\times\cdots\times n}\left(\frac{x}{k}\right)^n+\cdots=1+$$

$$+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)+\cdots\quad(3)$$

درعمل، به‌ازای هرمقدار مشخص k، تعداد همهٔ جمله‌ها، متناهی (و برابر $k+1$) خواهد بود، ولی می‌توانیم آن را یك «رشتهٔ نامتناهی» به‌حساب آوریم، کـه بقیهٔ جمله‌های آن برابر صفراست. این «رشته»، به‌ازای همهٔ xها، متقارب یکنواخت می‌شود، زیـرا روشن است‌که رشتهٔ متقارب

$$1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\cdots+\frac{|x|^n}{n!}+\cdots\ (x=\text{const.})$$

آن را محـدود می‌کند. دراین حالت، بنابرقضیهٔ ۴، می‌تـوان در «رشتهٔ» (۳)، به‌ازای $k\to\infty$، جمله به‌جمله به‌سمت حد رفت. برای $k<n$، جملهٔ $(n+1)$ام این رشته‌برابر صفر و، برای همهٔ $k\geqslant n$، به‌صورت زیر است:

$$\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)$$

---

*) به‌یاد بیاوریم‌که حوزهٔ $\mathfrak{D}$ از متغیر x، که درقضیهٔ ۴ دربارهٔ آن صحبت شده است، می‌تواند دلخواه باشد؛ و درحالت خاص، می‌توان این حوزه را، به‌یك رشتهٔ طبیعی منجر کرد (بـا درنظرگرفتن $a=+\infty$).

بنابراین، حد آن برای $k \to \infty$، برابر $\frac{x^n}{n!}$ می‌شود. به‌این ترتیب، دوباره به بسط تابع نمائی e^x می‌رسیم.

۷) با آغاز از دستور مواور [۴۰۸]، این رابطه را داشتیم:

$$\sin mz = m\cos^{m-1}z.\sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}\cos^{m-3}z.\sin^3 z + \dots$$

نشان می‌دهیم که، چگونه می‌توان از این‌جا، بسط $\sin x$ را به‌رشتهٔ توانی به‌دست آورد.

$z = \frac{x}{m}$ می‌گیریم و $\cos^m\frac{x}{m}$ را به‌فاکتور می‌گذاریم؛ به‌این رابطه می‌رسیم:

$$\sin x = \cos^m\frac{x}{m}\left\{m\,tg\frac{x}{m} - \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{\left(m\,tg\frac{x}{m}\right)^3}{3!} + \dots\right\}$$

m را به‌سمت ∞ میل می‌دهیم و، با ثابت به‌حساب آوردن x، حد سمت راست را پیدا می‌کنیم.

چون $\cos^m\frac{x}{m} \to 1$ [مثلاً ۷۹، ۴) به‌ازای $\lambda = 0$ را ببینید]، و $m\,tg\frac{x}{m} \to x$، درحد، همان بسط مطلوب به‌دست می‌آید [۴۰۴ (۱۲)]:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

این می‌ماند که دربارهٔ عبورحدی جمله به‌جمله در داخل آکولاد بحث کنیم، که در آن، تعداد جمله‌ها، به ازای هر m متناهی است، ولی همراه با m، به‌طور نامتناهی، صعود می‌کند [۶] را ببینید].

x انتخابی را، بین $-\frac{1}{2}m_0\pi$ و $\frac{1}{2}m_0\pi$ درنظر می‌گیریم؛ $m > m_0$ به حساب می‌آوریم. به‌سادگی معلوم می‌شود که، دراین صورت، عبارت $m\,tg\frac{x}{m}$، از لحاظ قدرمطلق، با صعود m، نزول می‌کند و درنتیجه کران‌دار است

$$\left|m\,tg\frac{x}{m}\right| \leqslant L = m_0\,tg\frac{|x_0|}{m} \quad (m > m_0)$$

درچنین حالتی، بسط داخل آکولاد، بوسیلهٔ رشتهٔ متقارب زیر، محدود می‌شود:

$$L+\frac{L^{۳}}{۳!}+\cdots$$

ادامهٔ بحث، مثل مثال قبل، انجام می‌شود.

بسط $\cos x$ را هم، به‌رشتهٔ توانی، می‌توان بطرز مشابهی بدست آورد.

یادداشت: مثال‌های ۵)، ۶) و ۷) را می‌توان در «مقدمه‌ای بر آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها» (۱۷۴۸) تالیف اولر، در شرح دقیق نتیجه‌گیری‌های بسط تابع‌های مقدماتی، بدست آورد.

۸) ثابت کنید:

$$\lim_{x\to ۱-۰}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n}\cdot\frac{x^n}{۱+x^n}=\frac{۱}{۲}\ln ۲ \qquad (a)$$

$$\lim_{x\to ۱-۰}(۱-x)\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{x^n}{۱-x^{۲n}}=\frac{۱}{۲}\ln ۲ \qquad (b)$$

(a). $۰<x<۱$ می‌گیریم. چون رشتهٔ $\sum_{۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ متقارب است و ضریب $\frac{x^n}{۱+x^n}$، که از بالا با عدد ۱ کران‌دار است، باصعود n نزول می‌کند، پس می‌توان ازمعیار آبل استفاده کرد، به نحوی که رشتهٔ (a)، بازای همه مقدارهای x در $(۱\ ،\ ۰)$، متقارب یکنواخت می‌شود. با گذر جمله بجمله به‌حد، بازای $x\to ۱-۰$ (قضیهٔ ۴)، نتیجهٔ مطلوب بدست می‌آید.

(b) دراین‌جا هم فرض می‌کنیم: $۰<x<۱$. داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{(۱-x)x^n}{۱-x^{۲n}}=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{x^n}{۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{۲n-۱}}$$

این‌بار، رشتهٔ $\sum_{۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}$ متقارب نمی‌شود، ولی مجموع‌های جزئی آن، کران‌دار هستند. سپس، ضریب $\frac{x^n}{۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{۲n-۱}}$، نه تنها با صعود n بطور یکنوا (مونوتون) نزول می‌کند، بلکه، برای x در $(۱\ ،\ ۰)$، بطور یکنواخت بسمت صفرمیل می‌کند، زیرا

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}<\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}}<\frac{x^n}{nx^n}=\frac{1}{n}$$

در این حالت، معیار دیریکله را به‌کار می‌بریم؛ رشته به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود، سپس جمله به‌جمله، به‌ازای $0 \leftarrow x-1$، به‌سمت حد عبور می‌کنیم وغیره.

۹) تا این‌جا، هروقت که از رشتهٔ توانی صحبت کرده‌ایم، همیشه جمله‌های آن را به‌ترتیب صعودی نماها درنظر گرفته‌ایم. درست است که این مطلب، در درون بازهٔ تقارب اهمیتی ندارد، چراکه رشته، متقارب مطلق است، ولی مثلاً قضیهٔ آبل، بدون توجه به‌این شرط، نادرست از آب درمی‌آید.

این موضوع را، دربارهٔ رشتهٔ

$$x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^8}{8}+\cdots$$

که از جابه‌جاکردن جمله‌های رشتهٔ لگاریتمی [۳۸۸. مثال ۱) را ببینید] به‌دست‌آمده است، تحقیق کنید.

۱۰) قضیهٔ آبل [۶°] را، برای اثبات قضیهٔ اودربارهٔ ضرب رشته‌ها [۳۹۲]، به‌کار می‌بریم. دورشتهٔ متقارب

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (A)$$

و

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n \qquad (B)$$

را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم که حاصل‌ضرب آن‌ها (کوشی)

$$C=\sum_{n=1}^{\infty}c_n \qquad (C)$$

که درآن $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$ نیزمتقارب باشد. باید ثابت کرد که، در این صورت:

$$A\cdot B=C$$

قبل ازهمه، از متقارب بودن رشتهٔ (A)، با توجه به‌پیش قضیهٔ شمارهٔ ۳۷۹، نتیجه می‌گیریم که رشتهٔ

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n \qquad (A^*)$$

برای $|x|<1$، متقارب مطلق‌است؛ به‌نحوی‌که شعاع تقارب R آن، بدون تردید، بزرگتر یا مساوی واحد است. به‌این ترتیب، در هرحالت، رابطهٔ

$$\lim_{x\to 1-0} A(x)=A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

به‌ازای $R=1$، بنابر قضیهٔ ۶° آبل و به‌ازای $R>1$، بنابرقضیهٔ ۲° [۴۳۷]، برقرار است. اگر به‌طریق مشابهی، رشته‌های (به‌ازای $|x|<1$)

$$B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n \qquad (B^*)$$

و

$$C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n \qquad (C^*)$$

را بررسی کنیم، دقیقاً به‌همان نتیجه‌هایی می‌رسیم که درمورد رشتهٔ (A^*) به‌دست‌آوردیم.

اکنون، با به‌کاربردن قضیهٔ کوشی [۳۸۹] دربارهٔ رشته‌های متقارب مطلق (A^*) و (B^*) خواهیم داشت:

$$A(x)\cdot B(x)=C(x)$$

که اگردرآن، به‌ازای $x\to 1-0$، به‌سمت حد برویم، ما را به‌نتیجهٔ مطلوب‌می‌رساند:

$$A\cdot B=C$$

۴۴۰. مثال‌های انتگرال‌گیری جمله به جملهٔ رشته‌ها. ۱) جمع کردن رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ را می‌توان به‌این‌ترتیب به‌دست آورد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\,dx=\lim_{x\to 1-0}\int_0^x\frac{dx}{1+x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\left\{\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right\}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ابتدا ازقضیهٔ آبل و، سپس، ازانتگرال‌گیری جمله به‌جملهٔ رشته‌های توانی[۴۳۷، ۶°؛ ۴۳۸، ۷°] استفاده‌کردیم.

۲) با انتگرال‌گیری جمله به‌جمله در رشته‌های

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\ldots,$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}+\ldots$$

در بازهٔ $[x\ ,0]$، که در آن $|x|<1$، بلافاصله، بسط‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc}tg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

که در ۴۰۵ [(۱۷) را ببینید] و ۴۰۴ [(۱۵) را ببینید]، ازراه پیچیده‌تری به‌دست‌آمده بودند. درستی بسط اول به‌ازای $x=1$ وبسط دوم به‌ازای $x=\pm1$، به‌طور تکمیلی و باکمك قضیهٔ آبل [۴۳۷، ۶°]، ثابت می‌شود.

۳) اگر به‌یاد آوریم که $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، یعنی مشتق $\operatorname{arc}\sin x$، به‌ترتیب زیر بسط داده می‌شود [۴۰۷ (۲۴)]:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\quad(-1<x<1)$$

درآن صورت، با انتگرال‌گیری جمله به‌جملهٔ این رشته، به‌آسانی، بسط آرك سینوس(که برای ما تازه است) به‌دست می‌آید:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc}\sin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(-1<x<1)$$

از آن‌جاکه این رشته به‌ازای $x=\pm 1$ هم متقارب است [۳۷۰، ۵)، (a)]*، پس بنابر قضیهٔ آبل، این بسط، به‌ازای این مقدارها هم درست است و درحالت خاص، به‌ازای $x=1$، این بسط را، برای عدد π به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

به‌طریق مشابهی، با بسط مشتق

$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

وانتگرال‌گیری جمله به‌جملهٔ آن، بسط زیر به‌دست می‌آید:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

که همان تابع $\operatorname{Argsh} x$، یعنی تابع معکوس $\operatorname{sh} x$ [۴۹، ۴)؛ ۳۳۹، یادداشت] می‌باشد.

۴) به‌کمك انتگرال‌گیری جمله‌به‌جملهٔ رشته‌ها، بسط نامتناهی به‌رشتهٔ توانی، برای انتگرال‌هائی به‌دست می‌آید، که به صورت متناهی، برحسب تابع‌های مقدماتی [۲۷۲ را ببینید] قابل بیان نیستند. ازاین بسط‌ها، می‌توان برای محاسبه‌های تقریبی استفاده کرد.

مثلاً، با شروع از بسط معلوم

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots$$

[۴۰۴، (۱۱) را ببینید]. نتیجه می‌گیریم:

---

*) ضمناً، حالا می‌توانیم به‌طریق ساده‌تری، تقارب رشتهٔ $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ را ثابت کنیم. برای هرمقدار m داریم:

$$x+\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}<\operatorname{arc'sin} x<\frac{\pi}{2}$$

که باگذر به‌حد، به‌ازای $x\longrightarrow 1$، نتیجه می‌گیریم:

$$1+\sum_{n=1}^{m}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\leqslant\frac{\pi}{2}$$

که از آن‌جا [۳۶۵]، به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

این مسأله را مطرح می‌کنیم: با تقریب ۰/۰۰۰۱، مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$W = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

با توجه به‌حد بالای انتگرال (که برابر واحد است)، برای W، یك رشتهٔ عددی متناوب، با جمله‌هایی که از لحاظ قدرمطلق نزولی‌اند، به‌دست می‌آید:

$$W = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \cdots$$

چون جملهٔ هشتم، به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای، به مرز داده شده نزدیك است، فقط هفت جملهٔ اول را نگـه‌می‌داریم. تصحیح (منفی) نظیررا، که Δ می‌نامیم، می‌تـوان به سادگی برآورد کرد

$$|\Delta| < \frac{1}{75600} < \frac{1/5}{10^5}$$

بقیهٔ جمله‌ها را تا پنج رقم بعد ازممیز، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{3} = 0/33333\ (+) \qquad 1 + \frac{1}{10} = 1/10000$$

$$\frac{1}{42} = 0/02381\ (-) \qquad \frac{1}{216} = 0/00463\ (-)$$

$$\frac{1}{1320} = 0/00076\ (-) \qquad \frac{1}{9360} = 0/00011\ (-)$$

		$1/10474-$
	$0/35790$	$0/35790$
$0/74684$	$0/35790$	$1/10474$

که اگر همهٔ تصحیح‌ها را به‌حساب آوریم، خواهیم داشت:

$$0/74681 < W < 0/74685;\quad W = 0/7468\ldots$$

وهرچهاررقم، مطمئن هستند [با ۳۲۸، ۵) مقایسه کنید].

۵) به‌طرز مشابهی، چون داریم [با ۴۰۴، (۱۲) مقایسه کنید]:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots$$

بنابراین

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx=x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}+\cdots$$

به‌کمك این بسط، می‌خواهیم انتگرال زیررا بادقت ۰/۰۰۱ تقریب، محاسبه کنیم:

$$\mu=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

با فرض $x=\pi$ داریم:

$$I_2=\pi-\frac{1}{18}\pi^3+\frac{1}{600}\pi^5-\frac{1}{35280}\pi^7+$$

$$+\frac{1}{3265920}\pi^9-\frac{1}{439084800}\pi^{11}+\cdots$$

یعنی، بازهم رشته‌ای متناوب، با جمله‌های از لحاظ قدرمطلق نزولی.

چون جملهٔ ششم، از ۰/۰۰۰۷ کوچکتر است، به پنج جملهٔ اول اکتفا می‌کنیم. محاسبه‌ها را تا چهاررقم بعد از ممیز انجام می‌دهیم:

$$\pi=3/1416(-)$$

$$\frac{1}{18}\pi^3=1/7226(-) \qquad \frac{1}{600}\pi^5=0/5100(+)$$

$$\frac{1}{35280}\pi^7=0/0856(+) \qquad \frac{1}{3265920}\pi^9=0/0091(+)$$

۳/۱۴۱۶−		
۱/۷۲۲۶−		
۱/۸۰۸۲	۱/۸۰۸۲	
	۰/۵۱۰۰+	
۱/۸۵۲۵	۱/۶۹۸۲	
	۰/۰۸۵۶+	
۱/۷۹۲۶	۱/۷۹۲۶	
	۰/۰۰۹۱+	
۱/۸۰۱۷	۱/۸۰۱۷	۳/۶۶۰۷

که با در نظر گرفتن تصحیح‌ها، نتیجه می‌گیریم:

$$1/8517<\mu<1/8527;\ \mu=1/8522\pm0/001$$

۶) می‌خواهیم انتگرال‌های زیررا، به‌صورت رشته، درآوریم.

$$\text{(a)}\ \int_0^1 \frac{\operatorname{arc}\,tg\,x}{x}\,dx,\quad \text{(b)}\ \int_0^1 x^{-x}\,dx$$

(a) با توجه به بسط آرك تانژانت، داریم:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4-\frac{1}{7}x^6+\dots\right)dx =$$

$$= 1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\dots$$

چون رشتهٔ واقع در زیرعلامت انتگرال، به‌ازای $x=1$، متقارب است، انتگرال‌گیری جمله به‌جمله، مورد قبول است [۴۳۸، ۷°].

قبلا، دیده‌ایم [۳۲۸، ۶)] که مقدار این انتگرال

$$G = 0/915965\dots$$

به‌عنوان «ثابت کاتالان» معلوم است. اکنون می‌بینیم که

$$G=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$$

(b) عبارت زیرانتگرال را به‌صورت $e^{-x\ln x}$ می‌نویسیم و آن را به‌صورت رشتهٔ نمائی بسط می‌دهیم:

$$x^{-x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n\ln^n x^*}{n!}$$

که برای $0<x\leqslant 1$، متقارب یکنواخت می‌شود، زیرا ماکزیمم تابع $|x\ln x|$ (که به‌سادگی با روش‌های محاسبهٔ دیفرانسیلی ثابت می‌شود) برابر است با $\frac{1}{3}$، به‌نحوی که رشتهٔ مفروض، با رشتهٔ زیرمحدود می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n}{n!}$$

به‌این‌ترتیب، می‌توان جمله به‌جمله انتگرال گرفت. چون [۳۱۲، ۴)]

$$\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

---

*) به ازای $x=0$، جمله‌های رشته را با شروع از $n=1$، با مقدارهای حدی، یعنی صفرها، عوض می‌کنیم.

بنابراین، سرانجام

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^m}$$

۷) این بسط را قبلاً داشتیم [۴۱۴، (۸)]

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{x}{1+x^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^p \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

در این‌جا، با گذاشتن $x=\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ و با به‌حساب آوردن آن که

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\operatorname{arc\,sin} y$$

[۵۰] نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\operatorname{arc\,sin} y}{\sqrt{1-y^2}}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}y^{2p+1}\quad\left(0\leqslant y\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

از این برابری، از ۰ تا y انتگرال می‌گیریم؛ ضمناً درسمت راست، انتگرال‌گیری جمله به‌جمله را انجام می‌دهیم:

$$\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sin} y)^2=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}\cdot\frac{y^{2p+1}}{2p+1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[2(m-1)]!!}{(2m-1)!!}\cdot\frac{y^{2m}}{2m}$$

این نتیجه را می‌توان این‌طور نوشت:

$$2(\operatorname{arc\,sin} y)^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[(m-1)]^2}{(2m)!}(2y)^{2m}$$

ازاین‌جا، به‌ازای $\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}=\frac{\pi^2}{18}$$

ولی از قبل می‌دانیم [۳۹۵، (۱۳) و همچنین ۴۱۶ را ببینید] که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[(m-1)!]^2}{(2m)!}$$

به‌طوری‌که بالاخره

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad (۴)$$

ما باز هم، به‌این نتیجهٔ جالب اولر برخواهیم گشت.

۸) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx$$

اگر از رشتهٔ لگاریتمی استفاده کنیم [۴۰۵، (۱۷)]، در آن‌صورت، برای تابع زیر انتگرال، بسط زیر را به‌دست می‌آوریم

$$1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}x^{n-1}+\ldots$$

که در تمامی بازهٔ $[0\ ,1]$ حقیقی است. با انتگرال‌گیری جمله به‌جمله داریم:

$$I=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}$$

هم‌اکنون، برابری (۴) را ثابت کردیم، از آن نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

به‌این ترتیب، به‌عبارتی «متناهی» برای انتگرال مفروض می‌رسیم: $I=\frac{\pi^2}{12}$.

۹) می‌خواهیم انتگرال زیر را پیدا کنیم $(|a|<1)$:

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+a\cdot\cos x)}{\cos x}dx$$

(عبارت زیر انتگرال را، به‌ازای $x=\frac{\pi}{2}$، همان مقدارحدی a، که برای $x\to\frac{\pi}{2}$ به‌دست می‌آید، می‌نویسیم).

با استفاده از بسط لگاریتم داریم:

$$\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}=a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{n+1}}{n+1}\cos^n x$$

ضمناً، رشته، در بازهٔ $[\pi\,,0]$، متقارب یکنواخت است. با ملاحظهٔ این‌که [۳۱۲، (۸)]

$$\int_0^{\pi}\cos^{2n-1}x\,dx=0,\quad \int_0^{\pi}\cos^{2m}x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}x\,dx=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\pi$$

انتگرال‌های جمله به‌جمله را انجام می‌دهیم:

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx=\pi\left\{a+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{a^{2m+1}}{2m+1}\right\}$$

دراین رشته، بسط تابع آرك سینوس [۳] را ببینید] را می‌بینیم. به‌این‌ترتیب، بالاخره‌پیدا می‌کنیم (به‌صورت متناهی):

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx=\pi\cdot\arcsin a$$

۱۰) بسط زیر را در نظر می‌گیریم (به‌ازای $|r|<1$):

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cdot\cos nx \qquad (5)$$

اثبات این برابری ساده است. اگر سمت راست را در مخرج $1-2r\cos x+r^2$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$1-2r\cos x+r^2+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx-2\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}\cdot 2\cos nx\cos x+2\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+2}\cos nx$$

اگر $2\cos nx.\cos x$ را به $\cos(n+1)x+\cos(n-1)x$ و مجموع دوم را به‌دومجموع جداگانه تبدیل کنیم، درآن‌صورت، بعداز ساده‌کردن، تنها $1-r^2$ باقی می‌ماند که اثبات را به‌انجام می‌رساند.

با توجه به‌تقارب رشتهٔ $\sum_1^{\infty}|r|^n$ (به‌ازای $|r|<1$)، رشتهٔ سمت راست (۵)، نسبت به x در بازهٔ $[\pi\,,-\pi]$ متقارب یکنواخت می‌شود. اکنون، هم از طرف چپ و هم از طرف راست، از $-\pi$ تا $+\pi$ انتگرال می‌گیریم؛ ضمناً از رشته می‌توان جمله به‌جمله

انتگرال گرفت (قضیهٔ ۵). چون $\int_{-\pi}^{+\pi} cosnxdx = 0$ ، بنابراین

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2rcosx+r^2}dx = 2\pi$$

[با ۳۰۹، ۸) مقایسه کنید].

به‌ترتیب مشابهی، با ضرب دو طرف اتحاد (۵) در $cosmx$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ و انتگرال گیری جمله به‌جمله، به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{cosmx}{1-2rcosx+r^2}dx = 2\pi\frac{r^m}{1-r^2}$$

که ضمناً، از نتیجه‌های معلوم ۳۰۹، ۴)، (d) استفاده می‌شود:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmx\,cosnx\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$$

۱۱) اگر در اتحاد (۵)، واحد را به‌سمت چپ ببریم و، سپس، دو طرف را بر $2r$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{cosx-r}{1-2rcosx+r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}cosnx$$

این‌بار، x را به‌دلخواه، تثبیت می‌کنیم و r را به‌عنوان متغیر، با حوزهٔ تعریف $(-1, 1)$ در نظر می‌گیریم. از دو طرف برابری، نسبت به r، از ۰ تا r دلخواه در این بازه، انتگرال می‌گیریم؛ ضمناً، رشتهٔ توانی سمت راست، جمله به‌جمله، انتگرال گیری می‌شود. چون در سمت چپ، صورت کسر (با تقریب یك ضریب عددی)، مشتق مخرج کسر نسبت به r است، در نتیجه

$$\ln(1-2rcosx+r^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}cosnx \quad (|r|<1)$$

اکنون، r را تثبیت می‌کنیم و x را از ۰ تا π تغییر می‌دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود که، رشتهٔ سمت راست، در این بازه، نسبت به x، متقارب یکنواخت می‌شود، به‌نحوی که انتگرال گیری جمله به‌جمله، مجاز است (قضیهٔ ۵). با انجام انتگرال گیری، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x+r^2)dx = 0 \quad (|r|<1)$$

[با ۴،۳۰۷)؛ ۱۴،۳۱۴) مقایسه کنید]. از این‌جا، همان‌طور که قبلاً دیدیم، مقدار انتگرال، به‌سادگی، به‌ازای $|r|>1$ هم به‌دست می‌آید.

۱۲) انتگرال‌های زیر، که به x بستگی دارند

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)d\theta$$

$$J_n(x) = \frac{2x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\cos^{2n}\theta d\theta \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

معرف به‌اصطلاح تابع‌های بسل هستند [با ۳۹۵، ۱۴) مقایسه کنید]. با بسط عبارت‌های زیر انتگرال برحسب توان‌های $x\sin\theta$ و با انتگرال‌گیری جمله به جمله، به سادگی، بسط این تابع‌ها برحسب توان‌های x به‌دست می‌آید (که برای ما ناشناخته نیست).

مثلاً، با انتگرال‌گیری از رشتهٔ

$$\cos(x\sin\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}\sin^{2k}\theta}{(2k)!}$$

و با به‌خاطر آوردن رابطهٔ [۳۱۲، (۸)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\theta d\theta = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (۶)$$

برای تابع بسل با اندیس صفر، پیدا می‌کنیم:

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}$$

۱۳) قبلاً با انتگرال‌های موسوم به انتگرال‌های بیضوی کامل نوع اول و دوم، برخورد داشته‌ایم [۳۱۵ وغیره]:

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \mathbf{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

مسالهٔ بسط آن‌را، برحسب توان‌های مدول k ($0<k<1$)، مطرح می‌کنیم.

در دستور (۲۴) شمارهٔ ۴۰۷، با قرار دادن $x=-k^2\sin\varphi$، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\cdot\sin^{2n}\varphi$$

این رشته، نسبت به φ، متقارب یکنواخت می‌شود، زیرا به‌ازای همهٔ مقدارهای φ، به‌وسیلهٔ رشتهٔ

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}$$

محدود می‌شود. در نتیجه، بنابر قضیهٔ (۵)، می‌توان از انتگرال‌گیری جمله به‌جمله استفاده کرد. با استفادهٔ مجدد از رابطهٔ (۶)، به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{K}(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot k^{2n}\right\}$$

به‌ترتیب مشابهی، با آغاز از رابطهٔ (۲۳) شمارهٔ ۴۰۷، به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{E}(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$$

از این رشته‌ها، می‌توان برای محاسبهٔ تقریبی استفاده کرد. برای نمونه، رشتهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{8}-\frac{3}{256}-\frac{5}{2048}-\frac{175}{262144}-\frac{441}{2097152}-\cdots\right)$$

اگر در این‌جا، تنها از همین جمله‌هایی که نوشته‌ایم، استفاده کنیم، در آن‌صورت، تصحیح نظیر ــ که مقداری منفی است ــ به‌این ترتیب، برآورد می‌شود:

$$|\Delta|<\left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2\cdot\frac{1}{11\times 2^6}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\right)<0/000024$$

بنابراین، می‌توان به‌سه رقم بعد از ممیز اطمینان کرد. در واقع، اگر تا پنج رقم اعشار محاسبه کنیم داریم:

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{8}=0/19635(-)$$

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{3}{256}=0/01841(-)$$

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{5}{2048}=0/00383(+)$$

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{175}{262144}=0/00105(-)$$

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{441}{2097152}=0/00033(+)$$

$$0/21997$$

$$\frac{\pi}{2}=1/570800(-)$$

$$1/570800-$$

$$0/21997$$

$$1/350803$$

$$1/35057<\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<1/35085;\quad \mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1/350\ldots$$

[با ۳۲۸، ۴) مقایسه کنید].

باید گفت که، در واقع، این رشته‌ها، به‌ازای مقدارهای کوچک k، برای محاسبهٔ انتگرال‌های بیضوی کامل $\mathbf{K}(k)$ و $\mathbf{E}(k)$ مناسب هستند؛ ولی تبدیل‌هایی وجود دارد که می‌توان، به کمک آن‌ها، محاسبهٔ این انتگرال‌ها را، به‌حالتی منجر کرد که، در آن، k به‌اندازهٔ دلخواه کوچک باشد [با ۳۱۵ مقایسه کنید].

۱۴) می‌توان از بسط تابع $\mathbf{E}(k)$، برای محاسبهٔ انتگرال زیر استفاده کرد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathbf{E}(h\sin\theta)}{1-h^2\sin^2\theta}\sin\theta\,d\theta\quad(0<h<1)$$

قبل از همه، می‌توان درستی بسط زیر را به‌سادگی (و مثلاً با ضرب سمت راست برابری، در $1-k^2$) تحقیق کرد:

$$\frac{\mathbf{E}(k)}{1-k^2}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3k^2+\left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^2\cdot 5k^4+\left(\frac{1\times 3\times 5}{2\times 2\times 6}\right)^2\cdot 7k^6+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\cdot(2n+1)k^{2n}\right\}$$

با قرار دادن $k=h\sin\theta$ و همچنین ضرب در $\sin\theta$، می‌توانیم نسبت به θ، از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$، انتگرال بگیریم. از آن‌جا که رشتهٔ حاصل، در این مرزها، متقارب یکنواخت است (این رشته، مثلاً با رشتهٔ قبل به‌ازای $k=h$ محدود می‌شود). چون [۳۱۲، (۸)]

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^{۲n+۱}\theta d\theta=\frac{(۲n)!!}{(۲n+۱)!!}$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\mathbf{E}(h\sin\theta)}{۱-h^{۲}\sin^{۲}\theta}\cdot\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{۲}\left\{۱+\frac{۱}{۲}h^{۲}+\frac{۱\times۳}{۲\times۴}h^{۴}=\frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}h^{۶}+\dots\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{۲}\left\{۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!}\cdot h^{۲n}\right\}$$

اگر عبارت داخل آکولاد را با رابطهٔ (۲۴) شمارهٔ **۴۰۷** مقایسه کنیم، مقدار انتگرال مطلوب، به‌سادگی و به‌صورتی متناهی به‌دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\mathbf{E}(h\sin\theta)}{۱-h^{۲}\sin^{۲}\theta}\cdot\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{۲}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱-h^{۲}}}$$

۱۵) در پایان، مسالهٔ مربوط به بسط تابع $y=\arcsin(۱-x)$ را، به‌ازای $x\geqslant ۰$، برحسب توان x (ولی نه‌توان‌های صحیح)*، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با استفاده از رشتهٔ دو جمله‌ای، داریم:

$$y'=-\frac{۱}{\sqrt{۱-(۱-x)^{۲}}}=-\frac{۱}{\sqrt{۲x}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}x}}=$$

$$=-\frac{۱}{\sqrt{۲x}}\left\{۱+\frac{۱}{۴}x+\frac{۳}{۳۲}x^{۲}+\dots\right\}=$$

---

*) دربارهٔ بسط به‌صورت عادی، برحسب توان‌های مثبت و درست x، در این‌جا، نمی‌توان صحبت کرد، زیرا در آن‌صورت، تابع ما، بنابر قضیهٔ ۹° شمارهٔ **۴۳۸**، باید به‌ازای $x=۰$، مشتقی متناهی داشته باشد، که در واقع، ندارد.

$$= -\frac{۱}{\sqrt{۲}}x^{-\frac{۱}{۲}} - \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}x^{\frac{۱}{۲}} - \frac{۳}{۳۲\sqrt{۲}}x^{\frac{۳}{۲}} - \dots$$

ضمناً اگر جملهٔ اول را ــ که به‌ازای $x = ۰$ برابر بی‌نهایت می‌شود ــ حذف کنیم، تقارب رشتهٔ در بازهٔ دلخواه $[۰, x]$ $(۰ < x < ۲)$، یکنواخت می‌شود. تابع اولیهٔ جملهٔ اول این تابع برابر $-\sqrt{۲}x^{\frac{۱}{۲}}$ است و تابع اولیهٔ بقیهٔ رشته هم، با انتگرال‌گیری جمله به‌جمله به‌دست می‌آید. چون به‌ازای $x = ۰$ باید داشته باشیم $y = \frac{\pi}{۲}$، سرانجام، بسط مطلوب، برحسب توان‌های کسری x به‌دست می‌آید (که برای $۰ \leqslant x < ۲$ وجود دارد):

$$y = \frac{\pi}{۲} - \sqrt{۲}x^{\frac{۱}{۲}} - \frac{۲}{۶\sqrt{۲}}x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۳}{۸۰\sqrt{۲}}x^{\frac{۵}{۲}} - \dots$$

به‌طریق مشابهی، می‌توان بسط

$$\arcsin\sqrt{\frac{۲x}{۱+x^{۲}}} = \sqrt{۲}\left\{x^{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۵}x^{\frac{۵}{۲}} - \frac{۱}{۷}x^{\frac{۷}{۲}} + \dots\right\}$$

را برای $۰ \leqslant x < ۱$ به‌دست آورد.

۴۴۱. مثال‌هایی از مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ رشته‌ها. ۱) اگر دوباره، به‌تابع [با ۳۹۰، ۶)؛ ۴۳۹، ۳) مقایسه کنید]

$$y = E(x) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

برگردیم، حالا دیگر می‌توانیم مشتق آن‌را به‌سادگی محاسبه کنیم. برای این منظور، کافی است [۴۳۸، ۸°] از این رشته، جمله به جمله مشتق بگیریم. به‌دست می‌آوریم $E'(x) = E(x)$، به‌نحوی که تابع مطلوب، درمعادلهٔ دیفرانسیلی $y' = y$ صدق می‌کند. از این‌جا $y = Ce^x$؛ و چون به‌ازای $x = ۰$ باید داشته باشیم $y = ۱$. سرانجام معلوم می‌شود که $E(x) = e^x$.

۲) همین روش را می‌توان برای تعیین مجموع رشتهٔ دوجمله‌ای هم به‌کار برد:

$$y = f(x) = ۱ + mx + \frac{m(m-۱)}{۱\times۲}x^{۲} + \dots +$$

$$+\frac{m(m-۱)\dots(m-n+۱)}{۱\times۲\times\dots\times n}x^n + \dots$$

[در این‌جا، m ثابت است و x در بازهٔ $(-۱, ۱)$ تغییر می‌کند؛ با ۴۳۹، ۴) مقایسه کنید]. اگر جمله به‌جمله مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=m\left\{۱+(m-۱)x+\frac{(m-۱)(m-۲)}{۱\times ۲}x^{۲}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\frac{(m-۱)(m-۲)\dots(m-n)}{۱\times ۲\times\dots\times n}x^{n}+\dots\right\}$$

حالا، به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$(۱+x)f'(x)=mf(x)^{*}$$

به‌این ترتیب، تابع ما، در معادلهٔ دیفرانسیلی

$$(۱+x)y'=my$$

صدق می‌کند. از آن‌جا

$$y=C(۱+x)^{m}$$

و چون به‌ازای $x=۰$ باید داشته باشیم $y=۱$، بنابراین $C=۱$ می‌شود و سرانجام

$$y=f(x)=(۱+x)^{m}$$

۳) می‌دانیم که مجموع رشتهٔ دیریکله [۳۸۵، ۳)]

$$\varphi(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x}}$$

برای $x>\lambda$ (λ طول تقارب است؛ $\lambda<+\infty$)، تابعی پیوسته است [۴۳۹، ۲)]. می‌توان مشتق این تابع را، با مشتق‌گیری جمله به‌جمله، به‌دست آورد:

---

*) ضمن ضرب $f'(x)$ در $۱+x$، باید از ویژگی ضریب‌های دو جمله‌ای استفاده کنیم:

$$\frac{(m-۱)(m-۲)\dots(m-n)}{۱\times ۲\times\dots\times n}+\frac{(m-۱)(m-۲)\dots(m-n+۱)}{۱\times ۲\times\dots\times(n-۱)}=$$

$$=\frac{m(m-۱)\dots(m-n+۱)}{۱\times ۲\times\dots\times n}$$

که حالت خاص آن، رابطهٔ معلوم زیر است

$$C_{m-۱}^{n}+C_{m-۱}^{n-۱}=C^{n}$$

$$\varphi'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^x}\cdot\ln n \quad (x>\lambda)$$

قبلاً این نتیجه‌را به‌طورصوری، به‌دست آوردیم. برای این که آن‌را مدلل کنیم، کافی است اطمینان حاصل کنیم که رشتهٔ اخیر، نسبت به x، به‌ازای همهٔ $x\geqslant x_0$ (که در آن، x_0، عددی دلخواه ولی تثبیت‌شده و بزرگتراز λ است)، به‌طوریکنواخت، متقارب است، به‌این نتیجه می‌توان، شبیه ۴۳۹، ۲)، و به‌کمك معیار آبل، رسید؛ توجه‌کنیم که ضریب $\frac{\ln n}{n^{x-x_0}}$، با شروع از $n=2$، با بزرگ‌شدن n، نزول می‌کند و با $\ln 2$ کران‌دار است. $x>\lambda$ را، هرطور اختیار کنیم، می‌توان آن را بین مرزهای $x'>\lambda$ و $x''>x'$ محصور کرد؛ و قضیهٔ ۷ [۴۳۵] را در بازهٔ $[x',x'']$ به‌کار برد.

به‌همین ترتیب، می‌توان به وجود مشتق‌های همهٔ مرتبه‌ها برای تابع $\varphi(x)$ قانع شد و عبارت آن‌ها را، به‌صورت رشته، به‌دست آورد.

همهٔ آن‌چه‌را که گفتیم، می‌توان در مورد حالت خاص تابع ریمان

$$\zeta(x)=\sum\frac{1}{n^x}$$

برای $x>0$ هم، به‌کار برد.

۴) قبلاً، بسط تابع بسل با اندیس صفر $J_0(x)$ را، به‌رشتهٔ توانی دیده‌ایم:

$$J_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}$$

[۳۹۵، ۱۴)؛ ۴۴۰، ۱۲)].

ثابت می‌کنیم که، این تابع، در معادلهٔ دیفرانسیلی بسل، صدق می‌کند:

$$xu''+u'+xu=0$$

با فرض $u=J_0(x)$، داریم:

$$xu=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k)^2}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}\cdot x^{2k-1}$$

سپس، اگر دوبار از بسط u، جمله به‌جمله مشتق بگیریم:

$$u'=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}\cdot x^{2k-1}$$

$$xu'' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k(k-1)}{(k!)^2 . 2^{2k}} . x^{2k-1}$$

اگر این دو برابری را جمع کنیم، ضریب x^{2k-1}، چنین می‌شود:

$$\frac{(-1)^k}{(k!)^2 . 2^{2k}} [2k(2k-1) + 2k - (2k)^2] = 0$$

که حکم را ثابت می‌کند.

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که تابع بسل با اندیس طبیعی غیرمشخص $J_n(x)$، که قبلاً هم دربارهٔ آن صحبت کرده‌ایم، در معادلهٔ کلی بسل صدق می‌کند:

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$$

۵) یك مسالهٔ آموزندهٔ دیگر: می‌خواهیم تابعی را پیدا کنیم که، برای همهٔ xها، قابل بسط به‌رشته باشد و در معادلهٔ بسل صدق کند.

ساده‌ترین حالت، یعنی $n = 0$، را در نظر می‌گیریم. بسط تابع مورد نظر را با ضریب‌های نامعین، به‌صورت رشته می‌نویسیم:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

و همه‌جا، آن‌را متقارب به‌حساب می‌آوریم. دو بار جمله به‌جمله مشتق می‌گیریم. همهٔ این بسطها را در معادله می‌گذاریم، به‌دست می‌آید:

$$a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} (m^2 a_m + a_{m-2}) x^{m-1} = 0$$

و بنابر قضیهٔ ۳° [۴۳۷]:

$$a_1 = 0,\ m^2 a_m + a_{m-2} = 0 \quad (m = 2, 3, \ldots)$$

از این جا، قبل از همه، ضریب‌های با اندیس‌های فرد به‌دست می‌آید: $a_{2k-1} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. اندیس‌های زوج a_{2k} را هم می‌توان، با رابطهٔ بازگشتی زیر، برحسب a_0 بیان کرد:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2 . 2^{2k}}$$

به‌این ترتیب، با تقریب ضریب دلخواه a_0، به‌تابع $J_0(x)$ بسل می‌رسیم.

این که، رشتهٔ حاصل؛ به‌واقع در همه‌جا متقارب است، مستقیماً قابل تحقیق است. ازخود روش به‌دست آمدن آن معلوم می‌شود که، این تابع، درمعادله صدق می‌کند.

[توجه خواننده را، به‌استفادهٔ خاص از روش ضریب‌های نامعین جلب می‌کنیم. در این‌جا، با مجموعه‌ای نامتناهی ازضریب‌ها، سروکار داریم و ناچاریم به‌قضیهٔ مربوط به‌رشته‌های توانی متوسل شویم (در برابر قضیه‌ای که معمولاً دربارهٔ اتحاد چندجمله‌ای‌ها به‌کار می‌رود)].

۶) تابع زیر متعلق بدگوس است:

$$u=F(\alpha,\beta,\gamma,x)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}x^n$$

[رشتهٔ هیپرژئومتریك (۳۷۲؛ ۳۷۸، ۴) را ببینید]. با دوبار مشتق‌گرفتن ازاین رشته (با به‌حساب آوردن $|x|<1$)، می‌توان ثابت کرد که این تابع، در معادلهٔ موسوم به‌معادلهٔ دیفرانسیلی هیپرژئومتریك (فوق هندسی) صدق می‌کند:

$$x(x-1)u''-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\cdot u'+\alpha\beta\cdot u=0$$

چند محاسبهٔ طولانی، ولی نه‌دشوار، را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. در این‌جا هم می‌توان، شبیه تمرین ۵، طرح مسأله را تغییرداد.

۷) تابع $f(x)$ را، برای $0\leqslant x\leqslant 1$، با معادلهٔ زیرتعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

ثابت می‌کنیم که این تابع، به‌ازای $0<x<1$؛ در معادلهٔ تابعی جالب زیرصدق می‌کند:

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C=\text{const}.$$

برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که مشتق سمت‌چپ، نسبت به x، متحد باصفر است:

$$f'(x)+f'(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x=0$$

اگر از رشته‌ای که معرف تابع $f(x)$ است، جمله به‌جمله مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

اگر x را به $x-1$ تبدیل کنیم. نتیجه می‌شود:

$$f'(1-x)=-\frac{1}{1-x}\ln x$$

دنبالهٔ کار، دشوار نیست.

خود مقدار ثابت را، با میل دادن x به‌سمت ۱، در رابطه‌ای که ثابت کردیم، می‌توان تعیین کرد. بنابر قضیهٔ آبل، حدچپ آن، برابر است با

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

[۴۴۰، ۴)]، یعنی $C=\frac{\pi^2}{6}$.

۸) حاصل‌ضرب نامتناهی

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\quad(\varphi\neq 0)$$

را در ۴۰۰، ۴) مورد بررسی قرار دادیم. ابتدا، با فرض $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$، ازاین برابری لگاریتم می‌گیریم [۴۰۱، ۴)]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{\varphi}{2^n}=\ln\sin\varphi-\ln\varphi$$

وسپس، ازرشتهٔ حاصل، جمله به‌جمله، مشتق می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^n}=\frac{1}{\varphi}-\operatorname{cotg}\varphi$$

ازآن‌جاکه، رشتهٔ حاصل از مشتق‌ها، به‌وسیلهٔ تصاعد هندسی متقارب، محدود می‌شود؛ بنابراین، مشتق‌گیری جمله به‌جمله، مجاز است.

۹) در ۴۰۸، $\sin x$ را به‌ضرب نامتناهی، بسط دادیم:

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

اگر قدرمطلق‌ها را واردکنیم، ازاین‌جا به‌دست می‌آید:

$$|\sin x|=|x|\prod_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$$

به‌شرطی که x مخالف عددهای به‌صورت $k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ باشد، می‌توان با لگاریتم گرفتن، به‌رشتهٔ نامتناهی زیر رسید:

$$\ln|\sin x| \overset{\cdot}{=} \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$$

که با مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ آن، به‌این بسط می‌رسیم:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

برای اثبات آن، کافی است متوجه شویم که رشتهٔ حاصل، به‌طور یکنواخت، در هر بازهٔ بستهٔ دلخواهی که شامل نقطه‌های به‌صورت $k\pi$ نباشد، متقارب است. در واقع، وقتی که x درچنین بازه‌ای تغییر کند، قدرمطلق آن، کران‌دار می‌ماند؛ $|x| < M$، به‌نحوی که دست کم برای $n > \frac{M}{\pi}$

$$\left|\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\right| = \frac{2|x|}{n^2\pi^2 - |x|^2} < \frac{2M}{n^2\pi^2 - M^2}$$

و چون رشتهٔ

$$\sum_{n > \frac{M}{\pi}}^{\infty} \frac{2M}{n^2\pi^2 - M^2}$$

متقارب است، بنابراین نتیجهٔ مطلوب، به‌کمک معیار ویرشتراس، حاصل می‌شود.

بسط $\operatorname{cotg} x$ را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}\right)$$

$\operatorname{cotg} x$، در این شکل خود، به‌صورت کسرهای ساده‌ای بسط داده می‌شود که پاسخ گوی ریشه‌های جداگانهٔ ۰ و $\pm n\pi$ مخرج $\sin x$، هستند.

با توجه به‌رابطه $\operatorname{tg} x = -\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$، می‌توان بسط $\operatorname{tg} x$ را به کسرهای ساده به‌دست آورد:

$$\operatorname{tg} x = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}$$

به‌همین ترتیب، اگر از رابطهٔ

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

استفاده کنیم، می‌توان بسط $\frac{1}{\sin x}$ را هم پیدا کرد:

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$$

اگر از بسط $\operatorname{cotg} x$، جمله به‌جمله مشتق بگیریم (اثبات مجاز بودن آن‌را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم)، بسط مفید دیگری به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x-n\pi)^2}+\frac{1}{(x+n\pi)^2}\right]$$

۱۰) اگر نمایش $\operatorname{sh} x$ را به‌صورت ضرب نامتناهی [۴۰۸] آغاز کنیم، به‌ترتیب مشابهی، به‌بسط‌های زیر می‌رسیم:

$$\operatorname{cth} x=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2},\ \ldots$$

۱۱) برای تابع $\Gamma(x)$، در شمارهٔ ۴۰۲، دستور ویرشتراس را دیدیم [(۱۶) را ببینید]:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=e^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}$$

با توجه به‌این‌که $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$ و با عبور به‌لگاریتم‌ها (به‌شرطی که x مخالف صفر و مخالف عددهای درست منفی باشد)، به‌دست می‌آید:

$$\ln|\Gamma(x)|=-\ln|x|-Cx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln\left|1+\frac{x}{n}\right|\right)$$

اگر از رشته، جمله به‌جمله مشتق بگیریم، به‌طور صوری، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\frac{۱}{x}-C+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{x+n}\right)$$

حالا ثابت می‌کنیم که رشتهٔ سمت راست، به‌طور یکنواخت، در بازهٔ متناهی دلخواه (که شامل عددهای درست منفی نباشد)، متقارب است. در واقع، چون $|x|$ کران‌دار است: $|x|<M$، بنابراین، دست‌کم برای $N>M$، داریم:

$$\left|\frac{۱}{n}-\frac{۱}{x+n}\right|=\frac{|x|}{n(n+x)}<\frac{M}{n(n-M)}$$

و از آن‌جا که رشتهٔ $\sum_{n>M}\frac{M}{n(n-M)}$ متقارب است، بنابر معیار ویرشتراس، تقارب یکنواخت تامین است و می‌توانیم به قضیهٔ ۷ شمارهٔ **۴۳۵** استناد کنیم، که وجود مشتق از $\ln|\Gamma(x)|$ و در نتیجه، از $\Gamma(x)$ و غیره، ثابت می‌شود.

اگر رشتهٔ زیر را به‌سمت راست رابطهٔ حاصل اضافه کنیم:

$$۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n+۱}-\frac{۱}{n}\right)=۰$$

می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-C+\sum_{\nu=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{\nu+۱}-\frac{۱}{x+\nu}\right)$$

به‌سادگی می‌توان مطمئن شد که مشتق‌های همه‌مرتبه‌ها، برای تابع $\Gamma(x)$، وجود دارد.

۴۴۲. روش تقریب‌های متوالی در نظریهٔ تابع‌های ضمنی. برای این‌که، نظریهٔ رشته‌ها (یا دنباله‌ها)ی تابعی را، درعمل نشان دهیم، دوباره به‌بررسی مسالهٔ مربوط به‌وجود «تابع‌های ضمنی» [۲۰۶ و بعد از آن] می‌پردازیم. برای سادگی کار، به‌حالت یك معادلهٔ

$$F(x, y)=۰ \qquad (۷)$$

اکتفا می‌کنیم، که در آن، y به‌عنوان تابع یك ارزشی از x، تعریف شده است. این بار، از روش تقریب‌های متوالی استفاده می‌کنیم. این روش، نه‌تنها وجود این تابع را ثابت می‌کند، بلکه اشاره‌هایی هم برای محاسبهٔ واقعی آن دارد.

فرض کنیم، تابع $F(x, y)$ همراه با مشتق خود $F'_y(x, y)$ در یك مربع

$$\mathcal{D}=[x_۰-\Delta, x_۰+\Delta, y_۰-\Delta, y_۰+\Delta]$$

به‌مرکز $(x_۰, y_۰)$ پیوسته باشد، ضمناً

$$F(x_0, y_0)=0 \quad \text{ولی} \quad F'_y(x_0, y_0)\neq 0 \qquad (۸)$$

در این‌صورت، معادلهٔ (۷) y را، در همسایگی نقطهٔ (x_0, y_0)، به‌عنوان تابع یک‌ارزشی پیوسته از x، مشخص می‌کندکه به‌ازای $x=x_0$، برابر y_0 می‌شود.

بهتر است، ابتدا حالت خاصی را مورد بررسی قرار دهیم که، در آن، معادلهٔ (۷) به‌صورت

$$y=y_0+\varphi(x, y) \qquad (۷^*)$$

است و در آن، φ همراه با φ'_y در همان شرط‌هـای پیوستگی F صدق کند، ولی شرط‌های (۸)، به‌صورت زیر درآیند:

$$\varphi(x_0, y_0)=0, \quad |\varphi'_y(x_0, y_0)|<1 \qquad (۸^*)$$

با توجه به‌پیوستگی مشتق، می‌توانیم از همان ابتدا، حوزه $\mathcal{D}$ را آن‌قـدر کوچك در نظر بگیریم‌که در محدودهٔ آن، به‌طورکلی داشته باشیم:

$$\varphi'_y(x, y)<\lambda \qquad (۹)$$

که در آن، λ ثابتی کوچکتر از واحد است. سپس، با حفظ بازهٔ تغییر y، بازهٔ تغییر x را، با تبدیل آن به‌بازهٔ به‌قدر کافی کوچك $[x_0-\delta, x_0+\delta]$، بازهم کوتاه‌تر می‌کنیم تا در محدودهٔ آن، تابع $\varphi(x, y_0)$ پیوسته از x، که به‌ازای $x=0$ برابر ۰ می‌شود، در نابرابری زیر صدق کند:

$$|\varphi(x, y_0)|<(1-\lambda)\Delta$$

به‌این ترتیب، حوزهٔ

$$\mathcal{D}^*=[x_0-\delta, x_0+\delta;\ y_0-\Delta, y_0+\Delta]$$

پدید می‌آید که دنبالهٔ بحث ما، به‌آن مربوط خواهد شد.

اگر در سمت راست معادلهٔ (۷*)، به‌جای y، مقدار ثابت y_0 را بگذاریم، به‌تابعی از x می‌رسیم:

$$y_1=y_1(x)=y_0+\varphi(x, y_0)$$

به‌همین ترتیب، فرض می‌کنیم:

$$y_2=y_2(x)=y_0+\varphi(x, y_1)$$

$$y_3=y_3(x)=y_0+\varphi(x, y_2)$$

. . . . . .

و به‌طور کلی

$$y_n = y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}) \qquad (11)$$

و این تابع‌های

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

عبارتند از تقریب‌های متوالی تابع مطلوب $y(x)$.

البته، باید تحقیق کنیم که هیچ کدام ازاین‌ها، از محدودهٔ بازهٔ $[y_0-\Delta, y_0+\Delta]$ خارج نمی‌شوند، زیرا اگر یکی از آن‌ها، از این بازه بیرون برود، در آن‌صورت نمی‌شود آن‌را در سمت راست معادلهٔ (*۷)، به‌جای y قرار داد.

این مطلب را به‌کمك استقرا ثابت می‌کنیم. مثلاً، فرض کنیم

$$y_0-\Delta \leqslant y_{n-1} \leqslant y_0+\Delta$$

از (۱۱) داریم:

$$y_n - y_0 = \varphi(x, y_{n-1})$$

ولی

$$|\varphi(x, y_{n-1})| \leqslant |\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x_0, y_0)| + |\varphi(x_0, y_0)|$$

جملهٔ اول سمت راست، بنابه قضیهٔ مربوط به مقدار میانگین، تبدیل می‌شود، و براساس (۹)

$$|\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x_0, y_0)| = |\varphi'_y(x, \eta).(y_{n-1}-y_0)| < \lambda.\Delta$$

و جملهٔ دوم از $\Delta(\lambda-1)$ کمتر است (بنابر (۱۰))، به‌طوری که روی‌هم رفته

$$|y_n - y_0| < \lambda\Delta + (1-\lambda)\Delta = \Delta$$

که حکم ما را ثابت می‌کند.

ضمناً، با روش استقرایی، می‌توان ثابت کرد که همهٔ این تابع‌ها، در بازهٔ مفروض، پیوسته هستند.

اکنون، به‌مسالهٔ حد دنبالهٔ تابع‌های $\{y_n\}$ می‌پردازیم. بهتر است از بررسی این رشته آغاز کنیم:

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}) \qquad (12)$$

از خود تعریف رشته معلوم است که

$$y_n - y_{n-1} = \varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_{n-2})$$

با استفادهٔ دوباره از قضیهٔ مربوط به‌میانگین‌ها و نابرابری (۹)، به‌دست می‌آید:

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda |y_{n-1} - y_{n-2}|$$

از این‌جا، با تبدیل n به $n-1$، $n-2$، ...، با توجه به (۱۰)، نتیجه می‌گیریم:

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda^{n-1} \cdot |y_1 - y_0| \leqslant \lambda^{n-1} \cdot (1-\lambda) \cdot \Delta$$

به‌این‌ترتیب، رشتهٔ (۱۲)، به‌وسیلهٔ تصاعد هندسی

$$(1-\lambda)\Delta \cdot \sum_{1}^{\infty} \lambda^{n-1} \qquad (13)$$

محدود و، در نتیجه، متقارب می‌شود؛ این تقارب، ضمناً برای همهٔ مقدارهای x در بازهٔ $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ یکنواخت است. در این‌صورت، بنابر قضیهٔ شمارهٔ **۴۳۱**، تابع حدی

$$y = y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x)$$

در بازهٔ مفروض، پیوسته خواهد بود.

اگر در برابری (۱۱)، به‌ازای $n \to \infty$، به سمت حد برویم، به سادگی روشن می‌شود که این تابع در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند. تنها اثبات این مطلب می‌ماند که ثابت کنیم که، به‌جز آن‌چه به‌دست آمده است، مقدارهای دیگری برای y وجود ندارد که در معادلهٔ (*۷) صدق کند. در واقع، اگر به‌ازای مقداری از x، در ردیف (*۷) داشته باشیم:

$$\tilde{y} = x_0 + \varphi(x, \tilde{y})$$

در آن‌صورت، با کم‌کردن و برآوردکردن تفاضل مقدارهای φ، به‌دست می‌آید:

$$|y - \tilde{y}| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y})| < \lambda \cdot |y - \tilde{y}|$$

که با فرض $\tilde{y} \neq y$، غیرممکن است.

از همین‌جا نتیجه می‌شود:

$$y(x_0) = y_0$$

که البته، مستقیماً هم از این‌جا به‌دست می‌آید که داریم: $y_n(x_0) = y_0$.

قضیه، در حالت خاصی که در نظر گرفتیم، ثابت شد. حالت کلی را هم می‌توان، به‌سادگی، به‌این حالت خاص تبدیل کرد: معادلهٔ (۷) را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$y = y_0 + \left[y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)} \right]$$

که اگر فرض کنیم:

$$\varphi(x, y)=y-y_0-\frac{F(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

با (*۷) متحدمی‌شود. این تابع با شرط‌های (*۸)، و بخصوص شرط دوم، سازگاراست، زیرا $\varphi'_y(x_0, y_0)$ برابر با ۰ می‌شود.

همان‌طور که قبلا هم گفتیم، این روند، محاسبهٔ عملی تابع مجهول $y(x)$ راهم(البته به‌تقریب)، ساده می‌کند. خطای حاصل از انتخاب $y_n(x)$ به‌جای $y(x)$ را، می‌توان به‌سادگی برآورد کرد، زیرا باقی‌ماندهٔ رشتهٔ (۱۲) بعد از جملهٔ nام، به‌وسیلهٔ باقی‌ماندهٔ نظیر تصاعد هندسی، محدود می‌شود؛ از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$|y(x)-y_n(x)|<\Delta\cdot\lambda^n \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

مقایسهٔ اثبات قضیهٔ مربوط به‌تابع ضمنی در ۲۰۶، با آن‌چه در این‌جا داشتیم، می‌تواند خیلی آموزنده باشد. در آن‌جا، بطور خالص، با «مسألهٔ وجودی» مجهول‌سروکار داشتیم، درحالی که در این‌جا، «مسألهٔ ساختمانی» مجهول راحل کردیم.

با همین روش می‌توان قضیهٔ کلی ۲۰۸ را هم ثابت کرد. اگرما به‌حالت خاص آن پرداختیم، به‌این مناسبت بود که تصور روشن‌تری دربارهٔ این روش، به‌خواننده بدهیم.

۴۴۳. تعریف تحلیلی تابع‌های مثلثاتی. خواننده، از نقش فوق‌العادهٔ تابع‌های مثلثاتی در آنالیز آگاه است. ولی این تابع‌ها، براساس تصورهای هندسی آمده است، که برای آنالیز بیگانه است. بنابراین، مسألهٔ مربوط به‌امکان تعریف تابع‌های مثلثاتی ومطالعهٔ ویژگی‌های بنیادی آن‌ها، به‌کمک وسیله‌های خود آنالیز، اهمیت جدی پیدا می‌کند. رشتهٔ نامتناهی، درست همان وسیله‌ای است که، به‌کمک آن، می‌توان همهٔ این دشواری‌ها راحل کرد. ما هم این شماره را به‌مطالعهٔ تابع‌های مثلثاتی و تعریف تحلیلی آن‌ها اختصاص داده‌ایم که، ضمناً، می‌تواند مثال تازه‌ای برای کاربرد نظریهٔ رشته‌های نامتناهی باشد.

تابع‌های $C(x)$ و $S(x)$ را درنظر می‌گیریم که با رشته‌های متقارب زیر، برای همهٔ مقدارهای حقیقی x، تعریف می‌شوند:

$$C(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

بدون این‌که، آن‌ها را، با دستورهای $\cos x$ و $\sin x$ که ازقبل می‌دانیم، یکی کنیم. قبلاهم [۳۹۰، ۷)] بااین تابع‌ها سروکار داشته‌ایم. در آن‌جا، دو دستور اساسی زیررا، به‌کمک ضرب رشته‌ها، برای این تابع‌ها، ثابت کردیم:

$$C(x+y)=C(x).C(y)-S(x).S(y) \qquad (۱۴)$$

$$S(x+y)=S(x).C(y)+C(x).S(y) \qquad (۱۵)$$

که برای همهٔ مقدارهای x و y درست‌اند.

به‌مطالعهٔ ویژگی‌های تابع‌های $C(x)$ و $S(x)$ ادامه می‌دهیم. اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم، فوراً معلوم می‌شود که $C(x)$ تابعی زوج و $S(x)$ تابعی فرد است:

$$C(-x)=C(x),\ S(-x)=-S(x)$$

اگر $x=۰$ قرار دهیم، معلوم می‌شود که

$$C(۰)=۱,\ S(۰)=۰$$

اکنون اگر در (۱۴)، x را دلخواه و $y=-x$ بگیریم، با توجه به‌رابطه‌هایی که به‌دست آوردیم، به‌رابطه‌ای می‌رسیم که بستگی بین دوتابع را به‌دست می‌دهد:

$$C^۲(x)+S^۲(x)=۱ \qquad (۱۶)$$

رابطه‌های مربوط به‌دو برابر کردن یا نصف کردن آوند (آرگومان) هم، به‌سادگی حاصل می‌شود.

از قضیه‌های ۲°، ۴۳۷ و ۹°، ۴۳۸، می‌توان نتیجه گرفت که هردو تابع $C(x)$ و $S(x)$ هم پیوسته‌اند و هم دارای مشتق، از هرمرتبه‌ای، هستند. اگراز رشته‌های معرف این تابع‌ها، جمله به‌جمله مشتق بگیریم [۴۳۸، ۸°]، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$C'(x)=-S(x),\ S'(x)=C(x) \qquad (۱۷)$$

همان‌طور که می‌بینیم، همهٔ ایـن ویژگی‌ها، به سادگی ثابت می‌شوند؛ ولـی برای اثبات متناوب بودن این تابع‌ها، به‌تلاش بیشتری نیاز داریم.

ابتدا ثابت می‌کنیم که تابع $C(x)$، در بازهٔ $(۰، ۲)$، دارای یـک ریشه و، ضمناً، تنها یـک ریشه، می‌باشد. درواقـع، می‌دانیم $C(۰)=۱$. مقدار $C(۲)$ را هـم می‌توان به‌صورت زیر (با جداکـردن سه‌جملهٔ اول رشتهٔ نظیر ویکی‌کردن دو به‌دوی بقیهٔ جمله‌ها) نوشت:

$$C(۲)=۱-\frac{۲^۲}{۲!}+\frac{۲^۴}{۴!}-\left(\frac{۲^۶}{۶!}-\frac{۲^۸}{۸!}\right)-\cdots$$

چون، همهٔ پرانتزها مثبت هستند:

$$\frac{۲^{۲n}}{(۲n)!}-\frac{۲^{۲n+۲}}{(۲n+۲)!}=\frac{۲^{۲n}}{(۲n)!}\left(۱-\frac{۲\times۲}{(۲n+۱)(۲n+۲)}\right)>۰$$

و مجموع سه‌جملهٔ اول برابر است با $-\frac{۱}{۳}$، بنابراین $C(۲)<-\frac{۱}{۳}$، یعنی $C(۲)$به‌روشنی منفی است. با توجه به‌پیوستگی تابع $C(x)$، ازاین‌جا نتیجه می‌شود که، در بازهٔ $(۲\ ،۰)$، به‌واقع، ریشه‌ای از این تابع وجود دارد.

ازطرف دیگر، درهمان بازه، تابع

$$S(x)=x\left(۱-\frac{x^{۲}}{۲\times۳}\right)+\frac{x^{۵}}{۵!}\left(۱-\frac{x^{۲}}{۶\times۷}\right)+\cdots$$

به‌روشنی مثبت است ومشتق $C'(x)=-S(x)$ منفی است. بنابراین، تابع $C(x)$ ، وقتی که x از ۰ تا ۲ ترقی می‌کند، نزولی است وتنها یکبار برابر صفرمی‌شود.

این ریشهٔ تابع $C(x)$ را $\frac{\pi}{۲}$ می‌نامیم. π را تنها یك نمادگرفته‌ایم و، فعلا، نبایدآن را با نسبت محیط برقطردایره یکی دانست.

به‌این‌ترتیب، داریم:

$$C\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۰\ ،\ S\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱$$

رابطهٔ دوم را می‌توان از (۱۶)، با توجه به‌این‌که تابع $S(x)$ به‌ازای $۰<x\leqslant۲$ مثبت است، نتیجه‌گرفت.

اگر در دستورهای (۱۴) و (۱۵)، ابتدا $x=y=\frac{\pi}{۲}$ و سپس $x=y=\pi$ قرار دهیم، به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$C(\pi)=-۱,\ S(\pi)=۰;\quad C(۲\pi)=۱,\ S(۲\pi)=۰$$

اگر درهمان دستورها، x را دلخواه و $y=\pi$ یا $y=۲\pi$ بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$C(x+\pi)=-C(x),\ S(x+\pi)=-S(x) \qquad (۱۸)$$

وبالاخره

$$C(x+۲\pi)=C(x),\ S(x+۲\pi)=S(x)$$

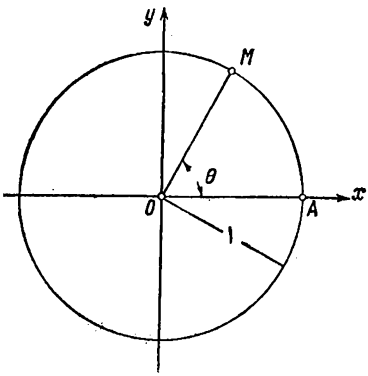
رابطه‌های اخیر، ثابت می‌کنندکه تابع‌های $C(x)$ و $S(x)$، دورهٔ تناوبی برابر ۲πدارند.

بقیهٔ «رابطه‌های تبدیل» را هم می‌توان به‌سادگی به‌دست آورد و آن‌ها را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اکنون، کوشش می‌کنیم انطباق تابع‌های $C(x)$ و $S(x)$ را با تابع‌های مثلثاتی $\cos x$ و $\sin x$ و، همچنین، انطباق نماد π را باعدد π ــ که نقش عظیمی درهندسه دارد ــ ثابت کنیم.

برای این منظور، منحنی را درنظر می‌گیریم که با معادله‌های پارامتری زیرداده شده باشد:

$$x=C(t),\quad y=S(t)$$



شکل ۶۱

که در آن، پارامتر t، از ۰ تا 2π تغییر می‌کند. باتوجه به (۱۶)، همهٔ نقطه‌های این‌منحنی، درمعادلهٔ $x^2+y^2=1$ صدق می‌کنند، یعنی روی محیط دایرهٔ به‌مرکز مبداء مختصات و به‌شعاع واحد قراردارند (شکل ۶۱). ثابت می‌کنیم که هر نقطهٔ این‌منحنی فقط یکبار به‌دست می‌آید وتنها نقطهٔ آغازین A استثنا است که. طبعاً، دوبار و به ازای $t=0$ و $t=2\pi$ حاصل می‌شود.

دیدیم که $S(t)$، درفاصلهٔ $0<t\leqslant 2$، به‌طور مسلم، درفاصلهٔ $0<t\leqslant\frac{\pi}{2}$، مثبت است. اگر در دستور دوم (۱۸)، x را به t ــ تبدیل کنیم، نتیجه می‌شود:

$$S(\pi-t)=S(t)$$

ازاین‌جا معلوم می‌شود که $S(t)$، درفاصلهٔ $\frac{\pi}{2}\leqslant t<\pi$ هم مثبت است. در این حالت، تابع $C(t)$، که مشتق آن برابر $S(t)$ ــ است، ضمن تغییر t از ۰ تا π، به‌طور یکنوا (مونوتون) از ۱ تا ۱ ــ نزولی است و هرمقدار واقع در این فاصله را تنها یکبار اختیار می‌کند. ازاین‌جا روشن می‌شود که بازهٔ $[0,\pi]$ تغییرپارامتر، با بخش بالایی محیط‌دایره، متقابلا به‌صورت یك‌ارزشی، پاسخ گوی یکدیگرند. همین‌داوری رادرمورد بازهٔ $[\pi,2\pi]$ مقدارهای پارامتر، و بخش پایینی محیط دایره هم می‌توان داشت؛ تنهاکافی است به‌این نکته توجه کنیم که [(۱۸) را ببینید]:

$$C(t+\pi)=-C(t),\ S(t+\pi)=-S(t)$$

اکنون، از روی دستور (۴) شمارهٔ ۳۲۹، طول کمان AM را محاسبه می‌کنیم (نقطهٔ M، نظیر مقدار t از پارامتر است). با توجه به (۱۷) و (۱۶) به دست می‌آید:

$$s(t)=\int_0^t \sqrt{[C'(t)]^2+[S'(t)]^2}\,dt=t$$

و این نشان می‌دهد که t، با زاویهٔ $\theta=AOM$، که با رادیان بیان می‌شود، برابر است و در این صورت

$$C(\theta)=x=\cos\theta,\ S(\theta)=y=\sin\theta$$

ضمناً، طول تمامی محیط دایره، بنابرابطهٔ ما، برابر 2π می‌شود؛ در نتیجه عددی را که به‌صورت نمادی π نشان داده بودیم، درست برابرهمان π می‌شود که در هندسه داشته‌ایم.

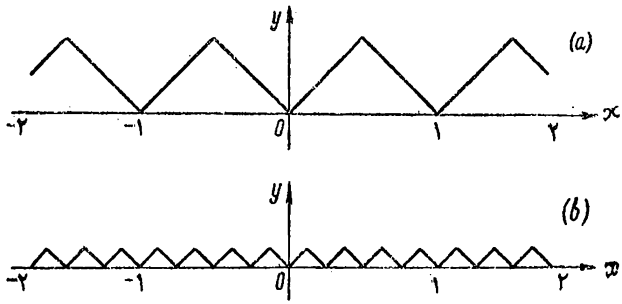
۴۴۴. مثال تابع پیوستهٔ بدون مشتق. نخستین نمونهٔ این نوع تابع‌ها را، ویرشتراس ساخت. تابع ویرشتراس، با این رشته تعریف می‌شود:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cdot\cos(b^n\pi x)$$

که در آن، $0<a<1$ و b یك عدد طبیعی فرد است $\left(\text{ضمناً } ab>1+\frac{3}{2}\pi\right)$. این رشته، به‌وسیلهٔ تصاعد متقارب $\sum_1^{\infty} a^n$ محدود می‌شود و، در نتیجه، [۴۳۰؛ ۴۳۱، قضیهٔ ۱]، به‌طور یکنواخت متقارب است و مجموع آن، تابعی است که همه‌جا، نسبت به x، پیوسته است. ویرشتراس، با بررسی دقیق، موفق شد ثابت کند که، برای این تابع، حتی در یك نقطه هم، مشتق متناهی وجود ندارد.

ما مثال ساده‌تر وان در واردن (B.L. Van der Waerden) را می‌آوریم. این مثال براساس این اندیشه ساخته شده است که منحنی نوسانی $y=\sin\omega x$ را با خط شکستهٔ نوسانی، عوض کنیم.

قدرمطلق تفاضل بین عدد x ونزدیك‌ترین عدد درست مجاور آن آرا با $u_0(x)$ نشان می‌دهیم. این تابع، در هر بازهٔ به‌صورت $\left[\frac{s}{2},\ \frac{s+1}{2}\right]$، که در آن s عددی درست است، یك تابع خطی است. تابع، پیوسته و دارای دورهٔ تناوب است. نمودار آن، خط



شکل ۶۲

شکسته‌ای است که در شکل ۶۲–a نشان داده شده است و پاره خطهای تشکیل‌دهندهٔ این خط شکسته، دارای ضریب زاویه‌های ± ۱ هستند.

سپس، برای $x = ۱, ۲, ۳, \ldots$ فرض می‌کنیم:

$$u_k(x) = \frac{u_0(۴^k x)}{۴^k}$$

این تابع، در بازهٔ به صورت $\left[\frac{s}{۲ \times ۴^k}, \frac{s+۱}{۲ \times ۴^k}\right]$ خطی‌است و، درهمین بازه، پیوسته و دارای دورهٔ تناوب $\frac{۱}{۴^k}$ است. نمودار این تابع هم، خطی شکسته است، ولی نسبت به نمودار قبلی، اندازهٔ پاره‌خطهای تشکیل‌دهندهٔ آن، کوچکتر است. مثلا، روی شکل ۶۲–b، نمودار تابع $u_۱(x)$ داده شده‌است. درهمهٔ حالت‌ها، ضریب‌زاویه‌های پاره‌خطهای جداگانهٔ خط شکسته، برابر است با ± ۱.

اکنون تابع $f(x)$ را، به‌ازای همهٔ مقدارهای حقیقی x، با برابری

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

تعریف می‌کنیم. معلوم است که $۰ \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{۱}{۲ \times ۴^k}$ $(k = ۰, ۱, ۲, \ldots)$، به‌طوری‌که، رشته به‌وسیلهٔ تصاعد متقارب $\sum_{۰}^{\infty} \frac{۱}{۲ \times ۴^k}$ محدود می‌شود، در نتیجه (شبیه حالت تابع ویرشتراس)، رشتهٔ ما متقارب یکنواخت و تابع $f(x)$، درهمه‌جا، پیوسته خواهد بود.

مقدار دلخواه $x = x_0$ را درنظر می‌گیریم: اگر آن‌را تا $\frac{۱}{۲ \times ۴^n}$ تقریب نقصانی و

اضافی محاسبه کنیم ($n=0, 1, 2, \ldots$)، می‌توانیم آن را بین دو عدد به‌صورت زیر محصور کنیم:

$$\frac{s_n}{2\times 4^n}\leqslant x_0\leqslant\frac{s_n+1}{2\times 4^n}$$

که در آن، s_n عددی درست است. معلوم است که بازه‌های بستهٔ

$$\Delta_n=\left[\frac{s_n}{2\times 4^n},\frac{s_n+1}{2\times 4^n}\right]\quad(n=0, 1, 2, \ldots)$$

به‌ترتیب، یکی در درون دیگری قرار دارد. در هر کدام از این بازه‌ها، چنان نقطهٔ x_n پیدا می‌شود که فاصلهٔ آن از نقطهٔ x_0، برابر نصف درازای بازه باشد:

$$|x_n-x_0|=\frac{1}{4^{n+1}}$$

روشن است که با صعود n، واریانت x_n به‌سمت x_0 میل می‌کند.

اکنون نسبت نموها را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}$$

ولی برای $k>n$، $\frac{1}{4^{k+1}}$ مضرب صحیحی از دورهٔ تناوب تابع $u_k(x)$ است، به‌طوری که $u_k(x_n)=u_k(x_0)$ و جمله‌های نظیر رشته، برابر صفر می‌شوند و می‌توان آن‌ها را حذف کرد. اگر هم $k\leqslant n$ باشد، در آن صورت، تابع $u_k(x)$، که در بازهٔ Δ_k خطی است، در بازهٔ Δ_n هم، که در درون آن واقع است، خطی خواهد بود، یعنی

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\pm 1\quad(k=0, 1, 2, \ldots, n)$$

به‌این‌ترتیب، سرانجام داریم:

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1)$$

به‌زبان دیگر، این نسبت، به‌ازای n فرد، برابر عدد زوج درست و به‌ازای n زوج، برابر عدد فرد درست است. ازاین‌جا روشن است که، به‌ازای $n\longrightarrow\infty$، نسبت نموها، به‌سمت هیچ حد متناهی میل نمی‌کند، به‌نحوی که تابع مفروض، به‌ازای $x=x_0$، دارای مشتق نیست.

§۴. آگاهی‌های تکمیلی دربارهٔ رشته‌های توانی

۴۴۵. عمل روی رشته‌های توانی. این شماره را به‌شرح مختصر عمل‌ها، برروی رشته‌های توانی اختصاص می‌دهیم (که دراساس هم، باآن‌ها آشنا هستیم)، تا نقطهٔ آغازی برای بحث‌های بعدی ما باشد.

دو رشتهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

شعاع تقارب هردو رشته را مخالف صفر، وکوچکترین آن‌ها را r می‌گیریم. در این‌صورت،همان‌طورکه می‌دانیم [۳۶۴، ۴°؛ ۳۸۹]، این‌رشته‌هارامی‌توان، به‌ازای $|x|<r$ جمع، تفریق و ضرب کرد؛ ضمناً، نتیجه‌ها هم، به‌صورت بسطی از توان‌های x درمی‌آیند:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0) x^n \qquad (3)$$

اگررشتهٔ (۲) را متحد با رشتهٔ (۱) درنظربگیریم، آن‌وقت، در درون بازهٔ‌تقارب، مجذور رشتهٔ توانی را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n$$

اگررشتهٔ اخیررا، با توجه به‌همین قاعده، دوباره در رشتهٔ (۱) ضرب‌کنیم واین روند را ادامه دهیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که رشتهٔ توانی را می‌توان، در درون بازهٔ تقارب خود، به‌طورکلی، با نمای طبیعی m، به‌توان رساند. ضمناً نتیجه، به‌صورت رشتهٔ توانی زیر درمی‌آید:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (4)$$

ضریب $a_n^{(m)}$ به‌ضریب‌های a_0، a_1، a_2، ...، a_n رشتهٔ اولیه‌بستگی دارد و،همان‌طور

که از (۳) نتیجه می‌شود، از آن‌ها و تنها به‌کمک جمع و ضرب حاصل می‌شود. به‌این اشاره، همیشه باید توجه داشته باشیم.

حالا، به‌خصوص، به‌مجموع مجموعهٔ نامتناهی از رشته‌های توانی می‌پردازیم که،در آینده، غالباً با آن سروکار خواهیم داشت. دنبالهٔ نامتناهی رشته‌های توانی زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}x^n \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

ازآن‌ها، رشتهٔ دوگانهٔ زیررا تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}x^n\right\} \qquad (5)$$

اگر به ازای مقداری از x، این رشته، با عوض کردن همهٔ جمله‌های‌آن با قدر-مطلق‌های آن‌ها، متقارب باشد، در آن صورت، رشتهٔ (۵) هم متقارب می‌شود و، ضمناً، مجموع‌آن $A(x)$، می‌تواند از راه سادهٔ یکی‌کردن‌جمله‌های متشابه، به‌صورت رشتهٔ‌توانی نشان داده شود:

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

که در آن $A_n=\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}$ $(n=0, 1, 2, \dots)$.

اثبات را می‌توان، به‌سادگی و با تکیه برقضیهٔ ۳ شمارهٔ ۳۹۳، انجام داد.

کاربرد این قضیهٔ مهم را، با چند مثال روشن می‌کنیم.

۱) تابع‌های زیررا، با فرض $|x|<1$ و $0<a<1$: به صورت رشته‌هایی برحسب توان‌های x درآورید:

$$\text{(a) } f_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\cdot\frac{a^m}{1+a^{2m}x^2},\quad \text{(b) } f_2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{a^m}{1+a^{2m}x^2}$$

(a) داریم:

$$\frac{a^m}{1+a^{2m}x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{m(2n+1)}x^{2n}$$

با درنظرگرفتن این رابطه و با تغییر ردیف جمع، خواهیم داشت:

$$f_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{(2n+1)m}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{(2n+1)m}}{m!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{a^{2n+1}}x^{2n}$$

چون رشتهٔ دوگانهٔ

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}a^{(2n+1)m}x^{2n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{1}{1-a^{2m}x^2}<\frac{1}{1-x^2}e^a$$

متقارب است، جابه‌جاکردن جمع‌ها، مانعی ندارد.

b) به‌طرز مشابهی،

$$f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot e^{-a^{2n+1}}\cdot x^{2n}$$

۲) باآغاز ازبسط تابع $x\,cotg\,x$ به‌کسرهای ساده [۴۴۱، ۹)]، اکنون آن را به‌صورت رشتهٔ‌توانی درآورید. برای سادگی‌کار، x را با πx عوض می‌کنیم، به‌طوری‌که

$$\pi x\cdot cotg\,(\pi x)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{m^2-x^2}$$

درحالت $|x|<1$، برای $m=1, 2, 3, \ldots$ غیرمشخص داریم:

$$\frac{x^2}{m^2-x^2}=\frac{\frac{x^2}{m^2}}{1-\frac{x^2}{m^2}}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{x^2}{m^2}\right)^n$$

با توجه به‌مثبت بودن جمله‌ها، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^2}{m^2-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}s_{2n}\cdot x^{2n}$$

که درآن

$$s_{2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2n}}\quad(n=1, 2, 3, \ldots)$$

به‌این‌ترتیب، برای $|x|<1$ داریم:

$$\pi x\cdot cotg\,(\pi x)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}s_{2n}\cdot x^{2n}$$

۳) به‌همین ترتیب، با آغاز از بسط تابع $x.\mathrm{cth}\,x$ به‌کسرهای ساده [۴۳۱، ۱۰)]، می‌توان بسط آن را به‌رشتهٔ توانی به‌دست آورد:

$$\pi x\cdot \mathrm{cth}\,(\pi x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}s_{2n}\cdot x^{2n}\quad(|x|<1)$$

درشمارهٔ ۴۴۹، ضریب‌های بسط‌های ۱) و ۲) را، با عبارت‌های دیگری هم‌خواهیم داد.

۴) درحالتی هم که رشته‌های نامتناهی (که بایدباهم جمع شوند)، به‌چندجمله‌ای‌های متناهی معمولی تبدیل شوند، قضیه به قوت خود باقی خواهد بود. به‌عنوان مثال، رشتهٔ لگاریتمی را با شروع ازرشتهٔ دوجمله‌ای ونمائی، به‌صورت بحث زیرمی‌آوریم.

برای $|x|<1$ وعدد غیرمشخص α داریم [۴۰۷، (۲۲)]:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\times 2}x^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\times 2\times 3}x^{3}+\cdots$$

با تثبیت x، جمله‌های این رشته را، به‌عنوان چندجمله‌ای صحیح نسبت به α، درنظر می‌گیریم. چون رشتهٔ

$$1+|\alpha|\cdot|x|+\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)}{1\times 2}|x|^{2}+\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)(|\alpha|+2)}{1\times 2\times 3}|x|^{3}+\cdots$$

به‌طوری‌که از معیار دالامبر به‌سادگی نتیجه می‌شود، متقارب است، در رشتهٔ قبل، طبق قضیه، می‌توان جمله‌های متشابه را، به‌صورت یک‌جمله نوشت:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha\left(x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots\right)+\cdots$$

ازطرف دیگر، معلوم است

$$(1+x)^{\alpha}=e^{\alpha\ln(1+x)}=1+\alpha\ln(1+x)+\cdots$$

از آن‌جا که هردو بسط، یکی هستند، با برابرکردن ضریب‌های α، نتیجه می‌شود:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots$$

یادآوری می‌کنیم که قضیهٔ ثابت شده را می‌توان دربارهٔ رشته‌های چندگانه و مثلاً رشتهٔ زیرهم به‌کاربرد:

$$\sum_{k=0,m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}a_{nkm}x^n\right\}$$

درواقع، کافی است، رشتهٔ دوگانه را، به‌رشتهٔ ساده تبدیل کنیم، تاکار به‌حالتی منجر شود که مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

۴۴۶. جایگذاری رشته در رشته. تابع $y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم که در بازهٔ $(-R, R)$، قابل بسط به‌رشتهٔ توانی (۱) باشد. علاوه برآن، تابع $\varphi(y)$ را هم‌مفروض می‌گیریم که، برای مقدارهای y در بازهٔ $(-\rho, \rho)$، به‌رشتهٔ توانی قابل بسط باشد:

$$\varphi(y)=\sum_{m=0}^{\infty}h_m y^m=h_0+h_1y+h_2y^2+\cdots+h_my^m+\cdots \qquad (۶)$$

اگر $|a_0|=|f(0)|<\rho$، درآن صورت، برای xهـای به‌قدرکافی کوچك هـم خواهیم داشت: $|f(x)|<\rho$، به‌طوری که تابع مرکب $\varphi|f(x)|$، دارای معنا می‌شود. تنها با شرط $|a_0|<\rho$، می‌توان تابع $\varphi(f(x))$ را در همسایگی نقطـهٔ $x=0$، از این طریق به‌رشته‌ای برحسب توان‌های x بسط داد که در (۶)، به‌جای y، رشتهٔ (۱) را قرار دهیم و، بعد از انجام عمل توان‌ها طبق (۴)، جمله‌های متشابه را یکی کنیم.

اثبات. با به‌حساب آوردن $|x|<R$، رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|=|a_0|+|a_1|\cdot|x|+|a_2|\cdot|x|^2+\cdots+|a_n|\cdot|x|^n+\cdots$$

را درنظرمی‌گیریم. باتوجه به‌پیوستگی مجموع این‌رشته [۴۳۷، ۲°) واین‌که $|a_0|<\rho$، نابرابری زیر برای xهای به‌قدرکافی کوچك، برقرار است:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|<\rho \qquad (۷)$$

وبنابراین، رشتهٔ زیرمتقارب می‌شود:

$$|h_0|+\sum_{m=1}^{\infty}|h_m|\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n\right)^m$$

اگرشبیه (۴) فرض کنیم:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x|^n\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(m)}|x|^n$$

آن‌وقت، رشتهٔ قبلی را می‌توان این‌طور نوشت:

$$|h_0|+\sum_{m=1}^{\infty}|h_m|\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(m)}\cdot|x|^n\Big)$$

چون $\alpha_n^{(m)}$ از $|a_0|$، $|a_1|$، ...، $|a_n|$ به‌کمك جمع و ضرب [۴۴۵]ـ کاملاً شبیهٔ $a_n^{(m)}$ از a_0، a_1، ...، a_n به‌دست می‌آید، روشن است که $|a_n^{(m)}|\leqslant\alpha_n^{(m)}$. درنتیجه، برای مقدارهای مذکور x، رشتهٔ زیرهم متقارب است:

$$|h_0|+\sum_{m=1}^{\infty}|h_m|\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n^{(m)}|\cdot|x|^n\Big)$$

بنابراین، حکم آخر شمارهٔ قبل را می‌توان درمورد رشتهٔ

$$h_0+\sum_{m=1}^{\infty}h_m\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big)^m=h_0+\sum_{m=1}^{\infty}h_m\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(m)}\cdot x^n\Big)$$

به‌کار برد که، درنتیجه، قضیه را ثابت می‌کند.

به‌این‌ترتیب، حوزهٔ تغییر x، که در آن، امکان بسط تابع $\varphi(f(x))$ به‌رشته‌ای برحسب توان‌های x وجود دارد، به‌جز شرط معلوم $|x|<R$، باید با نابرابری (۷) هم سازگار باشد. درحالت $R=+\infty$، شرط اول و درحالت $\rho=+\infty$، شرط دوم حذف‌می‌شود.

در بیشتر موردهای‌کاربرد قضیه،کافی است بدانیم که، بسط برای مقدارهای کوچك $|x|$ برقرار است. ولی، اگر بخواهیم از تمامی حوزهٔ کاربرد رشتهٔ حاصل استفاده کنیم، به‌بررسی جداگانه‌ای نیاز دارد.

حالت ساده‌ای از آن را، به‌عنوان مثال، می‌آوریم. تابع

$$\varphi(y)=\sum_{m=0}^{\infty}y^m$$

را در بازهٔ $[-1\,,\,1]$ $[\rho=1]$ درنظر می‌گیریم و به‌جای y، تابع $f(x)=2x-x^2$ را قرار می‌دهیم $[R=+\infty]$. تابع مرکب

$$\varphi(f(x))=\frac{1}{1-(2x-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

تنها وقتی معنا دارد که داشته باشیم:

$$-1<2x-x^2<1\ \Rightarrow\ 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2};\ x\neq1$$

بسط آن، برحسب توان‌های x، برای ما معلوم است*

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

این رشته، برای $-1<x<1$، متقارب است. در مجموع، برابری

$$\sum_{m=0}^{\infty}(2x-x^2)^m=1+2x+3x^2+\cdots$$

وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$1-\sqrt{2}<x<1$$

مقایسهٔ این شرط با آن‌چه از بحث برمی‌آید، جالب است. طبق بحث ما باید داشته باشیم [(۷) را ببینید]:

$$2|x|+|x|^2<1 \quad \text{یا} \quad 1-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}-1$$

همان‌طور که می‌بینیم، برابری حاصل درعمل، درحوزهٔ وسیع‌تری به‌کار می‌رود.

دراین‌جا هم، باید امکان تعمیم بعدی قضیه را در نظر گرفت. مثلاً، فرض کنید رشتهٔ دوتایی

$$\varphi(y, z)=\sum_{k,m=0}^{\infty}h_{km}y^kz^m$$

به‌ازای $|y|<\rho$ و $|z|<\rho$ متقارب و دو رشتهٔ

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \quad z=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

به‌ازای $|x|<R$ متقارب باشند، دراین صورت، با شرط‌های $|a_0|<\rho$ و $|b_0|<\rho$، می‌توان تابع مرکب $\varphi(f(x), g(x))$ را در همسایگی $x=0$، برحسب توان‌های x بسط داد، به‌شرطی که به‌جای y و z، رشته‌های نظیر را بگذاریم، عمل‌های توان و ضرب را انجام دهیم و جمله‌های متشابه را یکی کنیم.

---

*) ۳۹۰، ۱) را ببینید. همین نتیجه را می‌توانستیم از مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله [۴۳۸، ۸°] تصاعد زیرهم به‌دست آوریم:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

۴۴۷. مثال‌ها. ۱) چندجملهٔ‌اول بسط‌تابع $\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ را برحسب توان‌های x، پیداکنید. برای $|x|<1$ داریم.

$$\frac{1}{e}\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}\cdot e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots}=$$

$$=1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\cdots\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\cdots\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^3+$$

$$+\frac{1}{24}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots\right)^4+\frac{1}{120}\left(-\frac{x}{2}+\cdots\right)^5+\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{2447}{5760}x^4-\frac{959}{2304}x^5+\cdots$$

[مسأله‌های مشابه نزدیك به‌این مسأله را، در **۱۲۵** بررسی کرده‌ایم].

۲) مسألهٔ به‌دست آوردن رشتهٔ دوجمله‌ای را، با شروع از رشته‌های لگاریتمی و نمائی مطرح می‌کنیم.

به‌ازای $|x|<1$ و α نامشخص، به‌روشنی داریم:

$$(1+x)^{\alpha}=e^{\alpha\ln(1+x)}=e^{\alpha(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots)}=$$

$$=1+\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)+\frac{\alpha^2}{21}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2+\cdots=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\times 2}x^2+\cdots$$

صورت چند ضریب اول، فوراً معلوم می‌شود. ضریب جملهٔ عمومی شامل x^n راهم، می‌توان، ازچنین ملاحظه‌هایی به‌دست آورد. مستقیماً روشن است که این‌ضریب، به‌صورت چندجمله‌ای صحیحی نسبت به α و از درجهٔ n است: $Q_n(\alpha)$. چون به‌ازای $\alpha=0, 1, 2, \ldots, (n-1)$، جملهٔ شامل x^n دربسط وجود ندارد، باید ضریب x^n، در نقطه‌های مذکور، برابر صفرشود. درنتیجه، این ضریب به‌صورت زیراست:

$$Q_n(\alpha)=c\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

به‌ازای $\alpha=n$، باید ضریب x^n برابر واحد شود: $Q_n(n)=1$. بنابراین $c=\frac{1}{n!}$ و بالاخره

$$Q_n(\alpha)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\times 2\times\cdots\times n}$$

۳) $f(x)$ را تابعی می‌گیریم که برحسب توان‌های x قابل بسط باشد و، ضمناً، جملهٔ آزاد (مقدار ثابت) نداشته باشد:

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

دراین صورت، بنابر قضیهٔ کلی، تابع $g(x)=e^{f(x)}$ هم، برای همان مقدارهای x، قابل بسط به‌رشته است؛ ضمناً روشن است که، دراین‌جا، جملهٔ آزاد برابر است با واحد. می‌خواهیم این بسط را پیدا کنیم.

دراین مورد، می‌توان از روش ضریب‌های نامعین استفاده کرد. فرض کنید

$$g(x)=e^{f(x)}=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

اگر از دوطرف این برابری مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید.

$$e^{f(x)}\cdot f'(x)=b_1+2b_2x+3b_3x^2+\cdots+nb_nx^{n-1}+\cdots$$

واگر، به‌جای عامل‌های سمت‌چپ، بسط آن‌ها را قرار دهیم:

$$(1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots)=$$
$$=b_1+2b_2x+3b_3x^2+\cdots$$

که به‌دستگاه معادله‌های زیرمنجر می‌شود:

$$a_1=b_1,\ 2a_2+a_1b_1=2b_2,\ 3a_3+2a_2b_1+a_1b_2=3b_3,\ \cdots$$
$$\cdots,\ na_n+(n-1)a_{n-1}b_1+\cdots+2a_2b_{n-2}+a_1b_{n-1}=nb_n,\ \cdots \quad (8)$$

که از آن، ضریب‌های مجهول b متعلق به‌رشته، قابل محاسبه است.

به‌عنوان مثال، ازاین روش، برای حل مسأله زیر (ویرشتراس) استفاده می‌کنیم.

ثابت کنید بسط تابع

$$g(x)=(1-x)e^{\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^{m-1}}{m-1}}$$

با جمله‌های $\dots+\frac{x^m}{m}-1$ آغاز می‌شود وهمهٔ ضریب‌های آن، ازلحاظ قدرمطلق، از واحد کمترند.

$g(x)$ را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$g(x)=e^{\ln(1-x)+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^{m-1}}{m-1}}=e^{-\frac{x^m}{m}-\frac{x^{m+1}}{m+1}-\dots}$$

آن‌وقت، بخش اول حکم روشن می‌شود؛ بخش دوم حکم را هم می‌توانیم با استقرای ریاضی ثابت‌کنیم. فرض می‌کنیم، همهٔ ضریب‌های b_k، با اندیس‌کمتر از n، از لحاظ قدرمطلق، کوچکتر از واحد باشند، چون درحالت مفروض داریم:

$$a_k=0\ (k<m \text{ برای}); \quad a_k=-\frac{1}{k}(ka_k=-1)\ (k\geqslant m \text{ برای})$$

پس، از برابری nام برابری‌های (۸)، روشن می‌شودکه ضمناً داریم: $|b_n|<1$.

[پیشنهاد می‌شودکه از این روش، برای مثال‌های ۱) و ۲) استفاده شود].

۴) همان معادله‌های (۸)، درجای دیگری هم، ممکن است به‌کار آیند. فرض‌کنید، بسط تابع

$$g(x)=1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots+b_nx^n+\dots$$

مفروض باشد و بخواهیم بسط تابع

$$f(x)=\ln g(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n+\dots$$

را به‌دست آوریم. به‌سادگی می‌توان متوجه شدکه ضریب‌های a و b، با همان رابطه‌های (۸) به‌هم مربوط‌اند. ولی این‌بار، باید ضریب‌های a را پیداکرد.

۵) نشان دهیدکه حاصل‌ضرب نامتناهی

$$F(x)=\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^mx)=(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\dots\ (|q|<1)$$

را، به‌ازای مقدارهای به‌قدر کافی کوچك x، می‌توان برحسب توان‌های x بسط داد و ضریب‌های این بسط را پیداکنید.

حاصل‌ضرب، به‌ازای $|x|<1$، متقارب و دارای مقداری مثبت‌است. با لگاریتم‌گرفتن، به‌دست می‌آید:

$$\ln F(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\ln(1+q^mx)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(q^mx-\frac{1}{2}q^{2m}x^2+\dots\right)$$

اگر در این رشته، همه جمله‌ها را با قدرمطلق‌های آن‌ها عوض کنیم، به‌رشته‌ای متقارب می‌رسیم. از این‌جا [۴۴۵] نتیجه می‌شود که $\ln F(x)$، در همسایگی صفر، برحسب توان‌های x، قابل بسط است و، همراه با آن [با توجه به‌قضیهٔ شمارهٔ ۴۴۶]، عبارت زیر هم، بسط می‌یابد:

$$F(x)=e^{\ln F(x)}$$

به‌این‌ترتیب، برای xهای به‌قدر کافی کوچک، داریم:

$$F(x)=۱+b_۱x+b_۲x^۲+\dots+b_nx^n+\dots$$

که باید ضریب‌های $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n، ... آن را پیدا کرد. ساده‌ترین راه این است که از برابری واضح زیر آغاز کنیم:

$$F(x)=(۱+qx)\cdot F(qx)$$

که با استفاده از بسط، به‌این صورت نوشته می‌شود:

$$۱+b_۱x+b_۲x^۲+\dots+b_nx^n+\dots=$$
$$=(۱+qx)(۱+b_۱qx+b_۲q^۲x^۲+\dots+b_nq^nx^n+\dots)$$

که با توجه به‌قضیهٔ مربوط به‌اتحاد رشته‌های توانی، داریم:

$$b_۱q+q=b_۱,\ b_۲q^۲+b_۱q^۲=b_۲,\dots,\ b_nq^n+b_{n-۱}q^n=b_n,\dots$$

یا

$$b_۱=\frac{q}{۱-q},\ b_۲=\frac{b_۱q^۲}{۱-q^۲},\dots,\ b_n=\frac{b_{n-۱}q^n}{۱-q^n},\dots$$

و بالاخره

$$b_۱=\frac{q}{۱-q},\ b_۲=\frac{q^۳}{(۱-q)(۱-q^۲)},\dots,$$
$$b_n=\frac{q^{\frac{n(n-۱)}{۲}}}{(۱-q)(۱-q^۲)\dots(۱-q^n)},\dots$$

۶) بسط تابع $\frac{\sin x}{x}$ را به‌حاصل‌ضرب نامتناهی [۴۰۸] و به‌رشتهٔ نامتناهی [۴۰۴، (۱۲)] انتخاب می‌کنیم و لگاریتم‌های آن‌ها را برابر قرار می‌دهیم [۴۰۱، ۴°]:

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\dots\right)$$

و یا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\dots\right)=\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\dots\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\dots\right)^2+\dots$$

با بسط سمت‌چپ وسمت راست برحسب توان‌های x [۴۴۵، ۴۴۶] و با متحدکردن ضریب‌ها، به برابری‌های زیرمی‌رسیم:

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6},\ \frac{1}{2\pi^4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{180},\dots$$

و از آن‌جا

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ ^{*},\ \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\dots$$

همین دستورها را، در ۴۴۹، با ملاحظه‌های دیگری به‌دست خواهیم آورد.

۷) اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $(-R, R)$، قابل بسط به‌رشتهٔ توانی (۱) باشد و $\bar{x}$ را نقطهٔ غیرمشخصی ازاین بازه‌بگیریم، می‌توان تابع‌را، در همسایگی این نقطه، برحسب توان‌های $x-\bar{x}$ به‌صورت رشته بسط داد.

در(۱)، $x=\bar{x}+y$ می گذاریم. بنابرقضیهٔ کلی، (تنها باعوض‌کردن نقش x و y)، مادام که داشته باشیم: $|y|<R-|\bar{x}|$ یا $|\bar{x}|+|y|<R$، می‌توان بسط را برحسب توان‌های y، یعنی برحسب توان‌های $x-\bar{x}$ به‌دست آورد:

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k y^k=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x-\bar{x})^k$$

اگر در رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\bar{x}+y)^n$، همه توان‌ها را عمل و سپس، جمله‌های متشابه را جمع‌آوری کنیم. به‌سادگی، ضریب‌های این بسط پیدا می‌شود:

---

*) شما ازاین نتیجه‌گیری، اطلاع دارید [۴۴۰، (۴) را ببینید].

$$A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = f(\bar{x})$$

و به‌طور کلی

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\times 2\times \dots \times k} a_n \bar{x}^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n \bar{x}^{n-k} = \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}$$

که با توجه به ۴۳۸، ۹°، نتیجهٔ نامنتظری نیست.

ما تنها برای سادگی کار، بسط رشتهٔ اول را برحسب توان‌های x درنظر گرفتیم. اگر $f(x)$ را برحسب توان‌های $x-x_0$ درنظر می‌گرفتیم، شیوهٔ کار تغییری نمی‌کرد.

به‌یاد بیاوریم که تابع $f(x)$، وقتی که در همسایگی $x=x_0$ برحسب توان‌های $x-x_0$ قابل بسط باشد*، تحلیلی در این نقطه نامیده می‌شود. به‌این‌ترتیب، ثابت کردیم که، اگر تابعی در یک نقطه تحلیلی باشد، در همهٔ نقطه‌های یک همسایگی آن، تحلیلی خواهد بود.

این حکم، درمورد تابع چند متغیره هم درست است.

۸) به‌عنوان آخرین مثال، بسط تابع

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}} = [1+(\alpha^2-2x\alpha)]^{-\frac{1}{2}}$$

را، با تثبیت x دلخواه، برحسب توان‌های α، بررسی می‌کنیم. تنها به‌شرطی که داشته باشیم: $|\alpha|^2+2|x|\cdot|\alpha|<1$، امکان چنین بسطی، با توجه به‌قضیهٔ ما، تضمین می‌شود. به‌سادگی معلوم می‌شود که ضریب α^n $(n\geqslant 1)$ یک‌چندجمله‌ای $P_n = P_n(x)$، از درجهٔ nام است، به‌طوری که

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}} = 1+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\dots+P_n\alpha^n+\dots \qquad (9)$$

برای تعیین این ضریب‌ها، از برابری (۹) نسبت به α مشتق می‌گیریم:

$$\frac{x-\alpha}{(\sqrt{1-2x\alpha+a^2})^3} = P_1+2P_2\alpha+\dots+nP_n\alpha^{n-1}+\dots$$

---

*) این رشته، الزاماً رشتهٔ تیلور آن است [۴۳۸، ۹].

با مقایسهٔ این نتیجه با (۹)، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$(1-2x\alpha+\alpha^2)(P_1+2P_2\alpha+\cdots+nP_n\alpha^{n-1}+\cdots)=$$
$$=(x-\alpha)(1+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\cdots+P_n\alpha^n+\cdots)$$

اکنون، ضریب‌های توان‌های یکسان α را در دو طرف، برابر قرار می‌دهیم؛ قبل از همه به‌دست می‌آید:

$$P_1=x,\ 2P_2-2xP_1=-1+xP_1 \Rightarrow P_2=\frac{3x^2-1}{2}$$

و به‌طور کلی

$$(n+1)P_{n+1}-2nx\cdot P_n+(n-1)P_{n-1}=xP_n-P_{n-1}$$

ویا

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0$$

از روی این دستور بازگشتی، می‌توان، به‌کمك دوچندجمله‌ای نخستین، بقیه را به‌ترتیب محاسبه کرد.

می‌بینیم که چندجمله‌ای‌های P_1 و P_2، با دوچندجمله‌ای اول لژاندر تطبیق می‌کنند؛ دستور اخیرهم با دستور مشابه (۱۱) شمارهٔ ۳۲۰ (که ازروی آن، چندجمله‌ای‌های لژاندر محاسبه می‌شوند) یکی است. ازاین‌جا، نتیجه می‌گیریم که، ضریب‌های بسط (۹)، همان چندجمله‌ای‌های لژاندر هستند.

به‌همین مناسبت، تابع با دو متغیر α و x

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$

را «تابع مولد» چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌نامند. از بسط (۹) می‌توان برای مطالعهٔ ویژگی‌های این چندجمله‌ای‌ها، استفاده کرد.

۴۴۸. تقسیم رشته‌های توانی. نمونهٔ مهم کاربرد قضیهٔ مربوط به‌جایگذاری رشته در رشته، به‌مسألهٔ تقسیم رشته‌های توانی مربوط می‌شود.

فرض کنیم، جملهٔ a_0 (جملهٔ آزاد) رشتهٔ (۱) مخالف صفر باشد. این رشته را، به‌صورت زیر درمی‌آوریم:

$$a_0\left(1+\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\cdots+\frac{a_n}{a_0}x^n+\cdots\right)=a_0(1+y)$$

که در آن داریم:

$$y=\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\dots+\frac{a_n}{a_0}x^n+\dots$$

در این‌صورت

$$\frac{1}{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots}=\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{1+y}=$$

$$=\frac{1}{a_0}(1-y+y^2-\dots+(-1)^my^m+\dots)$$

رشتهٔ اخیر، نقش رشتهٔ (۶) را به‌عهده دارد. ضمناً در این‌جا، ρ برابر واحد است. طبق قضیهٔ کلی، این عبارت را می‌توان برحسب توان‌های x بسط داد:

$$\frac{1}{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots}=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n+\dots$$

این بسط، دست‌کم برای مقدارهای به‌قدر کافی کوچك x، و مثلاً برای آن‌هایی که در نابرابری زیر صدق کنند، وجود دارد:

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right|\cdot|x|+\left|\frac{a_2}{a_0}\right|\cdot|x|^2+\dots+\left|\frac{a_n}{a_0}\right|\cdot|x|^n+\dots<1$$

رشتهٔ توانی دوم

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n+\dots$$

را، با شعاع تقارب مخالف صفر، در نظر می‌گیریم. آن‌وقت، خارج‌قسمت

$$\frac{b_0+b_1x+\dots+b_nx^n+\dots}{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots}$$

برای مقدارهای به‌قدر کافی کوچك x، می‌تواند به‌صورت حاصل‌ضرب زیر نشان داده‌شود:

$$(b_0+b_1x+\dots+b_nx^n+\dots)(c_0+c_1x+\dots+c_nx^n+\dots)$$

و در نتیجه، دوباره به‌صورت یك رشتهٔ توانی درمی‌آید:

$$d_0+d_1x+\dots+d_nx^n+\dots$$

ضریب‌های این رشته را، ساده‌تر از همه، می‌توان با روش ضریب‌های نامعین و با

شروع از رابطهٔ

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)(d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n+\cdots)=$$
$$=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

به‌دست‌آورد، که در آن، ضریب‌های a و b، مقدارهایی معلوم هستند. رشته‌های سمت‌چپ را، طبق قاعدهٔ کلی [۴۴۵] در هم ضرب می‌کنیم و، سپس، ضریب‌های توان‌های x را در دو طرف برابری یکسان می‌گیریم؛ مجموعه‌ای نامتناهی از معادله‌ها به‌دست می‌آید:

$$a_0d_0=b_0,\quad a_0d_1+a_1d_0=b_1,\quad a_0d_2+a_1d_1+a_2d_0=b_2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ a_0d_n+a_1d_{n-1}+\cdots+a_{n-1}d_1+a_nd_0=b_n,\ \ldots \qquad (10)$$

چون ضریب a_0، مخالف صفر فرض شده است، از معادلهٔ اول فوراً حاصل‌می‌شود: $d_0=\frac{b_0}{a_0}$؛ سپس، از دومی به‌دست می‌آید $d_1=\frac{b_1-a_1d_0}{a_0}=\frac{a_0b_1-a_1b_0}{a_0^2}$ و غیره. درحالت کلی، به‌شرط معلوم‌بودن n ضریب نخستین d_0، d_1، ...، d_{n-1}، معادلهٔ $(n+1)$ام شامل یك مجهول d_n می‌شود و، درنتیجه، به‌سادگی به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، به‌کمك معادله‌های (۱۰)، می‌توان پشت سر هم، ضریب‌های خارج قسمت را و، ضمناً، همگی به‌صورت یك‌ارزشی پیدا کرد.

مثال‌ها. ۱) چند جملهٔ اول این خارج‌قسمت را پیدا کنید:

$$\frac{x}{\ln\frac{1}{1-x}}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots}$$

معادله‌های (۱۰) در این‌جا، به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$d_0=1,\quad d_1+\frac{1}{2}d_0=0,\quad d_2+\frac{1}{2}d_1+\frac{1}{3}d_0=0,$$
$$d_3+\frac{1}{2}d_2+\frac{1}{3}d_1+\frac{1}{4}d_0=0,\ \ldots$$

از این‌جا: $d_0=1$، $d_1=-\frac{1}{2}$، $d_2=-\frac{1}{12}$، $d_3=-\frac{1}{24}$، ... بنابراین

$$\frac{x}{\ln\frac{۱}{۱-x}} = ۱ - \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۱۲}x^{۲} - \frac{۱}{۲۴}x^{۳} - \dots$$

۲) tgx را به‌عنوان خارج‌قسمت $sinx$ بر $cosx$ در نظر بگیرید و با توجه به‌معلوم‌بودن بسط $sinx$ و $cosx$ [۴۰۴، (۱۲) و (۱۳)]، بسط tgx را درهمسایگی ۰ پیدا کنید.

وجود چنین بسطی، با توجه به‌قضیهٔ کلی، از پیش معلوم است. چون tgx، تابعی است فرد، بنابراین بسط آن، تنها شامل توان‌های فرد x است و ضریب $x^{۲n-۱}$ را در این بسط، می‌توان به‌صورت $\frac{T_n}{(۲n-۱)!}$ گرفت. بنابراین داریم:

$$tgx = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{T_n}{(۲n-۱)!} x^{۲n-۱} \qquad (۱۱)$$

و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} T_n \frac{x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!} \cdot \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} = \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n-۱} \frac{x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!}$$

روشن است که $T_۱ = ۱$. برای تعیین سایر عددهای T_n، ضریب‌های $x^{۲n-۱}$ را در دو طرف، برابر قرار می‌دهیم، به‌دنباله‌ای از معادله‌ها به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\frac{T_n}{(۲n-۱)!} - \frac{T_{n-۱}}{(۲n-۳)!}\cdot\frac{۱}{۲!} + \underset{(n=۲,۳,\dots)}{\frac{T_{n-۲}}{(۲n-۵)!}\cdot\frac{۱}{۴!}} - \dots = (-۱)^{n-۱}\frac{۱}{(۲n-۱)!}$$

و یا با ضرب در $(۲n-۱)!$

$$T_n - C^{۲}_{۲n-۱}T_{n-۱} + C^{۴}_{۲n-۱}T_{n-۲} + \dots = (-۱)^{n-۱}$$

چون، همهٔ عددهای $C^{k}_{۲n-۱}$، عددهایی درست‌اند، متقاعد می‌شویم که ضریب‌های T_n هم، باید همگی، عددهایی درست باشند. اینک، مقدار چندتایی از آن‌ها:

$$T_۱ = ۱،\ T_۲ = ۲،\ T_۳ = ۱۶،\ T_۴ = ۲۷۲،\ T_۵ = ۷۹۳۶،\ \dots$$

به‌این ترتیب:

$$tgx = x + \frac{۱}{۳}x^{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^{۵} + \frac{۱۷}{۳۱۵}x^{۷} + \frac{۶۲}{۲۸۳۵}x^{۹} + \dots$$

در شمارهٔ بعد، راه دیگری برای محاسبهٔ این ضریب‌ها و، به‌خصوص، حوزهٔ کاربرد

این بسط را نشان خواهیم داد.

۴۴۹. عددهای برنولی و بسطهایی که در آن‌ها، با این عددها برخورد می‌کنیم. باز به‌یك نمونه از تقسیم می‌پردازیم، که اهمیت و کاربرد زیادی دارد.

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots}=\frac{1}{1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots}$$

طبق حکم کلی **۴۴۸**، این خارج‌قسمت، دست‌کم، برای مقدارهای به‌قدر کافی کوچك x، می‌تواند به‌صورت رشتهٔ توانی درآید:

$$\frac{x}{e^x-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n!}x^n \qquad (12)$$

از آن جهت، ضریب‌ها را به صورت $\frac{\beta_n}{n!}$ اختیار کردیم که(همان‌طور که‌خواهیم دید)،امکان تعیین متوالی آن‌ها را، راحت‌تر خواهد کرد.

با شروع از رابطهٔ

$$\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{\beta_1}{1!}x+\frac{\beta_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{\beta_n}{n!}x^n+\cdots\right)=1$$

ضریب‌های توان‌های مختلف x^n ($n=1, 2, 3, \ldots$) را در سمت چپ، برابر صفر قرار می‌دهیم؛ به‌معادله‌هایی به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{n!1!}\beta_n+\frac{1}{(n-1)!2!}\beta_{n-1}+\cdots+\frac{1}{(n-k+1)!k!}\beta_{n-k+1}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{1!n!}\beta_1+\frac{1}{(n+1)!}=0$$

که اگر دو طرف را در $(n+1)!$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$C^1_{n+1}\beta_n+C^2_{n+1}\beta_{n-1}+\cdots+C^k_{n+1}\beta_{n+1-k}+\cdots+C^n_{n+1}\beta_1+1=0$$

با استفاده‌از شباهت با دوجمله‌ای نیوتون،می‌توان این‌معادله‌را، به‌صورت نمادی، چنین نوشت:

$$(\beta+1)^{n+1}-\beta^{n+1}=0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

پس از به‌توان رساندن دو جمله‌ای، از روی قاعدهٔ معمولی، و ساده‌کردن جملهٔ بزرگتر، باید به‌جای توان β^k، ضریب β_k را نوشت. بنابراین، برای تعیین عددهای β_n $(\ldots, 3, 2, 1=n)$، به‌دستگاهی نامتناهی از عددهای زیر می‌رسیم:

$$2\beta_1+1=0,\quad 3\beta_2+3\beta_1+1=0,\quad 4\beta_3+6\beta_2+4\beta_1+1=0,$$

$$5\beta_4+10\beta_3+10\beta_2+5\beta_1+1=0, \ldots$$

که از آن‌ها، به‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\beta_1=-\frac{1}{2},\ \beta_2=\frac{1}{6},\ \beta_3=0,\ \beta_4=-\frac{1}{30},\ \beta_5=0,\ \beta_6=\frac{1}{42},\ \beta_7=0,$$

$$\beta_8=-\frac{1}{30},\ \beta_9=0,\ \beta_{10}=\frac{5}{66},\ \beta_{11}=0,\ \beta_{12}=-\frac{691}{2730},\ \beta_{13}=0,$$

$$\beta_{14}=\frac{7}{6},\ \beta_{15}=0,\ \beta_{16}=-\frac{3617}{510},\ \beta_{17}=0,\ \beta_{18}=\frac{43867}{798},\ \beta_{19}=0,$$

$$\beta_{20}=\frac{174611}{330}, \ldots$$

از آن‌جا که، عددهای β، از معادله‌های خطی با ضریب‌های درست به‌دست‌می‌آیند، همهٔ آن‌ها گویا هستند. به‌طورکلی، می‌توان به‌سادگی ثابت‌کرد که عددهای β با اندیس فرد (به‌جز اولی)، برابرند باصفر. در واقع، در برابری (۱۲) با نقل جملهٔ $-\frac{x}{2}$ به‌سمت چپ، به‌روشنی به‌تابعی زوج در سمت چپ، خواهیم رسید:

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}=\frac{x}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}$$

در این حالت، بسط آن

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta_n}{n!}x^n$$

نمی‌تواند شامل توان‌های فرد x باشد. آن‌چه لازم بود ثابت شد.

برای عددهای β با اندیس زوج، علامت‌های عادی‌تر می‌آوریم. با فرض

$$\beta_{۲n}=(-۱)^{n-۱}B_n^*$$

به‌نحوی که

$$B_۱=\frac{۱}{۶},\ B_۲=\frac{۱}{۳۰},\ B_۳=\frac{۱}{۴۲},\ B_۴=\frac{۱}{۳۰},$$

$$B_۵=\frac{۵}{۶۶},\ B_۶=\frac{۶۹۱}{۲۷۳۰},\ B_۷=\frac{۷}{۶},$$

$$B_۸=\frac{۶۳۱۷}{۵۱۰},\ B_۹=\frac{۴۳۸۶۷}{۷۹۸},\ B_{۱۰}=\frac{۱۷۴۶۱۱}{۳۳۰}$$

و همین عددهای B_n هستندکه عددهای برنولی نامیده می‌شوند (به‌نام ژاکوب برنولی، که برای نخستین‌بار، ضمن مطالعهٔ مجموع توان‌های متوالی عددهای طبیعی با نماهای طبیعی، با آن‌ها، برخوردکرد). عددهای برنولی، در بسیاری از مساله‌های آنالیز ریاضی، نقشی اساسی به‌عهده دارند.

اگر برای سادگی کار، x را به $۲x$ تغییر می‌دهیم، در پایان بسط زیر می‌رسیم:

$$x\cdot\operatorname{cth} x=۱+\frac{۲^۲B_۱}{۲!}x^۲-\frac{۲^۴B_۲}{۴!}x^۴+\ \dots\ +(-۱)^{n-۱}\frac{۲^{۲n}B_n}{(۲n)!}\cdot x^{۲n}+\ \dots\ =$$

$$=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۲^{۲n}B_n}{(۲n)!}\cdot x^{۲n}\qquad(۱۳)$$

که برای مقدارهای به‌قدرکافی کوچك x، وجود دارد.

در ۴۴۵، ۳)، این بسط را داشتیم:

$$\pi x\cdot\operatorname{cth}(\pi x)=۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}s_{۲n}\cdot x^{۲n}$$

که درآن، مجموع رشتهٔ $\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{m^{۲n}}$ به‌وسیلهٔ $s_{۲n}$ نشان داده شده است. در رابطهٔ (۱۳)هم، با عوض‌کردن x به πx، آن‌را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\pi x\cdot\operatorname{cth}(\pi x)=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{(۲\pi)^{۲n}B_n}{(۲n)!}\cdot x^{۲n}$$

روشن است‌که این دو بسط باید متحد باشند، در این‌جا

---

*) به‌زودی خواهیم دیدکه همهٔ B_nها، مثبت‌اند.

$$B_n=\frac{۲(۲n)!}{(۲\pi)^{۲n}}\cdot s_{۲n}$$

به‌نحوی که همهٔ عددهای B_n مثبت‌اند. چون به‌ازای $n\to\infty$، $s_{۲n}\to ۱$، پس از این رابطه روشن می‌شود که عددهای برنولی، با ترقی شمارهٔ آن‌ها، بی‌نهایت‌ترقی می‌کنند*.

در ضمن، به‌عبارت‌های سودمندی که برای مجموع $s_{۲n}$ به‌دست می‌آید، توجه کنیم:

$$s_{۲n}=\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{m^{۲n}}=\frac{(۲\pi)^{۲n}}{۲(۲n)!}\cdot B_n$$

و در حالت‌های خاص [با ۴۴۷، ۶) مقایسه کنید]:

$$s_۲=\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{m^۲}=\frac{\pi^۲}{۶},\quad s_۴=\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۱}{m^۴}=\frac{\pi^۴}{۹۰}$$

یادآوری می‌کنیم که برای $\pi x\cdot cotg(\pi x)$ بسطی داشتیم [۴۴۵، ۲)] که با ضریب‌های مجموع $s_{۲n}$ بستگی داشتند:

$$\pi x\cdot cotg(\pi x)=۱-۲\sum_{n=۱}^{\infty}s_{۲n}\cdot x^{۲n} \qquad (۱۴)$$

که اگر در آن πx را به x تبدیل کنیم و به‌جای $s_{۲n}$، مقدار آن‌را برحسب عددهای برنولی قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$x\cdot cotg\,x=۱-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^{۲n}B_n}{(۲n)!}x^{۲n} \qquad (۱۵)$$

چون بسط (۱۴) به‌ازای $|x|<۱$ برقرار است، بنابراین، بسط (۱۵) به‌ازای $|x|<\pi$ واقعیت دارد. ولی به‌ازای $x=\pm\pi$، سمت چپ برابری (۱۵) بی‌نهایت می‌شود و، بنابراین، رشتهٔ سمت‌راست، برای $x=\pm\pi$ و به‌خصوص برای $|x|>\pi$، متقارب نیست؛ شعاع تقارب آن، برابر است با π**.

---

*) اگرچه، همان‌طورکه دیدیم، این ترقی، به‌صورتی عجیب و غریب و غیریکنواست.

**) ضمناً، مسألهٔ مربوط به‌تعیین شعاع تقارب رشته‌های توانی، به‌سادگی و به‌کمک قضیهٔ کوشی دالامبر حل می‌شوند [۳۸۰]. مثلاً، برای رشتهٔ (۱۵) داریم:

$$\rho_{۲n-۱=۰},\quad \rho_{۲n}=\sqrt[۲n]{\frac{۲^{۲n}B_n}{(۲n)!}}=\sqrt[۲n]{\frac{۲^{۲n}}{(۲n)!}\cdot\frac{۲(۲n)!}{(۲\pi)^{۲n}}\cdot s_{۲n}}=\frac{۱}{\pi}\sqrt[۲n]{۲s_{۲n}},$$

$$\rho=\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\rho_m=\frac{۱}{\pi},\quad R=\frac{۱}{\rho}=\pi$$

از این‌جا، روشن می‌شود که شعاع تقارب رشتهٔ (۱۳) هم، همین مقدار است؛ضمناً، شعاع تقارب رشتهٔ اصلی (۱۲) برابر است با 2π.

با استفاده از اتحاد

$$tgx = cotgx - 2cotg2x$$

می‌توان به‌کمك (۱۵)، دوباره، بسط tgx را به‌دست آورد.

$$tgx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n \cdot x^{2n-1} \qquad (16)$$

و این، همان‌است که قبلاً به‌دست‌آورده بودیم [(۱۱) را ببینید]، ولی بهتر است که‌بسط tgx درست به‌همین صورت نوشته شود، زیرا عددهای برنولی به‌خوبی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند وجدول‌های بزرگی، برای آن‌ها، تنظیم‌شده است. شعاع تقارب‌رشتهٔ‌معرف tgx، برابر است با $\frac{\pi}{2}$ و این، از خود راهی که به‌دست آمد، مشهود است.

بسط‌های مفید دیگری هم، با عددهای برنولی مربوط می‌شوند. مثلاً، چون داریم:

$$\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(x\cot gx - 1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!} x^{2n-1}$$

با انتگرال‌گیری جمله به‌جمله (برای $|x| < \pi$) به‌دست می‌آید:

$$\ln\frac{\sin x}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}$$

به طرز مشابهی، با انتگرال‌گیری جمله به جمله از بسط (۱۶) (برای $|x| < \pi$) به دست می‌آید:

$$\ln\cos x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}$$

از این بسط‌ها، می‌توان به‌سادگی بسط $\ln\frac{tgx}{x}$ را هم پیدا کرد. این‌رشته‌ها، برای تشکیل جدول‌های لگاریتمی مثلثاتی، مفیدند.

در پایان، به‌رشتهٔ متباعد

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1)^k$$

برمی‌گردیم که در مسالهٔ ۶) شمارهٔ ۴۲۵ مورد مطالعه قرار داده بودیم. در آن‌جا، جمع‌پذیری این رشته، از روی روش چه‌زارو مرتبهٔ kام، ثابت شده بود، ولی خود «مجموع تعمیم‌یافته» آن‌را (که با $A^{(k)}$ نشان می‌دهیم)، پیدا نکردیم. حالا می‌توانیم این نقص را برطرف کنیم. ضمناً، رشته را از روی روش پواسون ـ آبل جمع‌می‌کنیم که، به‌طوری که می‌دانیم [۴۲۴، ۲)]، باید به‌همان نتیجه منجر شود.

به‌ازای $t>0$ داریم: $0<e^{-t}<1$، و با جمع کردن تصاعد، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t}=\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}=\frac{1}{e^t+1}=\frac{1}{e^t-1}-\frac{2}{e^{2t}-1}=$$

$$=\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{e^t-1}-\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{e^{2t}-1}$$

که با استفاده از بسط (۱۲)، به‌ازای tهای به‌قدر کافی کوچک، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-1)\beta_n}{n!}\cdot t^{n-1}$$

از هر دو رشته، k مرتبه، جمله به‌جمله مشتق می‌گیریم؛ برای رشته سمت راست برابری، به‌قضیهٔ ۸° شمارهٔ ۴۳۸ تکیه می‌کنیم. مشتق‌گیری از سمت چپ هم، بر همین اساس انجام می‌گیرد، که اگر فرض کنیم $e^{-t}=x$، یک‌رشتهٔ توانی می‌شود. در نتیجه، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^k e^{-(n+1)t}=$$

$$=(-1)^{k+1}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-1)\beta_n}{n!}(n-1)(n-2)\dots(n-k)t^{n-k-1}$$

حالا t را به‌سمت ۰ و در نتیجه، x را به‌سمت ۱ میل می‌دهیم: در سمت چپ $A^{(k)}$ به‌دست می‌آید و در سمت راست، جملهٔ آزاد زیر

$$(-1)^{k+1}\frac{(2^{2(k+1)}-1)\beta_{k+1}}{k+1}$$

با یادآوری این مطلب که عددهای β با اندیس فرد (بزرگتر از واحد)، همگی برابر صفرند و با اندیس‌های زوج، به‌عددهای برنولی منجر می‌شوند، سرانجام به‌دستورهای زیر می‌رسیم:

$$A^{(2m)}=0,\quad A^{(2m-1)}=(-1)^{m-1}\frac{2^{4m}-1}{2m}B_m\quad (m\geqslant 1)$$

۴۵۰. حل معادله به‌کمک رشته. یکبار دیگر به‌مسالهٔ مربوط به تعریف متغیر y، به‌عنوان تابعی از x، در معادلهٔ

$$F(x,y)=0 \qquad (۱۷)$$

[با **۲۰۶** و **۴۴۲** مقایسه کنید]، برمی‌گردیم، ولی این‌بار، با طرحی دیگر:

فرض کنید تابع $F(x,y)$، در همسایگی نقطهٔ (x_0,y_0)، قابل بسط به‌رشته، برحسب توان‌های $x-x_0$ و $y-y_0$ باشد؛ ضمناً، جملهٔ ثابت آن مخالف صفر، و ضریب‌های $y-y_0$ هم مخالف صفر باشند*. در این صورت، تابع $y=y(x)$ هم، که با معادلهٔ (۱۷)، در همسایگی نقطهٔ مفروض تعریف شده است، در نزدیکی $x=x_0$، برحسب توان‌های $x-x_0$، قابل بسط است.

به‌زبان دیگر: اگر تابع F، واقع در سمت چپ معادلهٔ (۱۷)، در نقطهٔ (x_0,y_0) تحلیلی باشد، در آن‌صورت، تابع $y=y(x)$ هم، که با معادله تعریف می‌شود، در نقطهٔ x_0 تحلیلی می‌شود. به‌این ترتیب، در این جا، نه‌تنها صحبت بر سر وجود یا محاسبهٔ مقدارهای تابع مجهول، بلکه ضمناً دربارهٔ نمایش تحلیلی آن نیز می‌باشد.

اثبات. بدون این‌که به‌کلی‌بودن مساله، لطمه‌ای وارد آید، می‌توان $x_0=y_0=0$ گرفت؛ در واقع، مثل این است که تفاضل‌های $x-x_0$ و $y-y_0$ را به‌عنوان متغیرجدید در نظر بگیریم، ولی همان علامت‌های قدیمی را حفظ کنیم. اگر جملهٔ با توان یکم y را جدا کنیم و آن‌را به‌سمت دیگر انتقال دهیم و بر ضریب آن تقسیم کنیم، می‌توان معادلهٔ مفروض را به‌این‌صورت نوشت:

$$y=c_{10}x+c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{02}y^2+$$
$$+c_{30}x^3+c_{21}x^2y+c_{12}xy^2+c_{03}y^3+\cdots \qquad (۱۸)$$

رشته برای تابع y از x را باید به‌صورت زیر جست‌وجو کرد:

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \qquad (۱۹)$$

اگر چنین بسطی، در همسایگی صفر، وجود داشته باشد، درآن‌صورت، ضریبهای آن،

---

*) و این، دقیقاً، با این شرطهای معمولی، تطبیق می‌کند،

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_x(x_0,y_0)\neq 0$$

به‌طور کاملاً یک‌ارزشی، با خود رابطهٔ (۱۸) معین می‌شوند.

در واقع، اگر به‌جای y، مقدار آن‌را از بسط (۱۹) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=c_{10}x+c_{20}x^2+$$
$$+c_{11}x(a_1x+a_2x^2+\cdots)+c_{02}(a_1x+a_2x^2+\cdots)^2+c_{30}x^3+$$
$$+c_{21}x^2(a_1x+a^2x^2+\cdots)+c_{12}x(a_1x+a_2x^2+\cdots)^2+$$
$$+c_{03}(a_1x+a_2x^2+\cdots)^3+\cdots \qquad (18a)$$

بنابر قضیهٔ شمارهٔ ۴۴۶ می‌توان، برای xهای به‌قدر کافی کوچک، در سمت راست توان‌ها را انجام‌داد و، سپس، جمله‌های متشابه را یکی کرد. اگر آن‌وقت، با استفاده از قضیهٔ مربوط به‌اتحاد رشته‌های توانی، ضریب‌های توان‌های یکسان را، در دوطرف، برابر قراردهیم، به‌دستگاهی (نامتناهی) از معادله‌ها، برای ضریب‌های مجهول a_1، a_2، a_3، ...، a_n، ... می‌رسیم:

$$a_1=c_{10},\quad a_2=c_{20}+c_{11}a_1+c_{02}a_1^2,$$
$$a_3=c_{11}a_2+2c_{02}a_1a_2+c_{30}+c_{21}a_1+c_{12}a_1^2+c_{03}a_1^3,\ \cdots \qquad (20)$$

از آن‌جاکه درسمت راست (۱۸)، همهٔ جمله‌های شامل y، کمتر از دوبعدی نیستند(یعنی، یا خود y از درجه‌ای بالاتر از واحد است، و یا اگر y از درجهٔ اول است، دردرجه‌ای از x هم ضرب شده است)، بنابراین، در معادلهٔ nام دستگاه (۲۰)، ضریب a_n برحسب ضریب‌های با اندیس کمتر a_1، a_2، ...، a_{n-1} (و ضریب‌های معلوم c) بیان می‌شود. از همین‌جا روشن می‌شود که می‌توان ضریب‌های a_n را، یکی پس از دیگری، به‌دست آورد:

$$a_1=c_{10},\quad c_2=c_{20}+c_{11}c_{10}+c_{02}c_{10}^2,$$
$$a_3=(c_{11}+2c_{02}c_{10})(c_{20}+c_{11}c_{10}+c_{12}c_{10}^2)+$$
$$+c_{30}+c_{21}c_{10}+c_{12}c_{10}^2+c_{03}c_{10}^3,\ \cdots \qquad (21)$$

به‌این ملاحظه، که برای آینده مهم است توجه کنیم. از آن‌جاکه، ضمن بازکردن پرانتزها در (۱۸a)، به جز جمع و ضرب، عمل دیگری روی حرف‌های a و c انجام نمی‌گیرد، بنابراین، در سمت راست معادله‌های (۲۰)، چندجمله‌ای‌هایی صحیح نسبت به‌این حرف‌ها، با ضریب‌های مثبت (و حتی طبیعی) به‌دست می‌آید. در نتیجه، در سمت راست دستورهای (۲۱) هم، چند جمله‌ای‌هایی صحیح، با ضریب‌های مثبت، نسبت به‌حرف‌های c، پیدا خواهد شد.

اکنون، رشتهٔ (۱۹) را، باجانشین کردن مقدارهای به‌دست‌آمدهٔ a، تشکیل می‌دهیم. دربارهٔ آن می‌توان گفت که «به‌طور صوری» دررابطهٔ (۱۸a) هم صدق می‌کند. اگر تقارب این رشته، برای αهای به‌قدرکافی کوچك، برقرار باشد، دیگرلزومی به‌اثبات این مطلب نیست که برای تابع معرف آن، شرط (۱۸) برقرار است، زیرا دراین حالت، برابری‌های (۲۰)ـ که ضریب‌های رشته در آن صدق می‌کنندـ کاملاً هم‌ارز با (۱۸a) هستند. به‌این ترتیب، تمامی مسأله به‌این‌جا منجر می‌شود که ثابت کنیم، رشتهٔ (۱۹)ـ که ضریب‌های آن با دستورهای (۲۱) معین می‌شوندـ در یك همسایگی صفر، متقاربند.

همراه با (۱۸)، رابطهٔ مشابه

$$y=\gamma_{10}x+\gamma_{20}x^2+\gamma_{11}xy+\gamma_{02}y^2+$$
$$+\gamma_{30}x^3+\gamma_{21}x^2y+\gamma_{12}xy^2+\gamma_{03}y^3+\cdots \qquad (18^*)$$

را درنظر می‌گیریم، که در آن، همهٔ ضریب‌های γ_{ik} مثبت هستند و، به‌جز آن، در نابرابری زیرصدق می‌کنند:

$$|c_{ik}|\leqslant\gamma_{ik} \qquad (22)$$

برای این y، فعلاً به‌طور صوری، رشتهٔ زیررا، شبیه رشتهٔ (۱۹) می‌سازیم:

$$y=\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\cdots+\alpha_nx^n+\cdots \qquad (19^*)$$

که درضمن، ضریب‌های آن را، می‌توان شبیه (۲۱)، بااین دستورها به‌دست آورد:

$$\alpha_1=\gamma_{10},\ \alpha_2=\gamma_{20}+\gamma_{11}\gamma_{10}+\gamma_{02}\gamma_{10}^2,$$
$$\alpha_3=(\gamma_{11}+2\gamma_{02}\gamma_{10})(\gamma_{20}+\gamma_{11}\gamma_{10}+\gamma_{02}\gamma_{10}^2)+$$
$$+\gamma_{30}+\gamma_{21}\gamma_{10}+\gamma_{12}\gamma_{10}^2+\gamma_{03}\gamma_{10}^3,\cdots \qquad (21^*)$$

خود تشکیل این دستورها، با توجه به‌ملاحظه‌های بالا، مثبت بودن عددهای α_n را تضمین می‌کند. علاوه برآن، ازمقایسهٔ بـا (۲۱) و به‌حساب آوردن (۲۲)، نتیجه می‌گیریم کـه (برای همه nها)

$$|a_n|\leqslant\alpha_n \qquad (23)$$

اگر می‌توانستیم ضریب‌های مثبت γ_{ik} راطوری انتخاب کنیم که، نه‌تنها شرط (۲۲) برقرار باشد، بلکه رشتهٔ متناظر (۱۹*) هم شعاع تقاربی مخالف صفر داشته باشد، آن‌وقت، بنابر (۲۳)، همین مطلب دربارهٔ (۱۹) هم‌درست بود، وقضیه ثابت می‌شد. بنابراین، به‌انتخاب

عددهای γ_{ik} می‌پردازیم.

چنان عددهای مثبت r و ρ وجود دارند که رشتهٔ دوگانهٔ

$$|c_{۱۰}|\cdot r+|c_{۲۰}|\cdot r^{۲}+|c_{۱۱}|\cdot r\rho+|c_{۰۲}|\cdot\rho^{۲}+\ \cdots$$

متقارب باشد، به‌نحوی که جملهٔ عمومی آن $|c_{ik}|\cdot r^{i}\rho^{k}$ به‌سمت صفر میل کند و، درنتیجه، کران‌دار باشد.

$$|c_{ik}|\cdot r^{i}\rho^{k}\leqslant M\Rightarrow|c_{ik}|\leqslant\frac{M}{r^{i}\rho^{k}}$$

$\gamma_{ik}=\dfrac{M}{r^{i}\rho^{k}}$ فرض می‌کنیم و، طبق آن‌چه گفته شد، رابطهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

$$y=\frac{M}{r}x+\frac{M}{r^{۲}}x^{۲}+\frac{M}{r\rho}xy+\frac{M}{\rho^{۲}}y^{۲}+\ \cdots\ =$$

$$=\frac{M}{\left(۱-\dfrac{x}{r}\right)\left(۱-\dfrac{y}{\rho}\right)}-M-\frac{M}{\rho}y$$

ویا بالاخره

$$y^{۲}-\frac{\rho^{۲}}{\rho+M}y+\frac{M\rho^{۲}}{\rho+M}\cdot\frac{x}{r-x}=۰$$

از این‌جا، می‌توان تابع $y=y(x)$ را، که درمعادله صدق می‌کند، و به‌خصوص، شاخه‌ای ازآن راکه به‌ازای $x=۰$ برابرصفر می‌شود، پیداکرد. با حل معادلهٔ درجهٔ دوم (و با به‌حساب آوردن $|x|<r$)، به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{\rho^{۲}}{۲(\rho+M)}\left[۱-\sqrt{۱-\frac{۴M(\rho+M)}{\rho^{۲}}\cdot\frac{x}{r-x}}\right]^{*}$$

اگر، برای سادگی‌کار، این علامت را درنظر بگیریم:

$$r_{۱}=r\left(\frac{\rho}{\rho+۲M}\right)^{۲}\qquad(۲۴)$$

آن‌وقت، عبارت y را می‌توان این‌طور نوشت:

$$y=\frac{\rho^{۲}}{۲(\rho+M)}\left[۱-\left(۱-\frac{x}{r_{۱}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\cdot\left(۱-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{۱}{۲}}\right]$$

*)علامت منفی را در جلو رادیکال، به این مناسبت اختیار کرده‌ایم که به ازای $x=۰$ داشته باشیم $y=۰$.

ازاین‌جا روشن است که، اگر از رشتهٔ دوجمله‌ای استفاده کنیم، می‌توان y را، برای $|x|<r_1<r$، برحسب توان‌های x بسط داد. چون این بسط باید با بسط (۱۹*) یکی باشد، تقارب رشته (۱۹*)، و در نتیجه، تقارب رشتهٔ (۱۹)، دست‌کم برای $|x|<r_1$، ثابت می‌شود.

توجه کنیم، این قضیه، تنها امکان بسط y را برحسب توان‌های x (یا درحالت کلی، برحسب توان‌های $x-x_0$)، درنزدیکی $x=0$ (یا $x=x_0$) ثابت می‌کند. تعیین دقیق بازهٔ تقارب این بسط، نیازمند بررسی‌های خاص است.

درمورد حالت کلی هم، یعنی وقتی که دستگاه تابع‌ها به‌وسیلهٔ دستگاه معادله‌ها داده شده است، می‌توان به‌ترتیب مشابهی، بحث کرد.

این روش‌مقدماتی بحث ــ که دراین‌جا آمد ــ متعلق به‌کوشی است. ماهیت این‌روش عبارت است‌از تبدیل رشته‌های توانی مفروض (با یك یاچند متغیر)، به‌رشته‌های «محدود-کنندهٔ» آن‌ها؛ یعنی رشته‌هایی که برای بحث ساده‌ترند وهمهٔ ضریب‌های آن‌ها مثبت‌اند و، به‌ترتیب، از قدرمطلق ضریب‌های رشته‌های مفروض، تجاوز نمی‌کنند. به همین مناسبت، این روش را، روش رشته‌های محدودکننده (یا رشته‌های ماژوران) می‌نامند. این روش، اغلب، درنظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی، کاربرد دارد.

۴۵۱. عکس رشتهٔ توانی. به‌عنوان حالت خاص مسأله‌ای که حل کردیم، مسألهٔ مربوط به عکس رشتهٔ توانی را مطرح می‌کنیم. فرض کنیم، تابع $y=f(x)$، در یك همسایگی $x=x_0$، به‌وسیلهٔ رشته‌ای که برحسب توان‌های $x-x_0$ مرتب شده است، نشان داده شده‌باشد. اگرجملهٔ آزاد را (که معرف مقدار y به‌ازای $x=x_0$ است) با y_0 نشان دهیم، می‌توان این بسط را چنین نوشت:

$$y-y_0=a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

ازاین‌جا، با شرط $a_1\neq 0$، می‌توان x را، در همسایگی $y=y_0$، به‌عنوان تابعی از y تعریف کردکه، به‌نوبهٔ خود، به‌رشته‌ای برحسب توان‌های $y-y_0$، قابل بسط است. بنابراین، اگر y، در نقطهٔ x_0، تابعی تحلیلی از x باشد، درآن صورت، تابع معکوس آن هم، در نقطهٔ نظیر y_0، با توجه به‌شرط‌های داده شده، تحلیلی خواهد بود.

تمامی این حکم، از قضیهٔ کلی که ثابت کردیم، نتیجه می‌شود. برای سادگی کار، $x_0=y_0=0$ می‌گیریم و رابطه‌ای راکه y و x را به‌هم مربوط می‌کند، طبق نمونهٔ (۱۸)، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$x=by+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\dots^*$$

آن‌وقت، ضریب‌های بسط مجهول

$$x=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\dots$$

به‌ترتیب، از معادله‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$b_1=b,\ b_2=c_2b_1^2,\ b_3=2c_2b_1b_2+c_3b_1^3,$$

$$b_4=c_2(2b_1b_3+b_2^2)+3c_3b_1^2b_2+c_4b_1^4,$$

$$b_5=2c_2(b_1b_4+b_2b_3)+3c_3(b_1^2b_3+b_1b_2^2)+4c_4b_1^3b_2+c_5b_1^5,\dots$$

مثلاً، اگر بسط سینوس را مفروض بگیریم:

$$y=\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\dots$$

می‌توان بسط زیررا به‌دست آورد:

$$x=\arcsin y=y+b_3y^3+b_5y^5+\dots$$

(از آن جهت تنها توان‌های فرد y را نوشته‌ایم که، با توجه به‌فرد بودن تابع $y=\sin x$، از قبل معلوم است که تابع عکس هم، فرد است). معادله‌هایی که ضریب‌های b را می‌دهند، به‌این صورت درمی‌آیند:

$$b_1=1,\ b_3=\frac{1}{6}b_1^3=\frac{1}{6},\ b_5=\frac{1}{2}b_1^2b_3-\frac{1}{120}b_1^5=\frac{3}{40},\dots$$

مثال دیگر. فرض کنیم

$$y=e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

از آن‌جا

$$x=\ln(1+x)=b_1y+b_2y^2+b_3y^3+\dots$$

و برای تعیین ضریب‌های b، این معادله‌ها را داریم:

$$b_1=1,\ b_2=-\frac{1}{2}b_1^2=-\frac{1}{2},\ b_3=-b_1b_2-\frac{1}{6}b_1^3=\frac{1}{3},$$

---

*) باید یادآوری کرد که، در مقایسه با شمارهٔ پیش، نقش x و y را با هم عوض کرده‌ایم.

$$b_۴=-\frac{۱}{۲}(۲b_۱b_۳+b_۲^۲)-\frac{۱}{۲}b_۱^۲b_۲-\frac{۱}{۲۴}b_۱^۴=-\frac{۱}{۴},$$

$$b_۵=-(b_۱b_۴+b_۲b_۳)-\frac{۱}{۲}(b_۱^۲b_۳+b_۱b_۲^۲)-\frac{۱}{۶}b_۱^۳b_۲-\frac{۱}{۱۲۰}b_۱^۵=\frac{۱}{۵},\ \ldots$$

به‌نحوی که

$$\ln(۱+y)=y-\frac{۱}{۲}y^۲+\frac{۱}{۳}y^۳-\frac{۱}{۴}y^۴+\frac{۱}{۵}y^۵-\ldots$$

حوزهٔ تغییر y را، که در آن وجود تابع معکوس وحقیقی بودن بسط حاصل برای آن تضمین می‌شود، می‌توان ازملاحظه‌های شمارهٔ ۴۵۰ معین کرد، ولی‌معمولاً، این‌حوزه، بسیار کوچک‌ترمی‌شود. مثلاً، اگردرمثال اول، معادلهٔ مربوط به‌بستگی x و y را، به‌صورت (۱۸) بنویسیم:

$$x=y+\frac{x^۳}{۶}-\frac{x^۵}{۱۲۰}+\ldots$$

و x و y را با شرط‌های $|x|\leqslant\frac{\pi}{۲}$ و $|y|\leqslant ۱$ محدود کنیم، یعنی $\rho=\frac{\pi}{۲}$ و $r=۱$ بگیریم، درآن صورت، $M=۱$ می‌شود و، بنابر رابطهٔ (۲۴)

$$r_۱=\left(\frac{\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}+۲}\right)^۲<۰/۲$$

درنتیجه، حوزهٔ کاربرد واقعی نتیجهٔ به‌دست‌آمده، عبارت است ازبازهٔ $[۱,۱-]$.

یادداشت. ببینیم شرط $a_۱\neq ۰$، که به‌ازای آن حکم بالا درست است، چه‌اهمیتی دارد. فرض کنیم $a_۱=۰$، ولی $a_۲\neq ۰$ و $a_۲>۰$، آن‌وقت، درنزدیکی $x=۰$ (برای سادگی $x_۰=y_۰=۰$ می‌گیریم) داریم:

$$y=a_۲x^۲+a_۳x^۳+a_۴x^۴+\ldots$$

به‌طوری که $y>۰$. مقدار حسابی ریشه را $y^{\frac{۱}{۲}}$ می‌نامیم؛ می‌بینیم که

$$\sqrt{y}=\sqrt{a_۲x^۲+a_۳x^۳+a_۴x^۴+\ldots}=$$

$$=\pm x\sqrt{a_۲}\sqrt{۱+\frac{a_۳}{a_۲}x+\frac{a_۴}{a_۲}x^۲+\ldots}$$

ضمناً، از علامت‌های $\pm$، آن را باید انتخاب کنیم که با علامت x تطبیق کند. بنابرقضیهٔ شمارهٔ ۴۵۰، رادیکال آخری، خود درنزدیکی $x=0$، به‌رشته‌ای توانی با جملهٔ آزاد ۱ تبدیل می‌شود. بنابراین، سرانجام (اگرعلامت $\pm$ را به‌سمت‌چپ انتقال دهیم):

$$\pm\sqrt{y}=a'_1x+a'_2x^2+\cdots$$

که در آن $a'_1=\sqrt{a_2}>0$. با استفاده ازقضیهٔ همین شماره، (نقش y به‌عهدهٔ $\pm\sqrt{y}$ است)، دوبسط‌متفاوت برای x، که به‌علامت انتخاب شده بستگی دارد، به‌دست‌می‌آوریم:

$$x_1=b_1y^{\frac{1}{2}}+b_2y+b_3y^{\frac{3}{2}}+b_4y^2+\cdots>0\left(b_1=\frac{1}{\sqrt{a_2}}>0\right)$$

و

$$x_2=-b_1y^{\frac{1}{2}}+b_2y-b_3y^{\frac{3}{2}}+b_4y^2-\cdots<0$$

توجه خواننده را، هم به‌دو علامتی بودن تابع معکوس، و هم به‌این‌که هرکدام از شاخه‌های آن، به‌جای توان‌های صحیح، با توان‌های کسری متغیر y بسط می‌یابند، جلب می‌کنیم.

۴۵۲. رشتهٔ لاگرانژ. قضیهٔ شمارهٔ ۴۵۰ راه دربارهٔ معادلهٔ خاص

$$y=a+x\varphi(y) \qquad (۲۵)$$

به‌کار می‌بریم، که در آن، تابع $\varphi(y)$، درنقطهٔ $y=a$، تحلیلی فرض می‌شود. در این صورت، همان‌طورکه می‌دانیم، برای مقدارهای به‌قدرکافی کوچك x، y به‌عنوان تابعی از x تعریف می‌شودکه در نقطهٔ $x=0$ تحلیلی است و، ضمناً، دراین نقطه به a تبدیل می‌شود.

ضمناً فرض می‌کنیم که $u=f(y)$، تابعی از y، که برای $y=a$ تحلیلی است، باشد. اگر به‌جای y دراین تابع، مقدار آن را برحسب x ازتابع قبلی بگذاریم، u تابعی از x می‌شودکه بازهم به‌ازای $x=0$، تحلیلی است. مسألهٔ پیداکردن بسط u برحسب توان‌های x، یا دقیق‌تر، مسألهٔ پیداکردن عبارت‌های ساده‌ای برای این بسط را مطرح می‌کنیم.

قبلا، ملاحظه کنیم که، اگر a را متغیر بگیریم، y را می‌توان، ازروی معادلهٔ (۲۵)، به‌عنوان تابعی ازدو متغیر x و a، که درنقطهٔ (a و ۰) تحلیلی است، تعریف کرد*. آن‌وقت،

*) در این حکم، این‌طور فرض شده است که قضیهٔ شمارهٔ ۴۵۰، درمورد حالتی هم که معادله دارای سه‌متغیر است ویکی ازآن‌ها، تابعی است از دو متغیردیگر، درست است.

متغیر u هم، تابعی از همان دومتغیرخواهد شد.

اگر در (۲۵)، نسبت به x ونسبت به a، مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$[1-x\cdot\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y),\ [1-x'\cdot\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a}=1$$

ازاین‌جا، روشن است که

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y).\frac{\partial y}{\partial a} \qquad (۲۶)$$

ونیز به‌طورکلی، به‌ازای $u=f(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y).\frac{\partial u}{\partial a} \qquad (۲۶a)$$

ازطرف دیگر، برای هرتابع دلخواه $F(y)$، که برای آن مشتق نسبت به y وجود دارد، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y),\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[F(y),\frac{\partial u}{\partial x}\right] \qquad (۲۷)$$

به‌این نتیجه می‌توان به‌سادگی، با دیفرانسیل‌گیری مستقیم و با استناد به‌اتحادهای (۲۶) و (۲۶a)، رسید.

از همهٔ این‌ها، برای اثبات رابطه

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi^n(y).\frac{\partial u}{\partial a}\right] \qquad (۲۸)$$

استفاده می‌کنیم که، برای آینده، اهمیت زیادی دارد*. این رابطه، به‌ازای $n=1$، به (۲۶a) منجر می‌شود. با روش استقرا عمل می‌کنیم: فرض می‌کنیم که رابطهٔ (۲۸)، برای $n\geqslant 1$ درست است و ثابت می‌کنیم که، در آن صورت، برای مشتق مرتبهٔ $(n+1)$ام هم درست‌است. از(۲۸) نسبت به x مشتق‌می‌گیریم، بااستفاده ازحق جابه‌جاکردن‌مشتق‌گیری [۱۹۰]، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y).\frac{\partial u}{\partial a}\right]$$

---

*) درراابطهٔ (۲۸)، $\varphi^n(y)$ به‌معنای توان nام $\varphi(y)$ است، $[\varphi(y)]^n$.

ولی، بنابر (۲۷) و (۲۶a)، به‌ترتیب، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^{n}(y).\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^{n}(y).\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^{n+1}(y).\frac{\partial u}{\partial a}\right]$$

که اگر در برابری قبلی بگذاریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n}}{\partial a^{n}}\left[\varphi^{n+1}(y).\frac{\partial u}{\partial a}\right]$$

و بااین‌ترتیب، درستی رابطهٔ (۲۸)، تأیید می‌شود.

درپایان، به‌بسط جالب تابع u، برحسب توان‌های x، می‌پردازیم. اگر a را ثابت بگیریم، باید این بسط، به‌صورت بسط تیلور باشد [۴۳۸، ۹°]:

$$u=u_{0}+x.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{0}+\frac{x^{2}}{2!}\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\right)_{0}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}\left(\frac{\partial^{n}u}{\partial x^{n}}\right)_{0}+\cdots$$

که اندیس‌های ۰ در آن، به‌معنای این است که تابع ومشتق‌های آن، در نقطهٔ $x=0$ درنظر گرفته شده‌اند. ولی دراین صورت، y به a تبدیل می‌شود، به‌طوری‌که $u_{0}=f(a)$ و، سپس، از روی دستور (۲۸)

$$\left(\frac{\partial^{n}u}{\partial x^{n}}\right)_{0}=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^{n}(a).f'(a)]$$

که اگر این مقدارهای ضریب‌ها را درنظر بگیریم، به‌بسط زیرمی‌رسیم:

$$f(y)=f(a)+x.\varphi(a)f'(a)+\frac{x^{2}}{2!}.\frac{d}{da}[\varphi^{2}(a).f'(a)]+\cdots$$

$$\cdots+\frac{x^{n}}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\,[\varphi^{n}(a).f'(a)]+\cdots \qquad (۲۹)$$

که رشتهٔ لاگرانژ نامیده می‌شود. این رشته، به‌این خاطر معروف است که، ضریب‌های آن، به‌صورت تابع‌های صریحی از a نشان داده شده‌اند.

اگر داشته باشیم $f(y)\equiv y$، در آن صورت، درحالت خاص، به‌دست می‌آوریم:

$$y=a+x.\varphi(a)+\frac{x^{2}}{2!}.\frac{d}{da}[\varphi^{2}(a)]+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}.\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^{n}(a)]+\cdots \quad (۲۹a)$$

بین مسأله‌هایی که دراین شماره مورد مطالعه قراردادیم، ومسأله‌های مربوط به‌عکس

رشتهٔ توانی، رابطهٔ نزدیکی وجود دارد. اگر (بـا فرض $\varphi(a)\neq 0$)، معادلـهٔ (۲۵) را به‌این صورت بنویسیم:

$$x=\frac{y-a}{\varphi(y)}=b_0+b_1(y-a)+b_2(y-a)^2+\cdots$$

آن‌وقت، مسألهٔ لاگرانژ، هم‌ارز عکس این رشته (که برحسب توان‌های $y-a$ تنظیم‌شده است) می‌شود. برعکس، اگر مسألهٔ مربوط به‌عکس رشتهٔ توانی

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \quad (a_1\neq 0)$$

مطرح باشد، درآن‌صورت، اگرآن را به‌صورت

$$y=x(a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots)$$

بنویسیم ومجموع رشتهٔ داخل پرانتزرا بـا $\psi(x)$ نشان دهیم، به‌معادله‌ای از گـونهٔ (۲۵) می‌رسیم:

$$x=y\cdot\frac{1}{\psi(x)}$$

در این‌جا $a=0$ و $\varphi(x)=\dfrac{1}{\psi(x)}$ است، علاوه‌برآن، نقش x و y هم با یکدیگرعوض شده است. یادداشت اخیر، ازاین بابت مهم است که امکان می‌دهد، نتیجهٔ عکس راازروی رابطهٔ (۲۹a)، بلافاصله ومستقیماً به‌دست آوریم:

$$x=y\cdot\frac{1}{\psi(0)}+\frac{y^2}{2!}\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi^2(x)}\right]_{x=0}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{y^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{\psi^n(x)}\right]_{x=0}+\cdots \qquad (۳۰)$$

به‌چند مثال بپردازیم.

۱) با استفاده ازهمین دستور (۳۰) آغاز می‌کنیم. معادلهٔ زیررا درنظر می‌گیریم:

$$y=x(a+x) \quad (a\neq 0)$$

یا

$$x=y\cdot\frac{1}{a+x}$$

چون

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{(a+x)^n}=\frac{(-1)^{n-1}n\cdot(n+1)\dots(2n-2)}{(a+x)^{2n-1}}$$

بنابراین، به‌این بسط می‌رسیم:

$$x=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{a^3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}\frac{y^n}{a^{2n-1}}+_{\varepsilon}\dots$$

اگرمعادلهٔ درجه دوم‌را نسبت به x حل می‌کردیم وآن راکه همراه با y برابرصفرمی‌شد، انتخاب می‌کردیم، بازهم به‌همین بسط می‌رسیدیم.

۲) از معادلهٔ گونهٔ (۲۵) آغاز می‌کنیم:

$$y=a+\frac{x}{y}$$

در این‌جا $\varphi(y)=\frac{1}{y}$ با گذاشتن $f(y)=y^{-k}$، ازروی دستورلاگرانژ(۲۹) پیدامی‌کنیم:

$$\frac{1}{y^k}=\frac{1}{a^k}-x\cdot\frac{k}{a^{k+2}}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{k(k+3)}{a^{k+4}}-\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{k(k+4)(k+5)}{a^{k+6}}+$$

$$+\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{k(k+5)(k+6)(k+7)}{a^{k+8}}-\dots$$

چون معادلهٔ مفروض، به‌معادلهٔ درجه دوم

$$y^2-ay-x=0$$

منجرمی‌شود، روشن است که

$$y=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+x}^{*}$$

مثلاً، اگر $a=2$، با ضرب در 2^k، بسط زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k=$$

---

*) علامت مثبت جلو رادیکال، به این مناسبت اختیار شده است که به‌ازای $x=0$ باید داشته باشیم: $y=a$.

$$= ۱ - k\cdot\frac{x}{۴} + \frac{k(k+۳)}{۲!}\left(\frac{x}{۴}\right)^۲ - \frac{k(k+۴)(k+۵)}{۳!}\left(\frac{x}{۴}\right)^۳ + \cdots$$

۳) در اخترشناسی نظری، معادلهٔ کپلر، نقش مهمی دارد.

$$E = M + \varepsilon\cdot\sin E$$

که در آن، E انحراف خروج از مرکز سیاره، M انحراف میانگین آن و ε خروج از مرکز مدار سیاره است. با استفاده ازرشتهٔ لاگرانژ (۲۹a)، می‌توان بسط E را برحسب توان‌های خروج از مرکز، با ضریب‌های وابسته به M، پیدا کرد:

$$E = M + \varepsilon\cdot\sin M + \frac{\varepsilon^۲}{۲!}\cdot\frac{d}{dM}\sin^۲ M + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\cdot\frac{d^{n-۱}}{dM^{n-۱}}\sin^n M + \cdots$$

دراین‌جا، مهم است که از بازهٔ تقارب، به‌طور دقیق، اطلاع داشته باشیم. لاپلاس (P.S.Laplace) نخستین کسی بود که ثابت کرد، برای $\varepsilon < ۰/۶۶۲۷\ldots$، تقارب برقرار است.

۴) درخاتمه، معادلهٔ زیررا درنظر می گیریم:

$$y = x + \frac{\alpha}{۲}(y^۲ - ۱)^*$$

جواب آن، که به‌ازای $\alpha = ۰$ برابر x می‌شود، چنین است:

$$y = \frac{۱ - \sqrt{۱ - ۲\alpha x + \alpha^۲}}{\alpha} = \frac{۲x - \alpha}{۱ + \sqrt{۱ - ۲\alpha x + \alpha^۲}}$$

بسط این تابع، برحسب توان‌های α، به‌این صورت است:

$$y = x + \frac{\alpha}{۲}(x^۲ - ۱) + \frac{۱}{۲!}\left(\frac{\alpha}{۲}\right)^۲\frac{d(x^۲-۱)^۲}{dx} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{۱}{n!}\left(\frac{\alpha}{۲}\right)^n\cdot\frac{d^{n-۱}(x^۲-۱)^n}{dx^{n-۱}} + \cdots$$

از دوطرف این برابری، نسبت به x مشتق می گیریم (با توجه به‌خصلت تحلیلی y، به‌عنوان تابعی ازدومتغیر α و x، می توان نتیجه گرفت که مشتق گیری جمله به‌جمله از رشته، مجاز است). بسط زیر را به‌دست می آوریم:

---

*) دراین‌جا، نقش a به‌عهدهٔ x و نقش x به‌عهدهٔ α است.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=1+\alpha\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2-1)}{dx}+\alpha^2\cdot\frac{1}{2!2^2}\cdot\frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}+\cdots$$

که ضریب‌های آن، همان‌طور که مستقیماً دیده می‌شود [بـا ۴۴۷، ۸) مقایسه کنید]، همان چندجمله‌ای‌های لژاندر هستند

$$P_n'=\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

§۵. تابع‌های مقدماتی با متغیر مختلط

۴۵۳. عددهای مختلط. با آن‌که بحث ما به‌طور کامل به‌متغیرهای حقیقی و تابع‌های حقیقی از آن‌ها، محدود می‌شود، در این‌بند، با چشم‌پوشی از مسیر اصلی، تابع‌های مقدماتی از متغیر مختلط را مطرح می‌کنیم. شرح این مطلب، به‌نظریهٔ رشته‌های توانی مربوط می‌شود و، به‌نوبهٔ خود، بعضی از جنبه‌های اصلی این نظریه را روشن می‌کند. به‌جز آن، آشنایی با تابع‌های با متغیر مختلط، برای آنالیز تابع‌های با متغیر حقیقی و در رابطه با محاسبهٔ آن‌ها هم، سودمند است [مثال‌ها را می‌توانید در ۴۶۱ و، همچنین، در فصل نوزدهم (جلد سوم)، که به‌رشته‌های فوریه اختصاص دارد، پیدا کنید].

فرض ما بر این است که خواننده، عددهای مختلط را، از جبر به‌یاد دارد. به‌همین مناسبت، در این‌جا، به‌بحث کوتاهی دربارهٔ ویژگی‌های اساسی این عددها اکتفا می‌کنیم.

عدد مختلط z، به‌صورت $z=x+yi$ است، که در آن $i=\sqrt{-1}$، واحد موهومی و x و y، عددهای حقیقی هستند. از این دو عدد حقیقی، x را مؤلفه یا بخش حقیقی و y را مؤلفه یا بخش موهومی عدد z گویند و آن‌ها را به‌این صورت نشان می‌دهند:

$$x=R(z),\quad y=I(z)$$

دو عدد مختلط $x+yi$ و $x'+y'i$ وقتی، و تنها وقتی، برابرند که به‌طور جداگانه داشته باشیم: $x=x'$ و $y=y'$*، جمع و ضرب عددهای مختلط، به‌کمک دستورهای زیر، انجام می‌گیرند:

$$(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')i,$$
$$(x+yi)(x'+y'i)=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

---

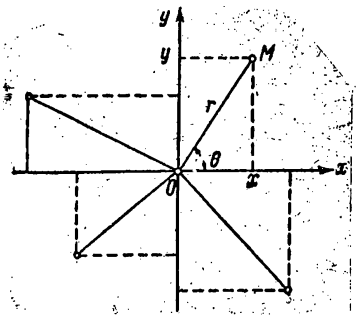
*) به‌زبان دیگر، در این‌جا، علامت تساوی، به‌علامت اتحاد تبدیل می‌شود [با شمارهٔ ۲ مقایسه کنید].

و تفاضل و خارج قسمت آن‌ها را می‌توان با دستورهای

$$(x+yi)-(x'+y'i)=(x-x')+(y-y')i,$$

$$\frac{x+yi}{x'+y'i}=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}i$$

به‌سادگی تحقیق کرد. (دستور آخر، با فرض $x'+y'i\neq 0$، یعنی $x'^2+y'^2>0$). در ضمن، همهٔ ویژگی‌های عددهای معمولی حقیقی، به‌جز مفهوم‌های بزرگتر و کوچکتر (که برای عددهای مختلط برقرار نیست) قابل رعایت است (یعنی درواقع، ویژگی‌های II،۱° تا ۴° شمارهٔ ۳ و ویژگی‌های III، ۱° تا ۵° شمارهٔ ۴).



شکل ۶۳

دستگاه مختصات قائم با محورهای xOy را برصفحه انتخاب می‌کنیم. هرعددمختلط $z=x+yi$، می‌تواند با نقطهٔ $M(x, y)$ ازاین صفحه متناظر شود که مختصات آن، عبارت است از مؤلفه‌های حقیقی وموهومی این عدد. روشن است که، برعکس هم، هر نقطهٔ M ازصفحه، کاملاً پاسخ‌گوی یك عددمختلط می‌شود. به‌همین مناسبت، این صفحه را، صفحهٔ متغیر مختلط ویا به‌طور ساده، صفحهٔ مختلط می‌نامند.

عددهای حقیقی $x=x+0i$، معرف نقطه‌های محور x (زیرا برای آن‌ها $y=0$) و عددهای موهومی $yi=0+yi$ $(x=0)$، معرف نقطه‌های محور y هستند. از این محورها، اولی را محور حقیقی و دومی را محور موهومی می‌نامند.

مختصات قطبی r و θ نقطهٔ متناظر عدد $z=x+yi$ (شکل را ببینید) هم، نقش مهمی به‌عهده دارند. عدد غیرمنفی r را کالبد (مدول) یا قدر مطلق عدد مختلط z می‌نامند و به‌صورت $r=|z|$ نشان می‌دهند. مدول به‌طوریك‌ارزشی، با عدد مختلط z معین‌می‌شود:

$$|z|=+\sqrt{x^2+y^2}$$

مدول وقتی، وتنها وقتی، برابر صفرمی‌شودکه داشته باشیم: $z=0$. زاویهٔ θ را آوند (آرگومان) عدد مختلط z گویند: $\theta=\mathrm{Arg}\,z$. وقتی‌که $z\neq 0$ باشد، θ ازرابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\ \sin\theta=\frac{y}{r}$$

البته، تنها باتقریب $2k\pi$ (k، عددی‌درست است). برای $z=0$، آرگومان نامعین‌می‌ماند؛ به‌استثنای این حالت، برای هر عدد z، یك آرگومان θ، و تنها یکی، پیدا می‌شود که در نابرابری زیر صدق کند:

$$-\pi<\theta\leqslant\pi$$

و آن را مقدار اصلی آرگومان گویند و با $\arg z$ نشان می‌دهند. اگر $\theta<\pi$ باشد، در آن‌صورت

$$tg\frac{\theta}{2}=\frac{sin\theta}{1+cos\theta}=\frac{rsin\theta}{r+rcos\theta}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

و زاویهٔ $\arg z$ را می‌توان، این‌طور تعیین کرد:

$$\arg z=2\,\text{arc}\,tg\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

که برای همهٔ عددهای مختلط، به‌جز عددهای حقیقی منفی (و صفر)، به‌درد می‌خورد.

یادآوری می‌کنیم که برای مدول‌های عددهای مختلط $z=x+yi$ و $z'=x'+y'i$، نابرابری

$$|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$$

که برای قدرمطلق عددهـای حقیقی عادی است، برقرار است. در واقع، این نابرابری، به‌نابرابری معلوم

$$\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}$$

منجر می‌شود که حالت خاصی از نابرابری مینکووسکی [۱۳۳، (۷)] است. پاورقی صفحهٔ ۴۳۶ جلد اول را هم ببینید.

نتیجه‌های حاصل از آن‌هم، درست است [۱۷ را ببینید].

اگـر در عـدد مختلط $z=x+yi$، به جـای x و y، مقدارهـای $x=rcos\theta$ و $y=rsin\theta$ را بگذاریم، به‌شکل مثلثاتی عدد مختلط می‌رسیم:

$$z=r(cos\theta+isin\theta)$$

آن‌وقت، حاصل‌ضرب zz'، در شکل مثلثاتی خود، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$zz'=rr'[cos(\theta+\theta')+isin(\theta+\theta')]$$

که مستقیماً، از قضیهٔ جمع کسینوس و سینوس، نتیجه می‌شود. از آن‌جا

$$|zz'|=|z|\cdot|z'|,\quad \operatorname{Arg}(zz')=\operatorname{Arg}z+\operatorname{Arg}z'$$

به‌همین ترتیب، برای خارج قسمت عددهای z و z' $(z'\neq 0)$ پیدا می‌کنیم:

$$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|},\quad \operatorname{Arg}\frac{z}{z'}=\operatorname{Arg}z-\operatorname{Arg}z'$$

از دستور ضرب و دستور توان با نمای طبیعی n به‌دست می‌آید:

$$z^n=r^n(cosn\theta+isinn\theta)$$

که در حالت خاص، به‌ازای $r=1$، به‌دستور موواور (A. de Moivre) می‌رسیم:

$$(cos\theta+isin\theta)^n=cosn\theta+isinn\theta$$

بالاخره، برای ریشهٔ nام z داریم:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\theta}{n}+isin\frac{\theta}{n}\right)$$

که در آن، منظور از $\sqrt[n]{r}$، ریشهٔ حسابی عدد r است. اگر در این جا، به ترتیب، مثلاً مقدارهای

$$\Theta=\theta,\ \theta+2\pi,\ \theta+4\pi,\ \ldots,\ \theta+2(n-1)\pi$$

را قرار دهیم، می‌توانیم n مقدارمختلف ریشه‌های $\sqrt[n]{z}$ را به‌دست آوریم $(z\neq 0$ به‌حساب می‌آوریم). به‌ازای سایر مقدارهای Θ، بازهم، همین مقدارهای ریشه، تکرار خواهندشد.

۴۵۴. واریانت مختلط و حد آن. دنبالهٔ $\{z_n\}$ را در نظر می‌گیریم که ازعددهای مختلط $z_n=x_n+y_ni$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ تشکیل‌شده است و متغیر z، در آن، به‌ترتیب صعودی اندیس آمده است.

حد این واریانت مختلط هم، با همان اصطلاح‌هایی که در مورد واریانت حقیقی داشتیم [۲۳]، تعریف می‌شود.

عددثابت $c=a+bi$ را حدواریانت $z=z_n$ گویند، وقتی‌که، برای‌هرعدد به‌دلخواه کوچك $\varepsilon>0$، چنان شمارهٔ N وجود داشته باشدکه همهٔ مقدارهای z_n با اندیس $n>N$ در نابرابری زیر صدق کنند:

$$|z_n - c| < \varepsilon$$

ضمناً می‌نویسند:

$$z_n = c \quad \text{یا} \quad z_n \to c \quad \text{حد}$$

درست به همین ترتیب، می‌توان مقدار بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ را هم تعریف کرد.

توجه کنیم که، در این‌جا، نمی‌توان ازمیل واریانت به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ (یعنی، بی‌نهایت با علامت مشخص) صحبت کرد، زیرا به‌طور کلی، در عددهای مختلط، علامت معنایی ندارد. اگر z_n بی‌نهایت بزرگ باشد، یعنی $|z_n| \to +\infty$، در آن‌صورت می‌گویند $z_n \to \infty$ (بدون علامت!).

مثلاً، واریانت $z_n = z^n$ را در نظر می‌گیریم، که در آن، z عددی است مختلط. اگر ضمناً داشته باشیم: $|z_n| < ۱$، آن‌گاه $z_n \to ۰$؛ ولی اگر $|z| > ۱$ باشد، آن‌گاه $z_n \to \infty$. به‌سادگی دیده می‌شود که در حالت $|z| = ۱$ (ولی $z \neq ۱$)، حدی برای واریانت z_n وجود ندارد.

به‌سادگی می‌توان، همان حکم‌های اصلی نظریهٔ حدها را، تقریباً با تکرار همان بحث‌ها، برای واریانت مختلط هم ثابت کرد. از طرف دیگر، اگر به‌قضیهٔ سادهٔ زیر توجه داشته باشیم، خود به‌خود، همهٔ این حکم‌ها، به‌حالت واریانت مختلط هم، سرایت می‌کند.

واریانت مختلط $x_n + y_n i$ وقتی و تنها وقتی، به‌سمت حد $c = a + bi$ میل می‌کند که واریانت‌های حقیقی x_n و y_n، به‌ترتیب، به‌سمت حدهای a و b میل کنند.

اثبات این قضیه، بلافاصله از نابرابری زیر، نتیجه می‌شود:

$$\left.\begin{matrix} |x_n - a| \\ |y_n - b| \end{matrix}\right\} \leqslant |z_n - c| =$$

$$= \sqrt{(x_n - a)^۲ + (y_n - b)^۲} \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|$$

به‌این ترتیب، مطالعهٔ واریانت مختلط را می‌توان به‌مطالعهٔ واریانت حقیقی منجر کرد. اصل تقارب [۳۹] برای واریانت مختلط هم، از همین راه ثابت می‌شود.

اکنون، رشتهٔ نامتناهی

$$\sum_{n=۱}^{\infty} c_n = c_۱ + c_۲ + \cdots + c_n + \cdots$$

را، با جمله‌های مختلط $c_n = a_n + b_n i$ در نظر می‌گیریم. در این‌جا هم، حد مجموع‌های جزئی:

$$C_n = \sum_{k}^{n} c_k$$

مجموع رشته نامیده می‌شود. مثلاً، برای تصاعد هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + \cdots$$

(که در آن، z عددی مختلط و مخالف ۱ است)، مجموع جزئی برابر است با

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

از این‌جا روشن می‌شود که، به‌ازای $|z| < 1$، رشتهٔ مفروض، دارای مجموع

$$C = \frac{1}{1 - z}$$

است و، به‌ازای $|z| \geqslant 1$، برای آن، مجموع (متناهی) وجود ندارد.

همهٔ مفهوم‌ها و قضیه‌های اساسی شماره‌های **۳۶۲** و **۳۶۴** (با نتیجه‌گیری‌های آن‌ها)، در این‌جا هم، به‌قوت خود باقی می‌مانند.

بررسی رشته‌های مختلط را می‌توان، براساس قضیهٔ زیر، منجر به‌پرسی دو رشتهٔ حقیقی کرد.

تقارب رشتهٔ مختلط

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n i) \qquad (C)$$

با مجموع $C = A + Bi$، هم‌ارز تقارب دو رشتهٔ حقیقی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (A) \qquad \text{و} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (B)$$

به‌ترتیب، با مجموع‌های A و B، می‌باشد.

اثبات این حکم ساده است و، در واقع، تنها با تغییر اصطلاح‌های قضیه‌ای که در بالا دربارهٔ واریانت‌ها ثابت کردیم، به‌دست می‌آید.

حال، به‌اثبات قضیه‌ای می‌پردازیم که مشابه قضیهٔ شمارهٔ **۳۷۷** است.

اگر رشتهٔ مثبت

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \qquad (C^*)$$

که ازمدول‌های جمله‌های رشتهٔ (C) تشکیل شده است، متقارب باشد، درآن‌صورت، رشتهٔ (C) هم، متقارب خواهد بود.

در واقع، با توجه به‌نابرابری واضح

$$\left.\begin{matrix}|a_n|\\|b_n|\end{matrix}\right\} \leqslant |c_n| = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

تقارب رشتهٔ (C^*)، به‌معنای تقارب دو رشتهٔ زیر است:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad و \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

و از این‌جا [۳۷۷] نتیجه می‌شود که رشته‌های (A) و (B) متقارب‌اند و در نتیجه، بنابر قضیهٔ پیش، رشتهٔ (C) هم متقارب می‌شود.

در حالتی‌که رشتهٔ (C^*) متقارب باشد، رشتهٔ (C) را متقارب مطلق گویند؛ توجه کنیم‌که، همان‌طورکه دیدیم، رشته‌های (A) و (B) هم متقارب مطلق می‌شوند.

به‌خاطر این قضیهٔ، مثلاً معیار دالامبر [۳۷۷]، اعتبار خود را، برای رشته‌های‌مختلط هم حفظ می‌کند.

قضیهٔ شمارهٔ **۳۸۷** دربارهٔ جابه‌جایی جمله‌هـای رشته و قاعدهٔ شمارهٔ **۳۸۹** دربارهٔ ضرب جمله به‌جملهٔ رشته‌هـا، در مورد رشته‌های مختلط متقارب مطلق هم درست است. در حالت اول، اثبات براساس رشته‌های حقیقی انجام می‌گیرد و در حالت دوم، همان اثبات درمورد رشته‌های حقیقی، دراساس خود، حفظ می‌شود.

بالاخره، با ترتیب مشابهی، می‌توان مفهوم‌ها و قضیه‌هـای اساسی نظریهٔ رشته‌های دوگانه را، به‌حالت رشته‌های مختلط، منتقل کرد.

۴۵۵. تابع‌هـای بـا متغیر مختلط. فـرض کنیم، متغیر مختلط $y=x+yi$، همهٔ مقدارهای ممکن را از یك مجموعهٔ $\mathcal{Z}=\{z\}$ ـ کـه از نظر هندسی متناظر با یك حوزهٔ (باز یا بسته) در صفحهٔ مختلط است ـ اختیارکند. اگر هر مقدار z از حوزهٔ $\mathcal{Z}$، متناظر با یك یـا چندمقدار از متغیر مختلط دیگر $w=u+vi$ باشد، آن‌وقت، متغیر اخیر راتابع، (به‌ترتیب، یك‌ارزشی یا چندارزشی) از z در حوزهٔ $\mathcal{Z}$ می‌نامند و می‌نویسند:

$$w=f(z) \quad \text{یا} \quad w=g(z), \ldots$$

به‌عنوان نمونهٔ تابع‌های یك‌ارزشی (و ضمناً، در تمامی صفحهٔ مختلط)، می‌توان از $|z|$، z^n و یا، به‌طور کلی، تابع‌های صحیح گویا، یعنی چندجمله‌ای‌های صحیح به‌صورت

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n$$

با ضریب‌های مختلط غیرمشخص c_0، c_1، ...، c_n نام برد. تابع کسری گویا، یعنی خارج‌قسمت تحویل‌ناپذیر دو چندجمله‌ای نیز، به‌طور یك‌ارزشی، در تمامی صفحه معین است، ولی در نقطه‌های نظیر ریشه‌های مخرج، برابر بی‌نهایت می‌شود. به‌عنوان مثال‌های دیگر تابع یك ارزشی، می‌توان از تابع‌های $\operatorname{Arg} z$ و $\sqrt[n]{z}$ نام برد. بعداً، در **۴۵۷** تا **۴۶۰**، با سایر تابع‌های مهم با متغیر مختلط، آشنا می‌شویم.

از این به‌بعد، اگر خلاف آن‌را ذکر نکنیم، تابع‌ها را یك‌ارزشی به‌حساب خواهیم آورد.

اگر $w=u+vi$، تابعی از $z=x+yi$ در حوزهٔ $\mathcal{Z}=\{z\}=\{x+yi\}$ باشد، در آن‌صورت، مولفه‌های u و v آن، به‌روشنی، تابع‌هایی از z و یا، هم‌ارز آن، از x و y درحوزهٔ نظیر $\mathcal{Z}^*=\{(x, y)\}$ خواهند بود (که از لحاظ هندسی، با همان شکل $\mathcal{Z}$ نمایش داده می‌شود):

$$u=u(x, y), v=v(y, y)$$

مثلاً برای تابع حقیقی $w=|z|$ یا $w=\arg z$، به‌ترتیب، داریم:

$$u=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{یا} \quad u=2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \quad (v=0)$$

و برای تابع $w=z^n=(x+yi)^n$ روشن است که

$$u=x^n-\frac{n(n-1)}{1\times 2}x^{n-2}y^2+\ldots$$

$$v=nx^{n-1}y-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}x^{n-3}y^3+\ldots$$

c را نقطهٔ تجمع حوزهٔ $\mathcal{Z}$ می‌گیریم. گویند، تابع $w=f(z)$، ضمن میل z به c، دارای حد C است*، اگر برای هر عدد $\varepsilon>0$، چنان عدد $\delta>0$ پیدا شود که نابرابری

*) در این‌جا، c و C عددهای مختلط هستند.

$|f(z)-C|<\varepsilon$ تنها به‌ازای $|z-c|<\delta$ ($z\neq c$ و) برقرار باشد.

این حقیقت را، طبق معمول، این‌طور می‌نویسند:

$$\lim_{z\to c} w=\lim_{z\to c} f(z)=C$$

به‌همین ترتیب، می‌توان تعریف را، برای حالتی هم که c (یا C) برابر ∞ باشد، تنظیم کرد. همچنین، می‌توان آن‌را «با زبان دنباله‌ها» هم بیان کرد.

اگر $c=a+bi$ و $C=A+Bi$ باشد، به سادگی (و با توجه به‌شمارهٔ **۴۵۴**)، می‌توان رابطهٔ قبل را، به‌صورت دو رابطهٔ زیر (که هم‌ارز آن هستند) نوشت:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} u(x, y)=A,\quad \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} v(x, y)=B$$

پیوستگی تابع $f(z)$ در نقطهٔ $z_0=x_0+y_0 i$ از حوزهٔ $\mathcal{Z}$، با برابری زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

که به‌روشنی، با پیوستگی دو مولفهٔ $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در نقطهٔ (x_0, y_0) هم‌ارزاست.

به‌این ترتیب، اگر عبارت‌هایی را که برای $|z|$ و z^n داشتیم به‌یاد آوریم، می‌بینیم که این تابع‌ها، در تمامی صفحهٔ متغیر مختلط، پیوسته‌اند. به‌همین ترتیب، $\arg z$، در همه‌جا، به‌استثنای بخش منفی محور حقیقی، پیوسته است.

البته، پیوستگی را، به‌طور مستقیم و از ملاحظه‌های مربوط به‌مختلط بودن هم، می‌توان ثابت کرد. مثلاً، برای تابع $|z|$، بلافاصله و از نابرابری زیر، نتیجه می‌شود:

$$\big||z|-|z_0|\big|\leqslant|z-z_0|$$

و برای تابع z^n داریم:

$$z^n-z_0^n=(z-z_0)(z^{n-1}+z_0 z^{n-2}+\cdots+z_0^{n-1})$$

وقتی که z به‌اندازهٔ کافی به z_0 نزدیک شود، مقدارهای z به‌وسیلهٔ مقدار ثابتی، کران‌دار می‌شوند: $|z|\leqslant M$، به‌طوری که

$$|z^n-z_0^n|\leqslant nM^{n-1}\cdot(z-z_0)$$

که از آن‌جا، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

اکنون دیگر به‌سادگی می‌توان پیوستگی تابع گویای صحیح و تابع گویای کسری

را ثابت کرد (در حالت اخیر، به‌استثنای ریشه‌های مخرج).

تعریف مشتق، برای تابع $w=f(z)$ در نقطهٔ $z=z_0$، به‌همان صورتی است که در حساب دیفرانسیلی معمولی داشتیم:

$$w'=f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

مثلاً، برای تابع $w=z^n$ داریم:

$$\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+z_0^{n-1}$$

به‌نحوی که وقتی z به‌سمت z_0 میل کند، به‌همان دستور معروف می‌رسیم:

$$w'=nz_0^{n-1}$$

دستور شمارهٔ **۹۴** برای مشتق تابع معکوس و همهٔ قاعده‌های مشتق‌گیری شماره‌های **۹۷** و **۹۸**، بدون تغییر، در این‌جا هم به‌قوت خود باقی هستند. به‌طریق مشابهی، می‌توان به‌تعریف مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر هم رسید.

باز هم در مورد رشته‌ها یادآوری می‌کنیم که همهٔ جمله‌های رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

تابع‌هایی از متغیر مختلط z در همان یك حوزهٔ $\mathcal{Z}$ می‌باشند.

در این‌جا هم می‌توان مفهوم تقارب یکنواخت را با همان اصطلاح‌های شمارهٔ **۴۲۸** آورد. همچنین، در مورد رشته‌های مختلط تابعی هم، می‌توان، به کمك رشتهٔ مثبت محدودکننده، به‌یکنواختی تقارب آن پی‌برد، زیرا معیار ویرشتراس، در این‌جا هم به‌قوت خود باقی است. از قضیهٔ دربارهٔ رشته‌های تابعی، به‌قضیهٔ مربوط به عبور جمله به جمله به‌سمت حد، در رشته‌های متقارب یکنواخت می‌رسیم [قضیهٔ ۴، **۴۳۳**] که درست شبیه بالا، قابل اثبات است.

اکنون، به‌بررسی حالت خاص رشته‌های توانی می‌پردازیم که، در نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، نقش استثنایی مهمی به‌عهده دارند.

۴۵۶. رشته‌های توانی. رشتهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots \qquad (1)$$

که در آن، c_0، c_1، c_2، ...، ضریب‌های مختلط ثابت‌اند و z متغیری است که در تمامی صفحهٔ مختلط تغییر می‌کند. همچنین، شبیه ۳۷۹ [یا ۳۸۰]، می‌توان وجود چنان عدد غیرمنفی R را ثابت کرد که رشتهٔ (۱)، برای $|z|<R$ (به‌شرط $R>0$) متقارب‌مطلق و برای $|z|>R$ (به‌شرط $R<+\infty$) متباعد باشد. به این ترتیب، اگر حالت $R=0$ را کنار بگذاریم، به‌ازای $R=+\infty$، رشته در تمامی صفحهٔ مختلط، متقارب می‌شود؛ و در حالت متناهی بودن R، رشتهٔ (۱) درون دایرهٔ به‌مرکز مبداء وشعاع R متقارب و در بیرون این‌دایره، متباعد است. در این‌جا، به‌جای ناحیهٔ تقارب، دایرهٔ تقارب پدید می‌آید که، ضمناً، دلیل اصطلاح «شعاع تقارب» را روشن می‌کند.

مثلاً، به‌طور ساده و به‌کمك معیار دالامبر، می‌فهمیم که رشتهٔ

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

برای مقدارهای مختلط دلخواه z، متقارب مطلق است، درحالی که رشته‌های

$$\sum_{0}^{\infty}z^n,\quad \sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2},\quad \sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

دارای شعاع تقارب $R=1$ هستند.

رفتار رشتهٔ توانی، روی محیط دایرهٔ تقارب، می‌تواند مختلف باشد. مثلاً درمورد سه‌مثالی که هم‌اکنون آوردیم، رشتهٔ $\sum_{0}^{\infty}z^n$، در همهٔ نقطه‌های محیط دایرهٔ $|z|=1$ متباعد است، زیرا شرط اصلی تقارب از بین می‌رود و جملهٔ عمومی به سمت صفر میل نمی‌کند؛ رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$، در همهٔ نقطه‌های واقع بر محیط دایرهٔ تقارب، متقارب مطلق است، زیرا رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ در آن‌جا متقارب می‌شود؛ بالاخره، اگر در رشتهٔ سومی $z=\cos\theta+i\sin\theta$ قرار دهیم، به‌صورت

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$$

درمی‌آید و (به‌استثنای حالت $\theta=0$، یعنی $z=1$) متقارب می‌شود [۳۸۵، ۲)]، ولی نه به‌طور مطلق.

یادداشت. اگر ضریب‌های رشتهٔ توانی، عددهای حقیقی باشند (مثل مثال‌هایی که

آوردیم)، در آن‌صورت روشن است که شعاع R «دایرهٔ تقارب» بر صفحهٔ مختلط، با شعاع سابق «بازهٔ تقارب» بر محور حقیقی، منطبق می‌شود.

اکنون از آن قضیه‌هایی از رشته‌های توانی نام می‌بریم، که قابل انتقال به‌رشته‌های مختلط توانی هستند.

قضیه‌های ۱° و ۲° شمارهٔ ۴۳۷، عیناً حفظ می‌شوند، به‌نحوی که مجموع (شعاع‌توانی (۱)، در درون دایرهٔ تقارب، تابعی پیوسته از z است.

آن‌چه که به‌قضیهٔ آبل [۴۳۷، ۶°] مربوط می‌شود، اکنون آن را به‌این صورت بیان می‌کنیم:

اگر رشتهٔ (۱) در یک نقطهٔ z_0 از دایرهٔ $|z| = R$ متقارب باشد، در آن صورت، با نزدیک شدن نقطهٔ z به‌نقطهٔ z_0 از درون و درطول شعاع، داریم:

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$

درحالت خاصی که $z_0 = R$ باشد، می‌توان $z = r$ را، متغیر حقیقی مثبتی به‌حساب آورد که، در این صورت، برابری فوق چنین می‌شود:

$$\lim_{r \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$$

که اگر $c_n = a_n + b_n i$ بگذاریم، می‌توان آن را به‌دو برابری زیر تجزیه کرد:

$$\lim_{r \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n, \quad \lim_{r \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n R^n$$

از آن‌جا که رشته‌های سمت‌چپ متقاربند، با توجه به‌شرط تقارب رشته‌ها

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n i) R^n$$

برای اثبات این برابری، تنها این می‌ماند که به‌قضیهٔ معمولی آبل استناد کنیم.

درحالت کلی، اگر آرگومان عدد z_0 را θ_0 بنامیم، آن‌وقت می‌توان نوشت:

$$z_0 = R(\cos\theta_0 + i \sin\theta_0),\ z = r(\cos\theta_0 + i \sin\theta_0)$$

در این صورت، برابری که باید ثابت کنیم، چنین می‌شود:

---

*) این رابطه را می‌توان درحالت کلی‌تر هم، یعنی وقتی z با قانون کلی‌تری به‌سمت z_0 میل کند، ثابت کرد، ولی ما در این‌جا، به‌آن نمی‌پردازیم.

$$\lim_{r\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\cos n\theta_0+i\sin n\theta_0)r^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\cos n\theta_0+i\sin n\theta_0)R^n$$

که اگر عامل‌های داخل پرانتزها را، به‌صورت ضریب درنظر بگیریم، مسأله به روشنی به‌حالتی منجر می‌شود که قبلاً بررسی کرده‌ایم.

اکنون (بدون استناد به قضیهٔ کلی مربوط به مشتق‌گیری رشته‌ها)، مستقیماً ثابت می‌کنیم که: در درون دایرهٔ تقارب رشتهٔ توانی، می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت، یعنی اگر برای $|z|<R$ فرض کنیم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

در آن صورت، داریم:

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}$$

پیش ازهمه، یادآوری کنیم که شعاع تقارب رشتهٔ اخیرهم، برابر است با R؛ این مطلب را می‌توان، مثلاً، به‌کمك قضیهٔ کوشی-دالامبر، متوجه شد.

درنقطهٔ معین z_0، $|z_0|<R$، داریم:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+z_0^{n-1}) \quad (۲)$$

که اگر ρ را بین $|z_0|$ و R درنظر بگیریم، ازآن‌جاکه می‌توان $|z|<\rho$ به‌حساب آورد، داریم:

$$|c_n(z^{n-1}+z_0z^{n-2}+\cdots+z_0^{n-1})|<n\cdot|c_n|\cdot\rho^{n-1}$$

رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}n|c_n|\rho^{n-1}$ متقارب است، زیرا ρ کمتر از R است و، همان‌طورکه دیدیم، همین R، شعاع تقارب رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty}nc_nz^{n-1}$ هم می‌شود. به‌این‌ترتیب، با استفاده ازمعیارویرشتراس می‌توان یکنواختی تقارب رشتهٔ (۲) را نتیجه گرفت و، به‌ازای $z\to z_0$، درآن جمله به‌جمله به‌سمت حد عبورکردکه به‌نتیجهٔ مطلوب منتهی می‌شود.

از همین‌جا نتیجه می‌گیریم که، فرض‌های ۸ و ۹ شمارهٔ ۴۳۸ هم، بدون تغییر، به‌حالت مختلط انتقال می‌یابد.

به‌این ترتیب، در درون دایرهٔ تقارب، مجموع رشتهٔ توانی، همراه با همهٔ مشتق‌ها

پیوسته است. به‌زبان دیگر، اگر تابع را برحسب توان‌های z به‌رشتهٔ توانی بسط دهیم، در آن صورت، فاصلهٔ از مبداء تا نزدیک‌ترین نقطهٔ ناپیوستگی تابع (یا یك مشتق آن) به‌آن، عبارت است از مرز طبیعی برای شعاع تقارب این بسط.

درحالت تصاعد

$$۱-z+z^۲-\cdots+(-۱)^n z^n+\cdots=\frac{۱}{۱+z}$$

این نقطه $z=-۱$ است که برمحور حقیقی قراردارد، بنابراین ازابتدا معلوم است که شعاع تقارب بسط تابع $\frac{۱}{۱+z}$ نمی‌تواند بیشتر از واحد باشد، ولی درمورد تصاعد

$$۱-z^۲+z^۴-\cdots+(-۱)^n z^{۲n}+\cdots=\frac{۱}{۱+z^۲}$$

وضع به‌گونهٔ دیگری است. مجموع آن، درنقطه‌های $z=\pm i$ از محور موهومی، به‌فاصلهٔ ۱ ازمبداء، ناپیوسته است؛ ولی وقتی‌که به‌محور حقیقی می‌رویم‌که در طول آن، تابع $\frac{۱}{۱+x^۲}$، همراه با همهٔ مشتق‌های خود، پیوسته است، نمی‌توان توضیح دادکه چرا شعاع تقارب بسط برابر با واحد است.

بعداً بازهم به‌مثال‌هایی ازاین قبیل برخواهیم خورد که، عبور به‌حوزهٔ مختلط، کمك می‌کندتا علت‌اصلی‌این‌یا آن ویژگی بسط یك‌تابع حقیقی ازمتغیرحقیقی‌را روشن می‌کند.

درخاتمه متذکرمی‌شویم‌که همهٔ قاعدهٔ‌عمل روی رشته‌های توانی [۴۴۵]، قضیه‌های مربوط به‌جایگذاری رشته در رشته [۴۴۶] وتقسیم رشته‌ها [۴۴۸] و، سرانجام، قضیهٔ مربوط به‌عکس رشته‌های توانی [۴۵۱]، دراین‌جا نیز اعتبارخود را حفظ می‌کنند وهمان استدلال‌ها، با خصلت صوری خود، برای رشته‌های توانی مختلط هم، به‌درد می‌خورند.

۴۵۷. تابع‌های نمایی. در ۴۰۴ (۱۱) دیدیم‌که، برای x حقیقی دلخواه، بسط زیروجود دارد:

$$e^x=۱+\frac{x}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

اگر دراین رشته، متغیرحقیقی x را با متغیرمختلط $z=x+yi$ عوض کنیم، رشتهٔ $۱+\sum_{۱}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ به‌دست می‌آیدکه، همان‌طورکه ازقبل می‌دانیم [۴۵۶]، رشته‌ای متقارب، یعنی دارای مجموع معین متناهی درتمامی صفحهٔ متغیرمختلط است. مجموع این رشته را،

بنابه‌تعریف، برابر مقدار تابع نمائی e^z، از متغیر مختلط غیرمشخص z، می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم:

$$e^z = ۱ + \frac{z}{۱!} + \frac{z^۲}{۲!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (۳)$$

همان‌طور که دیدیم، این تعریف، هیچ تناقضی با تعریف معمولی، برای حالت نمای‌حقیقی، ندارد و، به‌طور طبیعی، تعمیم آن است.

اگر از قاعدهٔ ضرب رشته‌های توانی استفاده کنیم، آن‌وقت شبیه ۳۹۰، ۶)، به‌سادگی معلوم می‌شود که، برای مقدارهای مختلط دلخواه z و z'، داریم:

$$e^z.e^{z'} = e^{z+z'} \qquad (۴)$$

یعنی، این ویژگی خاص تابع‌های نمائی، در حوزهٔ عددهای مختلط هم، درست است.

تابع e^z در تمامی صفحه پیوسته است، به‌جز آن، دارای مشتق همهٔ مرتبه‌ها می‌باشد. با مشتق گیری جمله به‌جمله از رشتهٔ معرف آن، مثل سابق به‌دست می‌آید:

$$(e^z)' = e^z$$

$z = x + yi$ می‌گیریم، که در آن، x و y عددهایی حقیقی هستند. اگر در (۴)، z را به x و z' را به yi تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$e^z = e^x.e^{yi}$$

حالا، به‌توان خاص e^{yi}، با نمای موهومی خالص، می‌پردازیم. اگر براساس تعریف (۳)، yi را به‌جای z قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$e^{yi} = ۱ + yi - \frac{y^۲}{۲!} - \frac{y^۳}{۳!}i + \frac{y^۴}{۴!} + \cdots + (-۱)^n \frac{y^{۲n}}{(۲n)!} +$$

$$+ (-۱)^n \frac{y^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}i + \cdots$$

ویا با جداکردن بخش حقیقی از موهومی

$$e^{yi} = \left(۱ - \frac{y^۲}{۲!} + \frac{y^۴}{۴!} + \cdots + (-۱)^n \frac{y^{۲n}}{(۲n)!} + \cdots\right) +$$

$$+ \left(y - \frac{y^۳}{۳!} + \cdots + (-۱)^n \frac{y^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \cdots\right)i$$

درداخل پرانتزها، بسطهای $\cos y$ و $\sin y$[۴۰۴، (۱۲) و(۱۳)] وجود دارد و،بنابراین، به‌دستور معروف زیرمی‌رسیم:

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y \qquad (۵)$$

که به‌وسیلهٔ اولر ثابت شده است. ازاین‌جا، مثلاً* داریم:

$$e^{\frac{\pi}{۲}i} = i,\ e^{\pi i} = -۱,\ e^{\frac{۳\pi}{۲}i} = -i,\ e^{۲\pi i} = ۱$$

به‌این ترتیب، با فرض $z = x + yi$، داریم:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)^* \qquad (۶)$$

می بینیم که

$$e^x = e^{R(z)} = |e^z|,\ y = I(z) = \operatorname{Arg} e^z$$

از آن‌جاکه، برای هر x حقیقی دلخواه، داریم: $e^x > ۰$، بنابراین e^z، برای z مختلط غیرمشخص، مخالف صفر است.

اگر در (۵)، y را به $-y$ تبدیل کنیم، از جمع و تفریق دو دستور، به رابطه‌های

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{۲},\ \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{۲i} \qquad (۷)$$

می‌رسیم که، در واقع، تابع‌های مثلثاتی با آوند حقیقی را، برحسب تابع‌های نمائی با آوند موهومی‌خالص، بیان می‌کنند. ما بازهم دربارهٔ این‌حقیقت جالب بحث‌خواهیم کرد.

اگر در برابری (۶)، y را با $y + ۲\pi$ عوض کنیم، در آن صورت، مقدار سمت راست برابری (و درنتیجه، مقدار سمت‌چپ آن) تغییر نمی کند؛ به‌زبان دیگر

$$e^{z + ۲\pi i} = e^z$$

یعنی، تابع نمائی، تابعی متناوب و دورهٔ تناوب موهومی خالص آن، برابر $۲\pi i$ است.

به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که تابع نمائی e^z، دورهٔ تناوب دیگری، به‌جز آن‌ها که به‌صورت $۲k\pi i$ هستند (k، عددی‌است درست)، ندارد. درواقع، اگر $e^{z+\omega} = e^z$، در آن صورت (با فرض $z \neq ۰$) خواهیم‌داشت $e^\omega = ۱$. اگر فرض کنیم $\omega = \alpha + \beta i$، آن‌وقت [(۶) را ببینید] ، $e^\alpha(\cos\beta + i \sin\beta) = ۱$ و از آن جا $e^\alpha = ۱$ و $\alpha = ۰$ و، سپس،

---

*) می‌توانستیم، این برابری را، پایهٔ تعریف تابع نمائی ازآوند مختلط قراردهیم؛ در این صورت، رابطهٔ (۴)، از قضیهٔ مربوط به‌جمع در سینوس و کسینوس، به‌دست می‌آمد.

$\cos\beta=1$ ، $\sin\beta=0$ و، در نتیجه، $\beta=2k\pi$ می‌شود. فهوالمطلوب.

حالا، و با توجه به‌برابری $e^{\pm 2\pi i}=1$، می‌توانیم بفهمیم که، چرا بسط تابع $\frac{x}{e^x-1}$ به رشتهٔ توانی [۴۴۹، (۱۲)]، شعاع تقاربی برابر 2π دارد؛ اگر روی محور حقیقی، خصوصیتی برای تابع $\frac{x}{e^x-1}$ وجود ندارد که بتواند این وضع را روشن کند، ولی، روی محور موهومی، نقطه‌هایی وجود دارد که، در آن‌ها تابع برابر بی‌نهایت می‌شود و نقطه‌های $z=\pm 2\pi i$، که به‌فاصله 2π ازمبداء قراردارند، نزدیک‌ترین این نقطه‌هاهستند.

درارتباط با تابع نمائی، که به‌حالت نمائی مختلط دلخواه تعمیم‌یافته است، تابع جالبی را به‌یاد می‌آوریم که در ۱۳۸ و ۴۰۷ مورد بررسی قرارداده بودیم:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\ (x\neq 0)\quad f(0)=0$$

این تابع درطول محورحقیقی، ومنجمله درنقطهٔ $x=0$، همراه با همهٔ مشتق‌های آن پیوسته است، باوجود این، امکان بسط آن برحسب توان‌های x، درهرهمسایگی صفر، وجودندارد. حالا می‌توانیم علت این وضع را، با عبور به‌متغیرمختلط $z=x+yi$، مستقیماً، روشن کنیم. درواقع، تابع $e^{-\frac{1}{z^2}}$ $(z\neq 0)$، وقتی $z\to 0$، حتی دارای حد نیست، زیرا مثلاً، وقتی‌که z درطول‌محورموهومی به‌صفرنزدیک می‌شود، اگرفرض کنیم $z=yi$ و $y\to 0$، خواهد شد:

$$e^{-\frac{1}{z^2}}=e^{\frac{1}{y^2}}\to\infty$$

۴۵۸. تابع لگاریتمی. عدد مختلط دلخواه w (مخالف صفر) را انتخاب و فرض می‌کنیم که بخواهیم عدد z را طوری پیدا کنیم که در معادلهٔ زیرصدق کند:

$$e^z=w$$

(همان‌طورکه می‌دانیم، این‌معادله به‌ازای $w=0$ جواب ندارد). این عدد z را، لگاریتم (طبیعی) w می‌نامند و با نماد زیرنشان می‌دهند:

$$z=\ln w \qquad (8)$$

اگرفرض کنیم $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $z=x+yi$، آن‌گاه، با توجه به (۶)، می‌توان معادلهٔ (۸) را، به‌معادله‌های زیرتجزیه کرد:

$$e^x=r,\ \cos y=\cos\theta,\ \sin y=\sin\theta$$

واز آن‌جا

$$x=\ln r^{*},\ y=\theta+2k\pi\ (k \text{ عددی درست})$$

به‌این نتیجه می‌رسیم که لگاریتم w (برای $w\neq 0$) همیشه وجود دارد و برابراست با

$$\operatorname{Ln} w=\ln|w|+i.\operatorname{Arg} w=\ln|w|+i\arg w+2k\pi i \qquad (9)$$

که، به‌این ترتیب، مقداری چند ارزشی است. این موضوع را می‌شد به‌سادگی، وباشروع ازتابع نمائی متناوب، پیش‌بینی کرد. با فرض $k=0$، به‌اصطلاح به‌مقدار اصلی لگاریتم می‌رسیم:

$$\ln w=\ln|w|+i\arg w \qquad (10)$$

ازهمین‌جا، معلوم می‌شود که مؤلفهٔ موهومی آن، در بازهٔ $[-\pi,\pi)$ قرار دارد:

$$-\pi<\mathrm{I}(\ln w)\leqslant\pi$$

مثلاً داریم:

$$\ln 1=0,\ \operatorname{Ln} 1=2k\pi i,\ \ln(-1)=\pi i,\ \operatorname{Ln}(-1)=(2k+1)\pi i,$$

$$\ln i=\frac{\pi}{2}i,\quad \operatorname{Ln} i=\frac{4k+1}{2}\pi i,\ \ldots$$

وقتی که w متغیر باشد، با دستور (۱۰)، شاخهٔ اصلی تابع لگاریتمی $\operatorname{Ln} w$ (که‌چند ارزشی‌است)، بیان‌می‌شود. شاخه‌های دیگر، به‌ازای مقدارهای درست دیگر k و ازدستور زیر به‌دست می‌آیند:

$$\operatorname{Ln} w=\ln w+2k\pi i$$

به‌سادگی دیده می‌شود که تابع (۱۰) در تمامی صفحهٔ متغیر مختلط w ـ به‌استثنای نقطهٔ مبداء وبخش‌منفی محورحقیقی ـ پیوسته‌است. ناپیوستگی رانمی‌توان درنقطهٔ $w=0$ برطرف کرد، زیرا روشن است که، به‌ازای $w\to 0$، خواهیم داشت که $\ln w\to\infty$. ولی درمورد مقدارهای منفی $w_0=u_0<0$، وضع به‌گونهٔ دیگری است. در این‌جا، ناپیوستگی، به‌مفهومی مصنوعی است و به‌این‌خاطر به‌وجود آمده است که $\arg w$ رادربازهٔ $[-\pi,\pi)$ گرفته‌ایم. وقتی که $w=u+vi\to w_0$، به ازای $v>0$ داریم: $\arg w\to\pi=\arg w_0$، ولی به‌ازای $v<0$، خواهیم داشت: $\arg w\to-\pi$. ولی

*) دراین‌جا، لگاریتم طبیعی عادی عدد مثبت r درنظر گرفته می‌شود.

اگر از شاخهٔ اصلی، یعنی $\ln w$ در ربع دوم، به‌شاخهٔ دیگر، یعنی $\ln w+۲\pi i$ در ربع سوم برویم، دوباره پیوستگی برقرار می‌شود. به‌این‌ترتیب، وقتی که می‌خواهیم از چندارزشی بودن تابع، دوری بجوییم و تابع چند ارزشی را به‌شاخه‌های یك ارزشی تقسیم می‌کنیم، درواقع، برای هر شاخهٔ جداگانه، ناپیوستگی به وجود می‌آوریم. برعکس، هرشاخه، به‌شاخهٔ دیگر، به‌صورت پیوسته عبور می‌کند، این بستگی شاخه‌های مختلف تابع چندارزشی، یکی ازویژگی‌های مهم صفحهٔ مختلط است که، درتابع‌های چندارزشی حقیقی، که روی محور حقیقی معین می‌شوند، شبیهی برای آن نمی‌توان پیدا کرد.

ازروی قضیهٔ کلی مربوط به‌مشتق تابع‌های معکوس (با استثناکردن نقطه‌های ناپیوستگی) داریم:

$$(\ln w)'=\frac{۱}{(e^z)'}=\frac{۱}{e^z}=\frac{۱}{w} \qquad (۱۱)$$

w را به $w+۱$ تبدیل می‌کنیم و تابع $z=\ln(۱+w)$ $(w\neq -۱)$ را درنظر می‌گیریم. آن‌وقت

$$e^z=e^{\ln(۱+w)}=۱+w=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Rightarrow w=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود که، برای مقدارهای به‌قدرکافی کوچك (از لحاظ قدرمطلق) w، می‌توان تابع $z=\ln(۱+w)$ را به‌صورت رشته‌ای برحسب توان‌های w بسط داد:

$$z=w+c_۲w^۲+c_۳w^۳+\cdots+c_nw^n+\cdots$$

که با مشتق‌گیری از آن، نسبت به w، به‌رشتهٔ زیرمی‌رسیم:

$$[\ln(۱+w)]'=۱+۲c_۲w+۳c_۳w^۲+\cdots+nc_nw^{n-۱}+\cdots$$

که درعین‌حال، با توجه به (۱۱)، به‌این صورت هم قابل بیان است:

$$[\ln(۱+w)]'=\frac{۱}{۱+w}=۱-w+w^۲-\cdots+(-۱)^{n-۱}w^{n-۱}+\cdots$$

ازمقایسهٔ این دورابطه، معلوم می‌شود

$$۲c_۲=-۱,\ ۳c_۳=۱,\ \cdots,\ nc_n=(-۱)^{n-۱},\ \cdots$$

وازآن‌جا

$$c_۲=-\frac{۱}{۲},\quad c_۳=\frac{۱}{۳},\ \cdots,\ c_n=(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n},\ \cdots$$

بنابراین بالاخره، درهمسایگی صفر، این بسط را داریم:

$$\ln(1+w)=w-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{w^n}{n}+\cdots \qquad (۱۲)$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، این رشته، شعاع تقاربی برابر $R=1$ دارد. دیدیم که، برای z به‌قدر کافی کوچك، مجموع آن، برابر مقدار اصلی لگاریتم $\ln(1+w)$ می‌شود. آیا این حکم، برای تمامی دایرهٔ $|w|<1$ درست است؟

چون رشتهٔ (۱۲)، به‌طور صوری، در برابری

$$e^{w-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\cdots}=1+w$$

صدق می‌کند، بنابراین، درواقع هم بااین برابری سازگار است و درنتیجه، متقارب است. به‌این‌ترتیب، مجموع رشتهٔ (۱۲) در تمامی دایرهٔ $|w|<1$، بدون شك، یکی‌ازمقدارهای $\mathrm{Ln}(1+w)$ است؛ اکنون باید روشن کنیم که، آیا این مقدار، درست همان مقدار اصلی است؟

اگر $|w|<1$، یعنی نقطهٔ معرف عدد $1+w$ در درون دایرهٔ به شعاع ۱ و مرکز نقطهٔ $w=-1$ واقع باشد، در آن صورت $\arg(1+w)$ بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ قرار می‌گیرد و مقدارهای دیگر $\arg(1+w)$ در بازه‌های

$$\left(\frac{-5\pi}{2},\frac{-3\pi}{2}\right) \text{ و } \left(-\frac{9\pi}{2},-\frac{7\pi}{2}\right),\ldots$$

و یا

$$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right) \text{ و } \left(\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right),\ldots$$

واقع می‌شوند. مؤلفهٔ موهومی مجموع رشتهٔ (۱۲) هم، $\mathrm{Arg}(1+w)$ است [(۹) را ببینید]، که برای $w=u+iv$ به‌قدر کافی کوچك، مقدار اصلی $\arg(1+w)$ را می‌دهد، یعنی مقداری که بین $\frac{-\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ واقع است؛ در عین حال، به‌عنوان تابع پیوسته‌ای از u و v، نمی‌تواند به‌بازه‌های دیگر بجهد و، درنتیجه، برای همهٔ $|w|<1$ها، درست برابر $\arg(1+w)$ است. به‌این‌ترتیب، ثابت می‌شود که برابری (۱۲)، در تمامی دایرهٔ $|w|<1$، برقرار است.

اگر در (۱۲)، w را به $w-$ تبدیل کنیم و رشتهٔ حاصل را از رشتهٔ (۱۲) کم کنیم، بسط مفیدی به‌دست می‌آید*:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+w}{1-w}=w+\frac{w^3}{3}+\cdots+\frac{w^{2n-1}}{2n-1}+\cdots \qquad (13)$$

که برای $|w|<1$ برقرار است.

۴۵۹. تابع‌های مثلثاتی و تابع‌های معکوس آن‌ها. می‌دانیم [۴۰۴، (۱۲) و (۱۳)] که، برای x حقیقی، تابع‌های $\cos x$ و $\sin x$، با رشته‌های زیر نشان داده می‌شوند:

$$\cos x=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

طبیعی است که تابع‌های $\cos z$ و $\sin z$ برای z مختلط دلخواه را هم، به کمک رشته‌های مشابهی تعریف کنیم:

$$\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad (14)$$

که در تمامی صفحهٔ متغیر z، متقارب است.

این وسیلهٔ طرح تابع‌های مثلثاتی، برای ما تازگی ندارد: حتی در **۴۴۳**، آن‌ها را در حوزهٔ حقیقی به‌کار بردیم (برای این‌که، این‌گونه طرح تابع‌های مثلثاتی، که در آن‌ها نیازی به‌هندسه نیست، برای آنالیز ریاضی، اهمیت زیادی دارد). در این‌جا هم‌می‌توان، با بحثی شبیه آن‌جا، قضیهٔ جمع، رابطه‌های تبدیل، ویژگی تناوب و، همچنین، قاعدهٔ مشتق‌گیری را برای کسینوس و سینوس، با مقدارهای مختلط متغیر مستقل، ثابت کرد.

ضمناً، همان نتیجه‌ها را، ازطریق دیگر، یعنی با توجه به‌بستگی بین تابع‌های مثلثاتی با تابع‌های نمائی، به‌دست آورد. برای z مختلط نامشخص، با تعمیم آن‌چه در **۴۵۷** برای $z=yi$ گفتیم، می‌توان نتیجه گرفت [با (۵) مقایسه کنید]:

$$e^{\pm zi}=\cos z\pm i\sin z$$

و از آن‌جا [با (۷) مقایسه کنید]:

---

*) چون مولفهٔ موهومی تفاضل $\ln(1+w)-\ln(1-w)$، بین $-\pi$ و $+\pi$ واقع است، بنابراین، این تفاضل، درست مقدار اصلی $\ln\frac{1+w}{1-w}$ را به‌دست می‌دهد.

$$cosz=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{۲},\quad sinz=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{۲i} \qquad (۱۵)$$

به‌کمك این‌دستورها، تمامی بحث و مطالعهٔ تابع‌های مثلثاتی، منجر به‌مطالعهٔ تابع‌های نمائی می‌شود [این تابع‌ها را، می‌شد، به‌جای (۱۴)، مبنای تعریف تابع‌های مثلثاتی قرار داد]، به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم، با شروع از دستورهای (۱۵)، دوباره، ویژگی‌های کسینوس و سینوس‌را ثابت‌کند و، همچنین، ثابت‌کنند که: ۱) $cosz$ و $sinz$، دارای‌دورهٔ‌تناوب‌دیگری، به‌جز $۲k\pi$ (k: عددی درست)، نیستند و ۲) همهٔ ریشه‌های این تابع‌ها، حقیقی‌اند.

اگر در (۱۵) فرض‌کنیم $z=yi$ (y، عددی حقیقی)، در آن‌صورت داریم:

$$cos\,yi=\frac{e^{y}+e^{-y}}{۲}=\mathrm{ch}\,y,\quad sin\,yi=\frac{e^{y}-e^{-y}}{۲}.i=i.\mathrm{sh}\,y \qquad (۱۶)$$

به‌این ترتیب، رابطهٔ بین تابع‌های هذلولی با آوند حقیقی، و تابع‌های مثلثاتی با آوند موهومی خالص‌را، مستقیماً بر قرار می‌کند. این نکته جالب است که $cos\,yi$، عددی است حقیقی و همیشه بزرگتر از واحد.

اکنون، با استفاده از قضیه‌های جمع، می‌توان نوشت:

$$cos(x+yi)=cosx.cos\,yi-sinx.sin\,yi,$$

$$sin(x+yi)=sinx.cos\,yi+cosx.sin\,yi$$

و یا [با در نظرگرفتن (۱۶)]:

$$cos(x+yi)=cosx.\mathrm{ch}\,y-i\,sinx.\mathrm{sh}\,y,$$

$$sin(x+yi)=sinx.\mathrm{ch}\,y+i\,cosx.\mathrm{sh}\,y$$

و به‌این ترتیب، کسینوس و سینوس، به‌مولفه‌های خود تجزیه می‌شوند.

تابع‌های tgz و $cotgz$، با دستورهای زیر معین می‌شوند:

$$tgz=\frac{sinz}{cosz}=\frac{۱}{i}.\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}}\qquad \left(z\neq\left(k+\frac{۱}{۲}\right)\pi\right)$$

$$cotgz=\frac{cosz}{sinz}=i.\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{e^{zi}-e^{-zi}}\qquad (z\neq k\pi)$$

که ضمناً، دارای دورهٔ تناوب π هستند.

بسطهای حاصل، برای tgx و $cotgx$. x، در ۴۴۹، بعد از تبدیل متغیر حقیقی x

به‌متغیر مختلط z، باز هم به‌قوت خود باقی هستند. اگر رابطه‌های حاصل از (۱۶) را در نظر بگیریم، می‌توانیم به‌دلیل شباهت بسطهای $x\cdot cotgx$ و $x\cdot \text{cth}x$ پی ببریم:

$$tgyi = i\cdot \text{th}\, y, \quad cotgyi = -i\cdot \text{cth}\, y$$

از تابع‌های معکوس مثلثاتی، به‌آرک تانژانت و آرک سینوس می‌پردازیم.

با توجه به‌این‌که تابع‌های مثلثاتی با تابع‌های نمائی بستگی دارند، می‌توان به‌طور طبیعی انتظار داشت که معکوس آن‌ها، به‌تابع‌های لگاریتمی مربوط باشند.

ازاین‌جا آغاز می‌کنیم که $w = tgz$، نمی‌تواند برابر $\pm i$ باشد (این‌مطلب، به‌سادگی و با برهان‌خلف، ثابت می‌شود). فرض می‌کنیم $w \neq \pm i$، در این‌صورت، می‌توان معادلهٔ

$$tgz = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1} = w$$

را نسبت به z، حل کرد:

$$e^{2zi} = \frac{1+wi}{1-wi}, \quad z = \frac{1}{2i}\,\text{Ln}\,\frac{1+wi}{1-wi}$$

این عبارت، برای $\text{Arc}\, tgw$، به‌روشنی، بی‌نهایت ارزشی است.

اگر مقدار اصلی لگاریتم را انتخاب کنیم، مقدار اصلی آرک تانژانت به‌دست می‌آید:

$$\text{arc}\, tgw = \frac{1}{2i}\,\ln\frac{1+wi}{1-wi} \qquad (w \neq \pm i)$$

بخش حقیقی این مقدار اصلی، در بازهٔ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ قرار دارد:

$$-\frac{\pi}{2} < R(\text{arc}\, tgw) < \frac{\pi}{2}$$

و سایر مقدارها، از روی دستور زیر به‌دست می‌آیند:

$$\text{Arc}\, tgw = \text{arc}\, tgw + k\pi \quad (k، \text{عددی درست است})$$

اگر در (۱۳)، w را به wi تبدیل کنیم، بسط شاخهٔ اصلی آرک تانژانت به‌دست می‌آید:

$$\text{arc}\, tgw = w - \frac{w^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

که برای $|w|<1$ وجود دارد*.

اکنون، به‌حل معادلهٔ

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=w$$

نسبت به z می‌پردازیم. داریم:

$$e^{2iz}-2wi.e^{iz}-1=0,\quad e^{iz}=wi\pm\sqrt{1-w^2}$$

و از آن‌جا

$$z=\operatorname{Arc}\sin w=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}(wi\pm\sqrt{1-w^2})$$

که در این‌جا هم، یك تابع بی‌نهایت ارزشی است.

مقدار اصلی لگاریتم را در نظر می‌گیریم:

$$z=\frac{1}{i}\ln(wi\pm\sqrt{1-w^2})$$

برای $w=1$ و $w=-1$، مقدار رادیکال برابر صفر می‌شود و، به ترتیب، به $z=\frac{\pi}{2}$ و $z=-\frac{\pi}{2}$ می‌رسیم، که به‌عنوان مقدار اصلی آرك سینوس می‌پذیریم. حالا $w\neq\pm1$ می‌گیریم؛ در برابر یکی از دو انتخاب ممکن، برای z، قرار می‌گیریم. روشن است که

$$(wi+\sqrt{1-w^2})(wi-\sqrt{1-w^2})=-1$$

به‌نحوی که

$$\frac{1}{i}\ln(wi+\sqrt{1-w^2})+\frac{1}{i}\ln(wi-\sqrt{1-w^2})=\pm\pi$$

و در نتیجه

$$R\Big(\frac{1}{i}\ln(wi+\sqrt{1-w^2})\Big)+R\Big(\frac{1}{i}\ln(wi-\sqrt{1-w^2})\Big)=\pm\pi$$

---

*) تابع $\operatorname{arc}tg\,w$، به‌ازای $w=\pm i$ برابر ∞ می‌شود.

و بخش‌های موهومی، تنها درعلامت با هم فرق دارند. چون هر کدام از بخش‌های حقیقی، ازمحدودهٔ بازهٔ $(-\pi, \pi)$ تجاوز نمی‌کنند، پس، تنها یکی از آن‌ها، بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ واقع می‌شود؛ مقدار آرك سینوس متناظر آن را، مقدار اصلی می‌گیریم. استثنا، تنها وقتی پیش می‌آید که هر دو بخش حقیقی، برابر $\frac{\pi}{۲}$ یا $-\frac{\pi}{۲}$ باشند، در چنین صورتی، مقدار اصلی‌را باید متناظر با بخش موهومی مثبت انتخاب کرد*. با این‌قرار، می‌توان گفت که مقدار اصلی آرك سینوس، با این شرط تعریف می‌شود:

$$-\frac{\pi}{۲} \leqslant R(\arcsin w) \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

به‌سادگی تحقیق می‌شود که باقی مقدارها، با این دستورها بیان می‌شود:

$$\operatorname{Arc}\sin w = \arcsin w + ۲k\pi,$$

$$\operatorname{Arc}\sin w = -\arcsin w + (۲k+۱)\pi \quad (k، \text{عددی درست})$$

در پایان، به‌بسط $\arcsin w$، برحسب توان‌های w، می‌پردازیم. قبلاً دیده‌ایم که، در حوزهٔ متغیرهای حقیقی، برای رشتهٔ

$$y = x - \frac{x^۳}{۳!} + \cdots + (-۱)^{n-۱}\frac{x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!} + \cdots$$

[که معرف $\sin x$ است]، رشتهٔ معکوس عبارت است از

$$x = y + \frac{۱}{۲}\cdot\frac{y^۳}{۳} + \frac{۱\times۳}{۲\times۴}\cdot\frac{y^۵}{۵} + \cdots + \frac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!}\cdot\frac{y^{۲n+۱}}{۲n+۱} + \cdots$$

[که‌معرف $\arcsin y$ است؛ ۴۴۵، ۳) را ببینید]. چون درحالت متغیر مختلط هم،ضریب‌ها به‌ترتیب کاملاً مشابهی تعیین می‌شوند، روشن است که عکس رشتهٔ

$$w = z - \frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} - \cdots + (-۱)^{n-۱}\frac{z^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!} + \cdots$$

باید به‌صورت رشتهٔ زیر باشد:

---

*) مثلاً $\arcsin ۲ = \frac{\pi}{۲} + i\ln(۲+\sqrt{۳})$.

$$z=w+\frac{1}{2}\cdot\frac{w^3}{3}+\frac{1\times 3}{2\times 4}\cdot\frac{w^5}{5}+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{w^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

که شعاع تقارب آن، $R=1$ است* و به‌ازای $|w|<1$، یکی از مقدارهای $\mathrm{Arc}\,sinw$ را به‌دست می‌دهد؛ و ما ثابت می‌کنیم که این، همان‌مقدار اصلی $\mathrm{arc}\,sinw$ است. درواقع، مقدار $|R(z)|$، از

$$|z|<1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\times 3}{2\times 4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}+\cdots=\frac{\pi}{2}$$

تجاوز نمی‌کند و، از همین‌جا، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۴۶۰. تابع‌های توانی. a و b رادوعددمختلط و $a\neq 0$ می‌گیریم. آن‌وقت، تعریف کلی توان a^b چنین می‌شود:

$$a^b=e^{b.\mathrm{Ln}\,a}=e^{b(\ln a+2k\pi i)}\quad (k،\text{ عددی درست})$$

به‌طوری‌که، درحالت کلی، توان به‌صورت چندارزشی است. به‌ازای $k=0$، مقدار اصلی توان به‌دست می‌آید:

$$a^b=e^{b.\ln a}$$

برای تشخیص حالت کلی توان، گاهی به‌پیروی‌ازکوشی، آن‌را به‌صورت $((a))^b$ می‌نویسند. بنابراین

$$((a))^b=a^b.e^{2k\pi bi}\quad (k،\text{ عددی درست})$$

اگر b برابر عددی درست باشد، عامل دوم برابر واحد می‌شود: در این حالت، برای توان، تنها یك مقدار به‌دست می‌آید. اگر b، برابر با کسر گویا و تحویل‌ناپذیر $\frac{p}{q}(q>1)$ باشد، برای توان، درست q مقدار مختلف پیدا می‌شود و، بالاخره، برای همهٔ‌مقدارهای دیگر b، توان، مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارها را قبول می‌کند. مثلاً

$$2^i=e^{i.\ln 2}=cos(\ln 2)+i\cdot sin(\ln 2),\quad ((2))^i=2^i.e^{-2k\pi}\quad (k،\text{ عددی صحیح})$$

$$i^i=e^{i.\ln i}=e^{-\frac{\pi}{2}},\quad ((i))^i=e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}}\quad (k،\text{ عددی درست})$$

---

*) به‌ازای $w=\pm 1$، پیوستگی مشتق آرك سینوس، یعنی $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$، از بین می‌رود.

اگر m، عدد مختلط ثابت دلخواهی باشد، تابع توانی z^m ($z\neq 0$)* چنین است:

$$z^m = e^{m\cdot \ln z}$$

از رابطهٔ

$$(1+z)^m = e^{m\cdot \ln(1+z)}$$

شبیه شمارهٔ ۴۴۷، ۲)، می‌توان رشتهٔ دو جمله‌ای را به‌دست آورد:

$$(1+z)^m = 1+mz+\frac{m(m-1)}{1\times 2}z^2+\dots$$

$$\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\times 2\times\dots\times n}z^n+\dots$$

با شرط $|z|<1$**، این رشته به‌ازای m مختلط غیرمشخص، متقارب است و، همان‌طور که از شیوهٔ به‌دست آمدن آن دیده می‌شود، مقدار اصلی توان دوجمله‌ای را تولیدمی‌کند. بررسی این دو جمله‌ای، متعلق به‌آبل است.

۴۶۱. مثال‌ها. در این شماره، به‌کمک چندمثال، نشان می‌دهیم که متغیر مختلط و تابع‌های مقدماتی آن، چه خدمتی به‌آنالیز حقیقی‌ها، انجام می‌دهند.

۱) مشتق‌های متوالی تابع $y=\frac{1}{x^2+1}$ را می‌توان به‌سادگی‌محاسبه کرد، به‌شرطی که آن‌را، به‌این‌صورت، بنویسیم:

$$y=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$$

در این‌صورت داریم:

$$y^{(n-1)}=\frac{1}{2i}(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x-i)^n}-\frac{1}{(x+i)^n}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{2i}\cdot\frac{(x+i)^n-(x-i)^n}{(x^2+1)^n}=$$

---

*) گاهی، در حالت $R(m)>0$، به‌ازای $z=0$ فرض می‌کنند، $0^m=0$.

**) به‌ازای $z=-1$، نه‌خود توان $(1+z)^m$، بلکه مشتق به‌قدرکافی دور آن، ناپیوسته‌است. استثنا، تنها در حالتی پیش می‌آید که m برابر صفر یا یك عدد طبیعی باشد.

$$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x^2+1)^n}\cdot\left[nx^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}x^{n-3}+\dots\right]$$

مثلاً

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(4)}=24\times\frac{5x^4-10x^2+1}{(x^2+1)^5}$$

و این، در واقع، به‌معنای آن است که مشتق‌های متوالی تابع $\operatorname{arc}tgx$ را هم به‌دست آورده‌ایم [با ۱۱۶، ۸)، و ۱۱۸، ۴) مقایسه کنید].

۲) دستورهای اولر، که معرف کسینوس و سینوس برحسب تابع‌های نمائی هستند، می‌توانند به‌طریقه‌های گوناگونی، مورد استفاده قرار گیرند. مثلاً، اگر بخواهیم مجموع

$$s=\sum_1^n\cos kx$$

را پیدا کنیم، می‌توان کار را، به‌طور ساده، به‌محاسبهٔ مجموع تصاعد هندسی زیرمنجر کرد:

$$s=\frac{1}{2}\left(\sum_1^n e^{kxi}+\sum_1^n e^{-kxi}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{xi}-e^{(n+1)xi}}{1-e^{xi}}+\frac{e^{-xi}-e^{-(n+1)xi}}{1-e^{-xi}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}xi}-e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}}{e^{-\frac{1}{2}xi}-e^{\frac{1}{2}xi}}+\frac{e^{-\frac{1}{2}xi}-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}}{e^{\frac{1}{2}xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2i}\left(e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}\right)-\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}\right)}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}$$

۳) توان‌های درست و مثبت $\sin x$ و $\cos x$ و، همچنین، حاصل‌ضرب‌های این‌توان‌ها را می‌توان با ترکیب‌های خطی کسینوس‌ها و سینوس‌های مضرب‌های کمان، نشان داد. به‌این نتیجه، می‌توان به‌کمك همان دستورهای اولر و با بازکردن عبارت‌های

$$\sin^n x=\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^n,\quad \cos^n x=\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^n$$

به‌کمك دو جمله‌ای نیوتون، به‌سادگی رسید. مثلاً

$$sin^5=\frac{1}{32i}(e^{5xi}-5e^{3xi}+10e^{xi}-10e^{-xi}+5e^{-3xi}-e^{-5xi})=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{e^{5xi}-e^{-5xi}}{2i}-5\frac{e^{3xi}-e^{-3xi}}{2i}+10\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{1}{16}(sin5x-5sin3x+10sinx);$$

$$cos^4x.sin^3x=\left(\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right)^4.\left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^3=$$

$$=-\frac{1}{128i}(e^{2xi}-e^{-2xi})^3.(e^{xi}+e^{-xi})=$$

$$=-\frac{1}{128i}(e^{6xi}-3e^{2xi}+3e^{-2xi}-e^{-6xi}).(e^{xi}+e^{-xi})=$$

$$=-\frac{1}{128i}(e^{7xi}+e^{5xi}-3e^{3xi}-3e^{xi}-3e^{-xi}+3e^{-3xi}-e^{-5xi}-e^{-7xi})=$$

$$=-\frac{1}{64}(sin7x+sin5x-3sin3x-3sinx)$$

رابطه‌های کلی زیر را هم می‌توان ثابت کرد:

$$\text{(a)}\quad sin^{2\nu}x=\frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu-1}}\left\{cos2\nu x-2\nu cos(2\nu-2)x+\right.$$

$$\left.+\frac{2\nu(2\nu-1)}{1\times2}cos(2\nu-4)x-\ \dots\ +\frac{(-1)^\nu 2\nu(2\nu-1)\dots(\nu+1)}{1\times2\times\dots\times\nu}\right\},$$

$$\text{(b)}\quad sin^{2\nu+1}x=\frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}}\left\{sin(2\nu+1)x-(2\nu+1)sin(2\nu-1)x+\right.$$

$$\left.+\frac{(2\nu+1)2\nu}{1\times2}sin(2\nu-3)x+\ \dots\ +(-1)^\nu\frac{(2\nu+1)\cdot2\nu+\dots(\nu+2)}{1\times2\times\dots\times\nu}sinx\right\}$$

$$\text{(c)}\quad cos^nx=\frac{1}{2^{n+1}}\left\{cosnx+ncos(n-2)x+\right.$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\cos(n-4)x+\cdots\Big\}$$

ضمناً، در رابطهٔ (c)، برحسب آن که $n=2\nu$ یا $n=2\nu+1$ باشد، جملهٔ آخر به‌این‌صورت است:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)\cdots(\nu+1)}{1\times 2\times\cdots\times\nu}\quad\text{یا}\quad\frac{(2\nu+1)2\nu\cdots(\nu+2)}{1\times 2\times\cdots\times\nu}\cos x$$

این گونه تبدیل‌ها، در محاسبهٔ انتگرالی به‌درد می‌خورند [با **۲۸۷** مقایسه کنید].

۴) دستورهای سادهٔ محاسبهٔ انتگرالی را، می‌توان در مورد تابع‌های مختلط از متغیرهای حقیقی و یا مختلط هم به‌کار برد (برای تعیین تابع‌های اولیه).

فرض کنید، بخواهیم انتگرال‌های زیر را پیدا کنیم:

$$\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx,\qquad\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$$

این مساله، هم‌ارز است با پیدا کردن انتگرال زیر

$$\int e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)dx=\int e^{(a+bi)x}dx$$

که به‌سادگی محاسبه می‌شود و برابر است با

$$\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)x}=\frac{\cos bx+i\sin bx}{a+bi}e^{ax}=$$

$$=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+i\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$$

که اگر مقدارهای حقیقی و موهومی را، به‌طور جداگانه، برابر قرار دهیم، انتگرال‌های مطلوب به‌دست می‌آید [با **۲۷۱**، ۶) مقایسه کنید].

دستور انتگرال گیری

$$\int P(x)\cdot e^{ax}dx$$

را، که در آن $P(x)$ یك چندجمله‌ای صحیح است [**۲۷۱**، ۴)]، می‌توان در مورد حالتی هم که a عددی مختلط است، به‌کار برد. آن‌وقت، نه‌تنها انتگرال‌های

$$\int P(x).\cos bx dx, \quad \int P(x).\sin bx dx$$

بلکه انتگرال‌های

$$\int P(x).e^{ax}.\cos bx dx, \quad \int P(x).e^{ax}\sin bx dx.$$

هم، منجر به آن می‌شوند [۲۷۱، ۴)؛ ۲۸۹].

۵) وجود بستگی بین تابع لگاریتمی با تابع‌های معکوس مثلثاتی، موجب می‌شود تا بسیاری از رابطه‌های مربوط به‌محاسبهٔ انتگرالی، که ظاهری کاملاً متفاوت دارند، به‌یك نوع محاسبه منجر شوند و، در نتیجه، دستورهای تازه‌ای را برای ما فراهم می‌کند. مثلاً اگر در انتگرال‌های

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}, \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$$

و یا در انتگرال‌های

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}), \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}$$

x را با xi عوض کنیم، یکی به‌دیگری منجر می‌شود.

۶) با جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی در بسط‌های مختلط معلوم، گاهی می‌توان، بسط‌های جالبی در حوزهٔ عددهای حقیقی به‌دست آورد.

(a) تصاعد

$$\frac{z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

را، به‌ازای $|z|<1$، درنظر می‌گیریم و $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ قرار می‌دهیم. برای سمت راست، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

و برای سمت چپ، عبارت

$$\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-r\cos\theta)-ir\sin\theta}=\frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}+\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}i$$

به‌دست می‌آید. اگر مولفه‌های حقیقی و مولفه‌های موهومی را، در دو طرف برابری، به‌طور جداگانه، برابر قرار دهیم، بعد از اختصار به r، به‌این بسطها می‌رسیم:

$$\frac{\cos\theta - r}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cdot\cos n\theta,$$

$$\frac{\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cdot\sin n\theta$$

[با ۴۴۰، ۱۱) مقایسه کنید].

(b) اگر، با همین روش، دربارهٔ رشتهٔ لگاریتمی

$$\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z|<1)$$

عمل کنیم، برای $r<1$ نتیجه می‌گیریم [با ۴۴۰، ۱۱) مقایسه کنید]:

$$\frac{1}{2}\ln(1 - 2r\cos\theta + r^2) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos n\theta}{n},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\theta}{1 - r\cos\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin n\theta}{n}$$

فرض می‌کنیم $0 < \theta \leqslant \pi$؛ چون به‌ازای $r = 1$، رشته‌های سمت راست، تقارب خود را ادامه می‌دهند [۳۸۵، ۲)]، می‌توان با استفاده از قضیهٔ آبل [۴۳۷، ۶°]، به‌ازای $r \to 1 - 0$، به‌سمت حد عبور کرد. در سمت چپ، در حالت اول

$$\frac{1}{2}\ln(2 - 2\cos\theta) = \ln 2\sin\frac{\theta}{2}$$

و در حالت دوم

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{\pi-\theta}{2}$$

به‌دست می‌آید و، در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\ln 2\sin\frac{\theta}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}, \quad \frac{\pi-\theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n} \quad (0<\theta\leqslant\pi)$$

[درجلد سوم، به‌بسطهای مثلثاتی مهم بسیاری، برخواهیم خورد.].

۷) درشمارهٔ ۴۴۷، ۸)، با بسط

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)\cdot\alpha^n$$

آشنا شدیم، که در آن، $P_n(x)$ عبارت است از چندجمله‌ای لژاندر. اگر x بین -1 و $+1$ تغییر کند، می‌توان $x=\cos\theta$ گرفت:

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\cos\theta)\cdot\alpha^n$$

اکنون $2\cos\theta$ را با $e^{\theta i}+e^{-\theta i}$ عوض می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=[1-\alpha(e^{\theta i}+e^{-\theta i})+\alpha^2]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=(1-\alpha e^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}(1-\alpha e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\alpha e^{i\theta}+\frac{1\times3}{2\times4}\alpha^2e^{2i\theta}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}\alpha e^{-i\theta}+\frac{1\times3}{2\times4}\alpha^2e^{-2i\theta}+\cdots\right)$$

که اگر این دورشته را، بنا برقاعدهٔ معمولی، درهم ضرب کنیم وضریب‌های α^n را در دو بسط، برابر قراردهیم، به‌عبارتی برای $P_n(\cos\theta)$ می‌رسیم:

$$P_n(\cos\theta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(e^{ni\theta}+e^{-ni\theta})+$$

$$+\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{2}(e^{(n-1)i\theta}+e^{-(n-1)i\theta})+$$

$$+\frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\cdot\frac{1\times3}{2\times4}(e^{(n-2)i\theta}+e^{-(n-2)i\theta})+\cdots$$

حال می‌توان به‌جای پرانتزها، به‌ترتیب، $2\cos n\theta$، $2\cos(n-1)\theta$، $2\cos(n-2)\theta$ و غیره را قرارداد. چون همهٔ ضریب‌ها مثبت‌اند روشن است که، بزرگترین مقدار این عبارت به‌ازای $\theta=0$، یعنی $x=\cos\theta=1$، به‌دست می‌آید.

به‌این‌ترتیب، توانستیم بااستفاده ازحوزهٔ تابع‌های با متغیرمختلط، به‌نتیجهٔ جالبی برسیم که، کاملاً متعلق به‌حوزهٔ متغیرهای حقیقی بود: وقتی که x در بازهٔ $[-1,+1]$ تغییر کند، هرچندجمله‌ای لژاندر، در انتهای $x=1$، به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد.

§۶. رشته‌های دورزن و رشته‌های مجانبی
دستور اولر ـ ماکلورن

۴۶۲. مثال‌ها. در §۹ فصل قبل، خواننده را، با بعضی تعریف‌های مهم «مجموع‌های تعمیم‌یافته» برای رشته‌ها، آشنا کردیم، ضمناً دیدیم که مجموع‌های جزئی رشته‌ها، خیلی کم به‌کار محاسبهٔ تقریبی این «مجموع‌ها» می‌خورند. در این‌جا هم، دوباره، به‌رشته‌های متباعد، منتهی باطرح به‌کلی دیگری، می‌پردازیم: نشان خواهیم داد که، با توجه به‌شرطهایی معین و تا حد مشخصی، مجموع‌های جزئی رشتهٔ متباعد، می‌توانند تقریب‌های خوبی برای عددهایی باشند که، به‌مفهومی، «به‌وجود آورندهٔ» این رشته هستند، برای آن‌که خواننده، ازپیش، اهمیت عملی کاربرد رشته‌های متباعد را درمحاسبه‌های تقریبی احساس کند، کافی است متذکرشویم که اخترشناسان معمولاً ازاین روش برای پیش‌بینی موضع جسم‌های آسمانی استفاده می‌کنند؛ ضمناً، درستی نتیجه‌گیری‌های حاصل، کاملاً رضایت‌بخش است.

ابتدا، می‌کوشیم اندیشهٔ لازم را، روی دومثال، به‌وجود آوریم.

۱) رشتهٔ لگاریتمی را درنظر می‌گیریم:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \quad (1)$$

می‌دانیم [۴۰۵] که، این رشته، تنها برای $-1<x\leqslant 1$ متقارب است و معرف تابع $\ln(1+x)$ است. در بیرون این بازه (ومثلاً برای $x>1$)، این رشته متباعد می‌شود و مجموعی ندارد. با وجود این، برای مقدارهای $x>1$ هم، تابع $\ln(1+x)$ بستگی خود را با بخش‌هایی ازاین رشتهٔ متباعد ادامه می‌دهد، زیرا طبق رابطهٔ تیلور

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x)$$

که در آن، «جملهٔ متمم» $r_n(x)$ را می‌توان، مثلاً، در شکل لاگرانژ [۱۲۶] انتخاب کرد:

$$r_n(x)=\frac{1}{(1+\theta_1 x)^{n+1}}\cdot(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\theta\cdot(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (0<\theta,\theta_1<1)$$

معلوم می‌شود که جملهٔ متمم، از لحاظ قدر مطلق، از نخستین جملهٔ حذف شدهٔ رشته کمتر است و با آن دارای علامت یکسانی است (مثل حالت رشته‌های متقارب از گونهٔ لایب‌نیتس). بنابراین، اگر مقدار $\ln(1+x)$ به ازای $x>1$ را، با قسمتی ازرشتهٔ متباعد (۱) عوض کنیم، برآورد راحتی ازخطای آن داریم (حتی علامت آن راهم می‌دانیم). و

همین وضع کافی‌است که قسمت مذکور، مبنای محاسبهٔ تقریبی عدد $\ln(1+x)$ قرار گیرد.

مسلم است که به‌ازای $0<x\leqslant 1$، با ترقی n به‌سمت بی‌نهایت، خطا به‌سمت‌صفر میل می‌کند و به ازای n مفروض، ولی $x\to 0$، حتی خواهیم داشت:

$$\frac{r_n(x)}{x^n}\to 0 \Rightarrow r_n(x)\to o(n^*)$$

یعنی، خطای حاصل، درمقایسه با x، بی‌نهایت کوچکی است که، هرچه n بزرگتر باشد، از مرتبه‌ای بالاتر خواهد بود. برای $x>1$ دلخواه ولی ثابت، خود جملهٔ مورد برآورد، با ترقی n، تا بی‌نهایت ترقی می‌کند و نمی‌توان دراین‌باره صحبت کرد که، برای x مفروض، مقدارخطا را، به‌حساب n، به‌دلخواه کوچك کنیم. ولی، به‌طوری که خود برآورد نشان می‌دهد

$$|r_n(x)|<\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

وقتی که x به‌قدر کافی به ۱ نزدیك باشد، می‌توان خطا را، به‌میزان دلخواه، کوچك کرد. اگر x ثابت، ولی نزدیك به ۱ باشد، جمله‌های رشته (۱)، حتی به‌ازای $x<1$، ابتدا از لحاظ قدرمطلق نزولی خواهند بود و، این وضع تا وقتی ادامه داردکه داشته باشیم:

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}=\frac{n}{n+1}x<1 \Rightarrow n<\frac{1}{x-1}$$

وسپس، آغاز به‌ترقی می‌کند. مناسب‌ترین موقع، برای قطع رشته، در جملهٔ با اندیس $n=E\left(\frac{1}{x-1}\right)$است: به‌این‌ترتیب، برای x مفروض، بهترین تقریب برای‌عدد $\ln(1+x)$ به‌دست می‌آید.

البته، دراین مثال، رشتهٔ مورد بررسی (۱)، دست‌کم برای $-1<x\leqslant 1$ — متقارب بود؛ مثال دوم ازاین جهت آموزنده است که، رشتهٔ مورد بررسی، درهمه‌جا متباعد است.

۲) حال (برای $x>0$) فرض می‌کنیم

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{x+k}$$

که درآن $0<c<1$.

برای $x>k$ داریم:

$$\frac{۱}{k+x}=\frac{۱}{x}-\frac{k}{x^۲}+\frac{k^۲}{x^۳}-\frac{k^۳}{x^۴}+\cdots$$

ولی اگر $k\geqslant x$، این رشته متباعد می‌شود. دست‌کم به‌طور صوری، این بسط را دررشتهٔ معرف تابع $F(x)$ می‌گذاریم وجمله‌های متشابه را یکی می‌کنیم. ازاین راه، به‌رشتهٔ

$$\frac{A_۱}{x}+\frac{A_۲}{x^۲}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}+\cdots \qquad (۲)$$

می‌رسیم، که در آن داریم:

$$A_n=(-۱)^{n-۱}\sum_{k=۱}^{\infty}k^{n-۱}c^k$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که رشته‌های معرف ضریب‌های A_n، همگی متقاربند؛ ولی رشتهٔ قبلی، آشکارا متباعد است، زیرا

$$|A_n|\geqslant n^{n-۱}c^n,\quad \left|\frac{A_n}{x^n}\right|\geqslant\frac{n^{n-۱}c^n}{x^n}$$

وعبارت اخیر، به‌ازای $n\longrightarrow\infty$، به‌سمت ∞ میل می‌کند.

برای رشتهٔ متباعد (۲)، بخش nام چنین است:

$$S_n(x)=\sum_{\nu=۱}^{n}\frac{A_\nu}{x^\nu}=\sum_{k=۱}^{\infty}c^k\sum_{\nu=۱}^{n}\frac{(-۱)^{\nu-۱}k^{\nu-۱}}{x^\nu}=$$

$$=\sum_{k=۱}^{\infty}\left[۱+(-۱)^{n+۱}\frac{k^n}{x^n}\right]\frac{c^k}{x+k}$$

و «جملهٔ متمم» چنین است:

$$r_n(x)=F(x)-S_n(x)=(-۱)^n\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{k^nc^k}{(x+k)x^n}$$

و دراین‌جا داریم:

$$r_n(x)=\theta.(-۱)^n\sum_{k=۱}^{\infty}k^nc^k.\frac{۱}{x^{n+۱}}=\theta.\frac{A_{n+۱}}{x^{n+۱}}\quad(۰<\theta<۱)$$

با وجودی که رشتهٔ موردنظر متباعد است، با ویژگی عادی رشته‌های لایب‌نیتسی سروکار داریم. البته، با برابر کردن تقریبی $F(x)$ با مجموع جزئی $S_n(x)$، این رشته متباعد را،

به‌ازای x تثبیت شده، نمی‌توان با دقت‌دلخواه به‌دست‌آورد، ولی برای xهای به‌قدرکافی بزرگ، می‌توان به‌تقریب دلخواه رسید. باید توجه داشت‌که زیاد کـردن تعداد جمله‌های مجموع جزئی (به‌قصد بهترکردن تقریب) تا جایی مناسب است‌که جمله‌ها، ازلحاظ قدر-مطلق، نزولی باشند، یعنی $x<\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|$.

روشن است‌کـه، وقتی n تثبیت شده باشد، جملهٔ متمم $r_n(x)$، به‌ازای $x\to\infty$، به‌سمت صفرمیل می‌کند. علاوه بر آن، چون داریم:

$$x^n r_n(x)=\frac{\theta\cdot A_{n+1}}{x}\to 0$$

بنابراین

$$r_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right) \qquad (۳)$$

به‌نحوی که $r_n(x)$، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر از n می‌شود، هرقدر تعداد بیشتری از جمله‌های رشتهٔ متباعد (۲) را، برای نمایش تقریبی $F(x)$، نگه‌داریم، می‌توان به‌ازای $x\to\infty$، درجه بالاتری از بی‌نهایت‌کوچکی خطای این تقریب را، انتظار داشت.

۴۶۳. تعریف‌ها. اکنون، به‌تنظیم‌کلی تعریف‌ها می‌پردازیم.

رشتهٔ عددی زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\sum_0^\infty a_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots \qquad (۴)$$

(a) اگر مجموع‌های جزئی رشتهٔ (۴)، به‌نوبت،گاه‌کمتر وگاه بیشتر از یـک عدد A باشند، یعنی اگر جملهٔ متمم،که با دستور

$$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+r_n \qquad (۵)$$

تعیین می‌شود، مرتباً تغییر علامت دهد، گویندکه رشتهٔ (۴) عدد A را **دور می‌زند.**

برابری سادهٔ

$$r_n=a_{n+1}+r_{n+1}$$

روشن می‌کندکه، این تعریف، با تعریف زیر هم‌ارز است:

(b) رشتهٔ (۴) را دورزن عـدد A گویند [یا رشتهٔ (۴)، وقتی عدد A را دور می‌زند] که: اولاً این رشته متناوب باشد، ثانیاً جملهٔ متمم دستور (۵)، از لحـاظ قدرمطلق، کمتر

از a_{n+1} و ضمناً هم علامت با آن باشد*.

درشمارهٔ قبل، با چنین رشته‌هایی سروکار داشتیم: رشتهٔ (۱)، برای $\ln(1+x)$ (و به‌ازای $x>0$ غیرمشخص)، آشکارا دورزن است، ورشتهٔ (۲) هم، که برای تابع $F(x)$ در ۲ تعریف شده است، (بازهم به‌ازای $x>0$) دورزن است.

توجه کنیم که درحالت تباعد رشتهٔ (۴)، ممکن است، رشتهٔ مفروض، درعین‌حال، مجموعه‌ای نامتناهی ازعددهای A را دور بزند. به‌عنوان مثال، رشتهٔ

$$1-2+2-2+2-\cdots$$

با مجموع‌های جزئی $1, -1, 0, -1, 0, \ldots$، به‌روشنی هریك ازعددهای بازهٔ $(-1, 1)$ را دور می‌زند.

ویژگی رشتهٔ دورزن، که در تعریف (b) تنظیم شده است، اغلب می‌تواند به‌عنوان وسیلهٔ مفیدی، برای محاسبهٔ مقدار تقریبی عدد A، مورد استفاده قرار گیرد؛ ولی به‌خودی خود روشن است که، هررشته‌ای که عدد A را دور بزند، نمی‌تواند برای این منظور مفید باشد.

اکنون، به‌جای رشتهٔ (۴) با جمله‌های ثابت وعدد A، رشتهٔ تابعی

$$\sum_{0}^{\infty} a_n(x) = a_0(x)+a_1(x)+\cdots+a_n(x)+a_{n+1}(x)+\cdots \qquad (۶)$$

وتابعی مثل $A(x)$ را درنظر می‌گیریم؛ ضمناً، فرض می‌کنیم که بازهٔ تعریف همهٔ تابع‌های $a_n(x)$ و $A(x)$، یکی باشد، که آن را $\mathfrak{D}$ می‌نامیم. به طور طبیعی، می‌توان تعریفی را که برای رشتهٔ عددی دورزن عدد A قبول کردیم، درحالت رشتهٔ تابعی دورزن تابع مفروض هم به‌کاربرد. بدون این که روی این مطلب متوقف شویم، تعریف تازه‌ای می‌آوریم که مربوط به‌حالتی خاص می‌شود، یعنی وقتی که جمله‌های رشته، شبیه رشتهٔ (۶)، شامل پارامتر x هستند، به‌نحوی که‌حوزهٔ تغییر آن $\mathfrak{D}$، به‌عنوان نقطهٔ تجمع خود، عدد متناهی یا نامتناهی ω را قبول کند. مثل همیشه، جملهٔ متمم $r_n(x)$ را، با این برابری معین می‌کنیم:

$$A(x) = a_0(x)+a_1(x)+\cdots+a_n(x)+r_n(x)$$

(c) گویند رشتهٔ (۶)، در نزدیکی $x=\omega$، بسط مجانبی تابع $A(x)$ است، وقتی که به‌ازای هر n تثبیت شده‌ای داشته باشیم:

---

*) اصطلاح «رشتهٔ دورزن» را، برای حالتی هم به‌کار می‌بریم که، تعریف ما تنها برای nهای به‌قدرکافی بزرگ (و مثلاً برای $n>n_0>1$) برقرار باشد.

$$\lim_{x\to\omega}\frac{r_n(x)}{a_n(x)}=0^* \qquad (۷)$$

این حقیقت را، این‌طور می‌نویسیم:

$$A(x)\infty a_0(x)+a_1(x)+\cdots+a_n(x)$$

با توجه به

$$r_n(x)=a_{n+1}(x)+r_{n+1}(x)$$

و

$$\frac{r_n(x)}{a_n(x)}=\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\cdot\left[1+\frac{r_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)}\right]$$

به‌عنوان نتیجه‌ای از (۷) به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x\to\omega}\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}=0 \qquad (۸)$$

حکم زیررا می‌توان به‌سادگی ثابت کرد:

اگر رشتهٔ (۶)، تابع $A(x)$ را دور بزند و، ضمناً، رابطهٔ (۸) برقرار باشد، درآن صورت، رشتهٔ نامبرده، بسط مجانبی تابع $A(x)$ در نزدیکی $x=\omega$ است.

درواقع، داریم

$$|r_n(x)|\leqslant|a_{n+1}(x)|$$

به‌طوری‌که

$$\left|\frac{r_n(x)}{a_n(x)}\right|\leqslant\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|$$

آن‌وقت، از (۸)، بلافاصله می‌توان (۷) را نتیجه گرفت.

هردو رشتهٔ (۱) و (۲) را می‌توان به‌عنوان مثال‌هایی از بسط مجانبی تابع‌های نظیر اولی در نزدیکی $x=0$ و دومی در نزدیکی $x=\infty$ ــ $x=-\infty$ ــ درنظر گرفت.

درطرح اخیر، معمولاً*، با بسط مجانبی به‌صورت

---

*) ضمناً طبیعی است که فرض شود $a_n(x)$ (دست‌کم برای x به‌قدر کافی نزدیک به ω) مخالف صفر باشد.

$$A(x)\infty\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots \qquad (۹)$$

درنزدیکی $x=\infty$، سروکار پیدا می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که، معنای این رابطه، تنها این است که، برای هرمقدار تثبیت شدهٔ n، همیشه داریم:

$$r_n(x)=o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

و یا مفصل‌تر

$$\lim_{x\to\infty}\left[A(x)-a_0-\frac{a_1}{x}-\frac{a_2}{x^2}-\cdots-\frac{a_n}{x^n}\right]x^n=0 \qquad (۱۰)$$

به‌این‌ترتیب، برای xهای «بزرگ»، دستور تقریبی

$$A(x)\doteq a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$$

برقرار است که «کیفیت» آن، با برابری (۱۰) مشخص می‌شود.

اگراین برابری را، این‌طور بنویسیم:

$$\lim_{x\to\infty}\left[A(x)-a_0-\frac{a_1}{x}-\frac{a_2}{x^2}-\cdots-\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\right].x^n=a_n \qquad (۱۰^*)$$

در آن صورت، منحصربه‌فردبودن بسط مجانبی تابع $A(x)$، به‌صورت (۹)، روشن‌می‌شود ـ البته، با این فرض که، چنین بسطی‌ممکن باشد ـ ازروی دستور(۱۰*)، می‌توان همهٔ‌ضریب‌های a_n را، به‌طور یک‌ارزشی، معین کرد.

ولی، حکم عکس، درست نیست: ممکن است تابع‌های مختلفی، دارای یک بسط مجانبی باشند. مثلاً، معلوم است که به‌ازای $x\to\infty$ داریم: $e^{-x}.x^n\to 0$؛ بنابراین روشن است که همهٔ تابع‌های به صورت $A(x)+C.e^{-x}$، دارای همان بسط مجانبی تابع $A(x)$ هستند.

یادداشت. گاهی، برای سادگی‌کار، می‌نویسیم:

$$B(x)\infty\varphi(x)+\psi(x).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}$$

که در آن، تابع‌های $B(x)$، $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ ـ که در $\mathfrak{P}$ معین هستند ـ با این شرط در نظر گرفته شده‌اند که

$$\frac{B(x)-\varphi(x)}{\psi(x)} \infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

۴۶۴. ویژگی‌های بنیادی بسطهای مجانبی. از این به‌بعد، هرجا از بسط مجانبی صحبت کنیم، به بسطهای به‌صورت (۹) توجه خواهیم داشت*. ضمناً، فرض براین است که همهٔ تابع‌های مورد بررسی، درحوزهٔ $\mathfrak{D}$ـ که دارای نقطهٔ تجمع ω است ـ معین‌هستند.

۱°. اگرداشته باشیم:

$$A(x) \infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n},\quad B(x) \infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n} \qquad (11)$$

آن‌گاه، واضح است که

$$A(x) \pm B(x) \infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \pm b_n}{x^n}$$

یعنی، بسطهای مجانبی را، می‌توان جمله‌به‌جمله جمع یا تفریق کرد.

۲°. حالا ثابت می‌کنیم که، بسط مجانبی حاصل‌ضرب $A(x)\cdot B(x)$ را می‌توان با ضرب صوری ـ از روی «قاعدهٔ» کوشی ـ بسطهای (۱۱) به‌دست آورد.

برای n غیرمشخص داریم:

$$A(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\dots+\frac{a_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

و

$$B(x)=b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\dots+\frac{b_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

که بعد ازضرب کردن، به‌دست می‌آید:

$$A(x)\cdot B(x)=c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\dots+\frac{c_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

که در آن

$$c_m=\sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}$$

---

*) نظریهٔ این‌گونه بسطها را، پوانکاره (Henri Poincaré) تکامل داد و کاربردهای مهم آن را در نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی و در مکانیک سماوی نشان داد.

که با این حکم، هم‌ارز است:

$$A(x).B(x) \infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اگر $B(x)$ متحد با $A(x)$ باشد، بسط مجانبی مجذور $[A(x)]^2$ به دست می‌آید. به‌همین‌ترتیب، می‌توان بسط مجانبی تابع $[A(x)]^m$ را هم به‌دست آورد (m، عدد طبیعی غیرمشخصی است).

۳° فرض می‌کنیم، تابع $F(y)$، در نقطهٔ $y=0$، تحلیلی باشد، یعنی بتواند در همسایگی این نقطه، به‌صورت رشتهٔ توانی، بسط داده شود:

$$F(y)=\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m y^m = \beta_0+\beta_1 y+\beta_2 y^2+\cdots+\beta_m y^m+\cdots$$

به‌جز آن، فرض می‌کنیم، تابع $A(x)$، دارای بسط مجانبی بدون جملهٔ آزاد باشد:

$$A(x) \infty \frac{a_1}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots \qquad (۱۲)$$

به‌نحوی که به‌ازای $x \to \infty$، داشته باشیم: $A(x) \to 0$. درچنین حالتی، دست‌کم برای xهای به‌قدرکافی بزرگ، تابع مرکب زیر، معنا دارد:

$$F(A(x))=\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m [A(x)]^m$$

اگر به‌جای هرتوان $[A(x)]^m$، بسط مجانبی آن را قرار دهیم، جمله‌های متشابه‌را جمع‌وجور و، سپس، برحسب توان‌های صعودی منظم کنیم، بسط مجانبی تابع $F(A(x))$ به‌دست می‌آید [با **۴۴۶** مقایسه کنید].

پیش از همه توجه کنیم که، درهمسایگی نقطهٔ $y=0$، تابع $F(y)$ دارای مشتق پیوسته (و درنتیجه، کران‌دار) است و، برای هردو نقطهٔ دلخواه y و $\bar{y}$ این همسایگی، نابرابری زیر برقرار است:

$$|F(\bar{y})-F(y)| \leqslant L.|\bar{y}-y| \quad (L=\text{const.})$$

بخش nام رشتهٔ (۱۲) را، $A_n(x)$ می‌نامیم:

$$A_n(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$$

با تثبیت n، برای xهای به‌قدرکافی بزرگ، هر دوتابع $A(x)$ و $A_n(x)$، درهمین‌همسایگی قرار می‌گیرند، به طوری‌که به‌ازای $x \to \infty$

$$|x^n[F(A(x))-F(A_n(x))]| \leqslant L\cdot x^n|A(x)-A_n(x)| =$$

$$= L\cdot x^n|r_n(x)| \to 0$$

و

$$F(A(x)) = F(A_n(x)) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

از طرف دیگر، براساس قضیهٔ شمارهٔ ۴۴۶، برای xهای به‌قدرکافی بزرگ، داریم:

$$F(A_n(x)) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_m[A_n(x)]^m =$$

$$= \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} + \frac{\beta_1 a_3 + 2\beta_2 a_1 a_2 + \beta_3 a_1^3}{x^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{\beta_1 a_n + \dots + \beta_n a_1^n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

و با توجه به‌رابطهٔ قبلی، می‌توان‌چنین برابری را برای $F(A(x))$ نوشت، که‌درست‌بودن بسط مجانبی

$$F(A(x)) \sim \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} +$$

$$+ \frac{\beta_1 a_3 + 2\beta_2 a_1 a_2 + \beta_3 a_1^3}{x^3} + \dots + \frac{\beta_1 a_n + \dots + \beta_n a_1^n}{x^n} + \dots$$

را، که دربارهٔ آن صحبت بود، ثابت می‌کند.

مثلاً، اگر فرض کنیم

$$F(y) = e^y = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!}$$

در آن‌صورت، معلوم می‌شود که

$$e^{A(x)} \sim 1+\frac{a_1}{x}+\left[\frac{a_1^2}{1!}+\frac{a_2}{2!}\right]\frac{1}{x^2}+\left[\frac{a_1^3}{1!}+\frac{2a_1a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}\right]\frac{1}{x^3}+\dots$$

$$\dots+\left[\frac{a_1^n}{1!}+\dots+\frac{a_n}{n!}\right]\frac{1}{x^n}+\dots$$

کاربرد جالب این قضیه، درجایگزاری رشته در رشته [مثل حالت رشته‌های متقارب توانی؛ **۴۴۸**]، عبارت است از تقسیم بسط مجانبی تابع $B(x)$ بر $A(x)$، با این شرط که جملهٔ آزاد a_0، در دومی، مخالف صفر باشد. از آن‌جاکه، در مقایسه با شمارهٔ **۴۴۸**، در این‌جا به‌هیچ اندیشهٔ تازه‌ای برنمی‌خوریم، از ادامهٔ بحث، صرف‌نظر می‌کنیم.

۴°. مسالهٔ انتگرال‌گیری بسطهای مجانبی را مطرح می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $A(x)$ تابعی پیوسته در بازهٔ $\mathscr{D}=[0, +\infty[$ باشد و بسط مجانبی آن با جملهٔ شامل $\frac{1}{x^2}$ آغاز شود:

$$A(x) \sim \frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\dots+\frac{a_n}{x^n}+\dots \qquad (13)$$

آن‌وقت، برای این تابع، انتگرال از $x>a$ دلخواه تا $+\infty$ وجود دارد* و این انتگرال (به‌عنوان تابعی از x)، به‌نوبهٔ خود، دارای بسط مجانبی است:

$$\int_x^{\infty} A(x)dx \sim \frac{a_2}{x}+\frac{a_3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\dots+\frac{a_n}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\dots \qquad (14)$$

که از (۱۳) با انتگرال‌گیری جمله به‌جمله به‌دست می‌آید.

در واقع، با فرض

$$A_n(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{x^k}, \quad r_n(x)=A(x)-A_n(x)$$

و به‌ازای $x \to \infty$ و مقدار ثابت ودلخواه n، برای xهای به‌قدر کافی بزرگ، خواهیم داشت:

---

*) به‌یاد بیاوریم [۳۷۳] که انتگرال تابع $f(x)$، از a تا $+\infty$، برابر با حد زیر است:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\int_a^{A} f(x)dx$$

$$x^n \cdot |r_n(x)| < \varepsilon \qquad (۱۵)$$

اگر $x < X$، در آن‌صورت

$$\int_x^X A(x)dx = \int_x^X A_n(x)dx + \int_x^X r_n(x)dx =$$

$$= \sum_{k=۲}^{n} \frac{a_k}{k-۱}\left(\frac{۱}{x^{k-۱}} - \frac{۱}{X^{k-۱}}\right) + \int_x^X r_n(x)dx$$

که به‌ازای $X \to \infty$ به‌دست می‌آید:

$$\int_x^\infty A(x)dx = \frac{a_۲}{۱}\cdot\frac{۱}{x} + \frac{a_۳}{۲}\cdot\frac{۱}{x^۲} + \cdots + \frac{a_n}{n-۱}\cdot\frac{۱}{x^{n-۱}} + R_{n-۱}(x) \qquad (۱۶)$$

که در آن

$$R_{n-۱}(x) = \lim_{X\to\infty} \int_x^X r_n(x)dx = \int_x^\infty r_n(x)dx$$

چون، بنابر (۱۵)، برای x به‌قدر کافی بزرگ داریم:

$$\left|\int_x^X r_n(x)dx\right| \leqslant \int_x^X |r_n(x)|dx < \varepsilon \int_x^X \frac{dx}{x^n} = \frac{\varepsilon}{n-۱}\left(\frac{۱}{x^{n-۱}} - \frac{۱}{X^{n-۱}}\right)$$

بنابراین، با گذر به‌حد، وقتی $X \to \infty$ (برای x مذکور) خواهد شد:

$$|R_{n-۱}(x)| < \frac{\varepsilon}{x^{n-۱}}$$

به‌نحوی که

$$\lim_{x\to\infty} x^{n-۱} \cdot R_{n-۱}(x) = ۰$$

و این، همراه با برابری (۱۶)، درستی بسط مجانبی (۱۴) را ثابت می‌کند.

می‌توان ثابت کرد که حضور جملهٔ $\frac{a_۱}{x}$ (با شرط $a_۱ \neq ۰$) در بسط مجانبی تابع $A(x)$، وجود انتگرال متناهی را برای این تابع، از x تا $+\infty$، غیرممکن می‌کند [۴۷۴ را ببینید].

یادداشت. جالب است، به‌این نکته توجه داشته باشیم که، در حالت کلی، نمی‌توان از بسط مجانبی، جمله به‌جمله دیفرانسیل گرفت. برای مثال، تابع $F(x)=e^{-x}.sine^{x}$ را در نظر می‌گیریم. چون، به‌ازای n دلخواه، داریم:

$$\lim_{x\to\infty} F(x).x^{n}=0$$

پس $F(x)\infty 0$، یعنی بسط مجانبی تابع $F(x)$، از صفر تشکیل می‌شود. ضمناً برای مشتق $F'(x)=e^{-x}.sine^{x}+cose^{x}$، چنین بسطی وجودندارد، زیرا حتی $\lim_{n\to\infty} F'(x)$ وجود ندارد.

۴۶۵. نتیجه‌گیری رابطهٔ اولر ـ ماکلورن. این‌رابطه، درآنالیز ریاضی، نقش‌مهمی به‌عهده دارد؛ به‌خصوص، برای به‌دست آوردن بسطهای دورزن و مجانبی، می‌توان از آن استفاده‌کرد. در این‌جا، این رابطه را به‌دست می‌آوریم و کاربردهای آن‌را نشان می‌دهیم.

از دستور تیلور، با جملهٔ متمم به‌شکل انتگرال معین، آغاز می‌کنیم [۳۱۸]*:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)=$$

$$=hf'(x_0)+\frac{h^{2}}{2!}f''(x_0)+\cdots+\frac{h^{m}}{m!}f^{(m)}(x_0)+\rho$$

که درآن، برای جملهٔ متمم داریم:

$$\rho=\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x_0+h} f^{(m+1)}(t)(x_0+h-t)^{m}dt=\int_{0}^{h} f^{(m+1)}(x_0+h-z).\frac{z^{m}}{m!}dz$$

در این‌جا، به‌جای f، به‌نوبت، تابع‌های زیر را قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x} f(t)dt,\ f(x),\ hf'(x),\ h^{2}f''(x),\ \ldots,\ h^{m-2}f^{(m-2)}(x)$$

و همراه با آن آن‌ها، به‌ترتیب، m را با مقدارهای زیر عوض می‌کنیم:

$$m,\ m-1,\ m-2,\ m-3,\ \ldots,\ 1$$

به‌این ترتیب، به‌دستگاهی از m برابری می‌رسیم:

---

*) چه در این‌جا و چه بعد، فرض را بر این داریم که همهٔ مشتق‌های مذکور وجود دارند و پیوسته‌اند.

$$\begin{array}{|l|l|}
\hline
\dfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0)+\dfrac{h}{2!}f'(x_0)+\dfrac{h^2}{3!}f''(x_0)+\cdots+\dfrac{h^{m-1}}{m!}f^{(m-1)}(x_0)+\rho_0 & 1 \\
\Delta f(x_0) = hf'(x_0)+\dfrac{h^2}{2!}f''(x_0)+\cdots+\dfrac{h^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x_0)+\rho_1 & A_1 \\
h\Delta f'(x_0) = h^2f''(x_0)+\cdots+\dfrac{h^{m-1}}{(m-2)!}f^{(m-1)}(x_0)+\rho_2 & A_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
h^{m-2}\Delta f^{(m-2)}(x_0) = \dfrac{h^{m-1}}{1!}f^{(m-1)}(x_0)+\rho_{m-1} & A_{m-1} \\
\hline
\end{array}$$

از این دستگاه، همهٔ مشتق‌هـای سمت راست را حذف می‌کنیم؛ برای این منظور، برابری اول‌را با بقیهٔ برابری‌ها، که به ترتیب در A_1، A_2، ...، A_m ضرب شده‌اند، جمع می‌کنیم و مقدارهای اخیر را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2!}+A_1=0,\quad \dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{2!}A_1+A_2=0,\ \ldots, \\
\dfrac{1}{m!}+\dfrac{1}{(m-1)!}A_1+\dfrac{1}{(m-2)!}A_2+\cdots+A_{m-1}=0
\end{array}\right\} \qquad (17)$$

در نتیجه، به‌دست می‌آید:

$$f(x_0)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt+A_1\Delta f(x_0)+A_2h\Delta f'(x_0)+\cdots$$

$$\cdots+A_{m-1}h^{m-2}\Delta f^{(m-2)}(x_0)+r \qquad (18)$$

که در آن

$$r=-\rho_0-A_1\rho_1-A_2\rho_2-\cdots-A_{m-1}\rho_{m-1}=$$

$$=-\frac{1}{h}\int_0^h f^{(m)}(x_0+h-z)\cdot\left\{\frac{z^m}{m!}+A_1\frac{hz^{m-1}}{(m-1)!}+\right.$$

$$\left.+A_2\frac{h^2z^{m-2}}{(m-2)!}+\cdots+A_{m-1}h^{m-1}z\right\}dz$$

و یا ساده‌تر

$$r=-\frac{1}{h}\int_{0}^{h}f^{(m)}(x_0+h-z)\varphi_m(z)dz \qquad (18^*)$$

که در آن فرض شده است:

$$\varphi_m(z)=\frac{z^m}{m!}+A_1\frac{hz^{m-1}}{(m-1)!}+A_2\frac{h^2z^{m-2}}{(m-2)!}+\cdots+A_{m-1}h^{m-1}z \qquad (19)$$

روشن است که ضریب‌های A_1، A_2، ...، A_{m-1} را می‌توان، به‌طور یك ارزشی، مستقل از انتخاب تابع f و عددهای x_0 و h، یکی پس از دیگری، معین کرد. ولی این ضریب‌ها، از قبل، برای ما معلوم‌اند، این‌ها ضریب‌های $\frac{\beta_k}{k!}$ از بسط $\frac{x}{e^x-1}$ برحسب توان‌های x [۴۴۹، (۱۲)] می‌باشند. در واقع، اگر به‌یاد آوریم که β در معادلهٔ نمادی

$$(\beta+1)^k-\beta^k=0$$

صدق می‌کند، آن‌وقت قانع می‌شویم که عددهای $\frac{\beta_k}{k!}$ هم، جواب‌های معادلهٔ (۷) خواهند بود. از آن‌چه دربارهٔ عددهای β_k در ۴۴۹ گفته شد، روشن می‌شود که

$$\left.\begin{aligned} A_1=\frac{\beta_1}{1!}=-\frac{1}{2},\quad A_{2p-1}&=\frac{\beta_{2p-1}}{(2p-1)!}\quad (p>1)\\ A_{2p}=\frac{\beta_{2p}}{(2p)!}&=(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

که در آن، B_p عبارت است از عدد pام برنولی.

تابع $f(x)$ را در بازهٔ متناهی $[a,b]$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $h=\frac{b-a}{n}$ (n عددی طبیعی است)، به‌نوبت، به‌جای x_0 عددهای

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(n-1)h=b-h$$

را برای هر بازهٔ $[a+(i-1)h,\ a+ih]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ در برابری از نوع (۱۸)، با جملهٔ متمم (18^*) انتخاب می‌کنیم و همهٔ این برابری‌ها را جمله به‌جمله با هم جمع می‌کنیم؛ به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n}f(a+\overline{i-1}h)\equiv\sum_{a}^{b}f(x)=\frac{1}{h}\int_{a}^{b}f(x)dx+A_1[f(b)-f(a)]+$$

$$+A_۲h[f'(b)-f'(a)]+\cdots$$

$$\cdots+A_{m-۱}h^{m-۲}[f^{(m-۲)}(b)-f^{(m-۲)}(a)]+R \qquad (۲۱)$$

که جملهٔ متمم آن چنین است:

$$R=-\frac{۱}{h}\sum_{i=۱}^{n}\int_{۰}^{h}f^{(m)}(a+ih-z)\varphi_m(z)dz\equiv$$

$$\equiv-\frac{۱}{h}\sum_{a}^{b}\int_{۰}^{h}f^{(m)}(x+h-z)\varphi_m(z)dz \qquad (۲۱')$$

این، دستور اولر ـ ماکلورن است که، ضمناً، دارای جملهٔ متمم می‌باشد (و ظاهراً، مولفان، آن‌را نمی‌نوشتند). به‌عدد m می‌توان، با شروع از ۲، مقدارهای مختلف را داد.

۴۶۶. بررسی جملهٔ متمم. ابتدا، به‌نکته‌هایی دربارهٔ تابع $\varphi_m(z)$ توجه کنیم.

پیش از همه، با مشتق‌گیری از (۱۹)، به‌دست می‌آید:

$$\varphi'_m(z)=\varphi_{m-۱}(z)+A_{m-۱}h^{m-۱} \qquad (۲۲)$$

سپس، هرچه باشد $m\geqslant ۲$، داریم:

$$\varphi_m(۰)=۰,\quad \varphi_m(h)=۰ \qquad (۲۳)$$

اولی، از خود چند جمله‌ای $\varphi_m(z)$ واضح است [(۱۹) را ببینید] و دومی، از آخرین برابری دستگاه (۱۷) نتیجه می‌شود.

اکنون، این حکم را ثابت می‌کنیم: توابع $\varphi_{۲k}(z)$ (از مرتبهٔ زوج)، نمی‌توانند هیچ مقداری را دربازهٔ $[۰, h]$، بیش از دوبار اختیار کنند. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر خلاف این حکم را درست بگیریم، آن‌وقت، مشتق $\varphi_{۲k}(z)$ [(۲۳) را ببینید]، یعنی $\varphi'_{۲k}(z)\equiv\varphi_{۲k-۱}(z)$ (آخر $A_{۲k-۱}=۰$!)، علاوه بر دو انتهای بازهٔ $[۰, h]$ ـ بنابر قضیهٔ رول ـ دست‌کم دوبار در درون بازه، برابر صفر می‌شود. در این صورت، مشتق $\varphi'_{۲k-۱}(z)\equiv\varphi_{۲k-۲}(z)+A_{۲k-۲}h^{۲k-۲}$ ـ بنابر همان قضیه ـ در درون بازهٔ $[۰, h]$، دست‌کم سه‌بار برابر صفر می‌شود، یعنی تابع $\varphi_{۲k-۱}(z)$ در درون همان بازه، دست‌کم سه‌بار، مقدار $A_{۲k-۲}h^{۲k-۲}$ را اختیار می‌کند. اگر به‌همین ترتیب، درجهٔ تابع $\varphi_{۲k}$ را دو واحد دو واحد کم کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که تابع $\varphi_۲(z)=\frac{۱}{۲}z^۲-\frac{۱}{۲}$ (دو جمله‌ای درجه دوم)، مقداری را دست‌کم سه‌بار اختیار می‌کند، که ممکن نیست! و به‌این‌ترتیب،

حکم ما ثابت می‌شود.

از این حکم، نتیجهٔ مهم زیر حاصل می‌شود: تابع $\varphi_{2k}(z)$، علامت خود را در بازهٔ $(0, h)$ حفظ می‌کند، زیرا، با توجه به‌این‌که در دو انتهای بازه صفر می‌شود [(۲۳)]، دیگر نمی‌تواند در درون بازه برابر صفر شود. به‌سادگی می‌توان علامت تابع $\varphi_{2k}(z)$ را پیدا کرد: برای مقدارهای کوچك z (و بنابراین، همه‌جا بین ۰ و h)، این چندجمله‌ای، همان علامت جملهٔ کوچکتر $A_{2k-2}h^{2k-2}z^2$ $(A_{2k-1}=0)$ را دارد و چون $A_{2k-2}=(-1)^{k-2}\frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}$، بنابراین، این علامت، همان $(-1)^k$ است.

به‌این ترتیب، دو تابع متوالی مرتبهٔ زوج $\varphi_{2k}(z)$ و $\varphi_{2k+2}(z)$، هر کدام، علامت معینی در بازهٔ $(0, h)$ دارند، ولی این دو علامت با هم فرق دارد. از این نکته، هم‌اکنون استفاده خواهیم کرد.

به‌جملهٔ متمم R برمی‌گردیم. m را زوج به‌حساب می‌آوریم: $m=2k$، و این‌بار فرض می‌کنیم، مشتق‌های $f^{(2k)}(z)$ و $f^{(2k+2)}(z)$، در بازهٔ $[a, b]$، هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند.

از عبارت R، با دوبار انتگرال گیری جزءبه‌جزء، با در نظر گرفتن (۲۲) و (۲۳)، به‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$R=-\frac{1}{h}\sum_a^b\int_0^h\varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+h-z)dz=$$

$$=\frac{1}{h}\sum_a^b\int_0^h(A_{2k}h^{2k}-\varphi'_{2k+1}(z))f^{(2k)}(x+h-z)dz=$$

$$=\frac{1}{h}A_{2k}h^{2k}\sum_a^b[f^{(2k-1)}(x+h)-f^{(2k-1)}(x)]-$$

$$-\frac{1}{h}\sum_a^b\int_0^h\varphi_{2k+1}(z)f^{(2k+1)}(x+h-z)dz=$$

$$=A_{2k}h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]-$$

$$-\frac{1}{h}\sum_a^b\int_0^h\varphi'_{2k+2}(z)f^{(2k+1)}(x+h-z)dz=$$

$$=A_{2k}h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]-$$

$$-\frac{1}{h}\sum_{a}^{b}\int_{0}^{h}\varphi_{2k+2}(z)f^{(2k+2)}(x+h-z)\,dz$$

بنابه‌آن‌چه قبلاً گفتیم، دومجموعی که زیرآن‌ها را خط کشیده‌ایم، دارای علامت‌های مختلف هستند، وبنابراین، مجموع اولی باید با

$$A_{2k}h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]$$

هم علامت و، از لحاظ قدرمطلق، ازآن کمتر باشد. به‌این‌ترتیب، بالاخره

$$R=R_{2k}=\theta\cdot A_{2k}h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]=$$
$$=\theta\cdot(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}[f^{(k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)] \quad (0<\theta<1) \quad (21^*)$$

اکنون، اگرهمهٔ مشتق‌های $f^{(2k)}(z)$ از مرتبهٔزوج را، دربازهٔ $[a, b]$، با یك‌علامت فرض‌کنیم و به‌جای دستور متناهی (۲۱)، رشتهٔ نامتناهی را بنویسیم (وضمناً، ازمقدارهای (۲۰) برای ضریب‌های A_m استفاده‌کنیم)، آن‌وقت، رشتهٔ نامتناهی اولر-ماکلورن به‌دست می‌آید:

$$\sum_{a}^{b}f(x)=\frac{1}{h}\int_{a}^{b}f(x)\,dx-\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]+\frac{B_1}{2!}h[f'(b)-f'(a)]-$$
$$-\frac{B_2}{4!}h^3[f'''(b)-f'''(a)]+\cdots+$$
$$+(-1)^{k-2}\frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}h^{2k-3}[f^{(2k-3)}(b)-f^{(2k-3)}(a)]+$$
$$+(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]+\cdots \quad (24)$$

این رشته، درحالت کلی، متباعداست (زیرا علامت $=$، به‌طور مشروط گذاشته شده‌است). با توجه به‌فرض‌هایی که داشتیم، دست‌کم با شروع ازجملهٔ سوم، مرتباً، تغییرعلامت‌می‌دهد. همچنین، با درنظرگرفتن (۲۱*)، می‌توان گفت که این رشته، مجموع $\sum_{a}^{b}f(x)$ ــ واقع در سمت‌چپ ــ را دور می‌زند. اگراین مجموع را با انتگرال $\frac{1}{h}\int_{a}^{b}f(x)\,dx$ جابه‌جاکنیم

و، ضمناً، علامت‌های همهٔ جمله‌های دیگررا به‌عکس خود تبدیل کنیم، در آن صورت، رشتهٔ دورزن انتگرال مزبور به‌دست می‌آید.

مجموع‌های جزئی این رشته‌ها، به‌ما امکان می‌دهند تا، یکبار دیگر، با دقت بیشتری مجموع $\sum_a^b$ را از روی انتگرال، ویا، انتگرال $\frac{1}{h}\int_a^b$ را از روی مجموع محاسبه کنیم. روشن است که، درهمهٔ این موردها، برآورد قبلی جملهٔ متمم، نقش اساسی به‌عهده دارد.

۴۶۷. مثال‌های محاسبه، به‌کمک دستور اولر-ماکلورن. ۱) مسألهٔ پیدا کردن مقدار تقریبی مجموع ۹۰۰ جملهٔ

$$\sum_{i=100}^{i=999}\frac{1}{i}\equiv\sum_{100}^{1000}\frac{1}{x}$$

را مطرح می‌کنیم. دراین‌جا، $f(z)=\frac{1}{z}$، $a=100$، $b=1000$ و $h=1$ است. چون داریم:

$$f'(z)=-\frac{1}{z^2},\ f''(z)=\frac{2}{z^3},\ f'''(z)=-\frac{6}{z^4},\ f^{IV}(z)=$$

$$=\frac{24}{z^5},\ f^{V}(z)=-\frac{120}{z^6}$$

و به‌طور کلی

$$f^{(2k)}(z)=\frac{(2k)!}{z^{2k+1}}$$

بنابراین، شرط‌های مربوط به‌محاسبهٔ مشتق‌های مرتبهٔ زوج، رعایت شده است.

بسط را تا جملهٔ f''' ادامه می‌دهیم، به‌نحوی‌که در جملهٔ متمم، f^V ظاهرشود. در این حالت، طبق دستور اولر-ماکلورن، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{100}^{1000}\frac{1}{x}=\int_{100}^{1000}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}\right)+$$

$$+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{100^2}-\frac{1}{1000^2}\right)-\frac{6}{720}\left(\frac{1}{100^4}-\frac{1}{1000^4}\right)+$$

$$+\theta\cdot\frac{12}{3024}\left(\frac{1}{100^6}-\frac{1}{1000^6}\right)\quad(0<\theta<1)$$

چون داریم:

$$\int_{۱۰۰}^{۱۰۰۰} \frac{dx}{x} = \ln ۱۰ = ۰/۳۰۲\ ۵۸۵\ ۰۹۲\ ۹۹۴\ ۰۴۵ \ldots,$$

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱۰۰} - \frac{۱}{۱۰۰۰}\right) = ۰/۰۰۴۵,$$

$$\frac{۱}{۱۲}\left(\frac{۱}{۱۰۰^۲} - \frac{۱}{۱۰۰۰^۲}\right) = ۰/۰۰۰\ ۰۰۸\ ۲۵,$$

$$-\frac{۶}{۷۲۰}\left(\frac{۱}{۱۰۰^۴} - \frac{۱}{۱۰۰۰^۴}\right) = -۰/۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۸۳\ ۳۲۵$$

$$۲/۳۰۷\ ۰۹۳\ ۳۴۲\ ۹۱۰\ ۷۲۰$$

$$\theta \cdot \frac{۱۲}{۳۰۲۴}\left(\frac{۱}{۱۰۰^۶} - \frac{۱}{۱۰۰۰^۶}\right) < ۰/\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۴$$

بنابراین، با دقت تا $\frac{۱}{۱۰^{۱۴}}$، می‌توان نوشت:

$$\sum_{۱۰۰}^{۱۰۰۰} \frac{۱}{x} = ۰/۳۰۷\ ۰۹۳\ ۳۴۲\ ۹۱۰\ ۷۲$$

۲) حالا به‌محاسبهٔ $\int_۰^۱ \frac{dx}{۱+x} = \ln ۲$ می‌پردازیم. در این‌جا $f(z) = \frac{۱}{۱+z}$، $a = ۰$، $b = ۱$ و $h = \frac{۱}{۱۰}$ $(n = ۱۰)$. داریم:

$$f'(z) = -\frac{۱}{(۱+z)^۲},\ f''(z) = \frac{۲}{(۱+z)^۳},\ f'''(z) = -\frac{۶}{(۱+z)^۴},$$

$$f^{IV}(z) = \frac{۲۴}{(۱+z)^۵},\ f^{V}(z) = \frac{۱۲۰}{(۱+z)^۶}$$

و به‌طور کلی

$$f^{(۲k)}(x) = \frac{(۲k)!}{(۱+z)^{۲k+۱}}$$

به‌طوری که، در این‌جا هم، شرط‌ها برقرار است. از دستور تغییر شکل دادهٔ اولر-ماکلورن

استفاده و این‌بار هم، آن را درجملهٔ f''' قطع می‌کنیم:

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z} = \frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}-$$

$$-\frac{1}{20}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{1200}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{6}{7\,200\,000}\left(1-\frac{1}{16}\right)-$$

$$-\theta\cdot\frac{12}{30\,024\,000\,000}\left(1-\frac{1}{64}\right)$$

$$(0<\theta<1)$$

ومحاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{19}=0/718\ 771\ 403,$$

$$-\frac{1}{20}\left(1-\frac{1}{2}\right)=-0/025,$$

$$-\frac{1}{1200}\left(1-\frac{1}{4}\right)=0/000\ 625,$$

$$\frac{6}{7\,200\,000}\left(1-\frac{1}{16}\right)=0/000\ 000\ 781$$

$$0/693\ 147\ 184$$

$$\theta\cdot\frac{12}{30\,024\,000\,000}\left(1-\frac{1}{64}\right)<0/000\ 000\ 004$$

بنابراین، با دقت تا $\frac{1}{2\times 10^8}$، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln 2=0/693\ 147\ 18$$

۳) بالاخره، نشان‌می‌دهیم که، چگونه می‌توان به‌کمك دستور اولر-ماکلورن، مجموع رشته‌های نامتناهی را، که به‌آهستگی به‌سمت تقارب می‌روند، به‌تقریب محاسبه کرد. به‌عنوان مثال، رشتهٔ زیررا انتخاب می‌کنیم:

$$\pi^2=6\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$$

در دستور کلی (۲۱) [و (*۲۱)]، فرض می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x^2},\ h=1,\ b=a+nh$$

که در آن، a و n، فعلاً، عددهای طبیعی دلخواهی هستند. انتگرال و مشتق‌ها، به‌سادگی محاسبه می‌شوند؛ اگر به‌جای A_m، مقدارهای آن را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(a+i)^2}=-\left[\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+n)^2}-\frac{1}{a^2}\right]-$$

$$-B_1\left[\frac{1}{(a+n)^3}-\frac{1}{a^3}\right]+B_2\left[\frac{1}{(a+n)^5}-\frac{1}{a^5}\right]-\dots-$$

$$-(-1)^{k-2}B_{k-1}\left[\frac{1}{(a+n)^{2k-1}}-\frac{1}{a^{2k-1}}\right]-$$

$$-\theta_n\cdot(-1)^{k-1}B_k\left[\frac{1}{(a+n)^{2k+1}}-\frac{1}{a^{2k+1}}\right]\quad(0<\theta_n<1)$$

a و k را تثبیت می‌کنیم و، با میل دادن n به‌سمت ∞، به‌حد می‌رویم. به سادگی معلوم می‌شود که ضریب θ_n هم به‌سمت یک‌حد θ $(0<\theta<1)$ میل می‌کند. درنتیجه

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(a+i)^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}+B_1\cdot\frac{1}{a^3}-B_2\cdot\frac{1}{a^5}-B_3\cdot\frac{1}{a^7}-\dots$$

$$\dots+(-1)^{k-2}B_{k-1}\cdot\frac{1}{a^{2k-1}}+\theta(-1)^{k-1}B_k\frac{1}{a^{2k+1}}\dots$$

اکنون، به‌طور مشخص، $a=10$ و $k=10$ می‌گیریم؛ با استفاده ازمقدارهای معلوم عددهای برنولی [۴۴۹]، بالاخره پیدا می‌کنیم:

$$\pi^2=6\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{i^2}+\frac{6}{10}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}-\frac{1}{5\times10^5}+\frac{1}{7\times10^7}-$$

$$-\frac{1}{5\times10^9}+\frac{5}{11\times10^{11}}-\frac{691}{455\times10^{13}}+\frac{7}{10^{15}}-\frac{3617}{85\times10^{17}}+$$

$$+\frac{43867}{133\times10^{19}}-\theta\frac{174611}{55\times10^{21}}$$

که با محاسبه تا ۱۹رقم بعد ازممیز، داریم:

$$۶\sum_{۱}^{۹}\frac{۱}{i^۲}=۹/۲۳۸\ ۶۰۶\ ۳۸۶\ ۹۹۹\ ۲۴۴\ ۱۴۲\ ۱,$$

$$\frac{۶}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}=۰/۶۳۱,$$

$$-\frac{۱}{۵\times۱۰^۵}=-۰/۰۰۰\ ۰۰۲,$$

$$\frac{۱}{۷\times۱۰^۷}=۰/۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۱۴\ ۲۸۵\ ۷۱۴\ ۲۸۵\ ۷,$$

$$-\frac{۱}{۵\times۱۰^۹}=-۰/۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۲,$$

$$\frac{۵}{۱۱\times۱۰^{۱۱}}=۰/۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۴\ ۵۴۵\ ۴۵۴\ ۵,$$

$$-\frac{۶۹۱}{۴۵۵\times۱۰^{۱۳}}=-۰/۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۱۵۱\ ۸۶۸\ ۱,$$

$$\frac{۷}{۱۰^{۱۵}}=۰/۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۷,$$

$$-\frac{۳۶۱۷}{۸۵\times۱۰^{۱۷}}=-۰/۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۴۲۵\ ۵,$$

$$\frac{۴۳۸۶۷}{۱۳۳\times۱۰^{۱۹}}=۰/۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۰۰\ ۰۳۳\ ۰,$$

$$۹/۸۶۹\ ۶۰۴\ ۴۰۱\ ۰۸۹\ ۳۸۵\ ۶۲۱\ ۷$$

و با به‌حساب آوردن اصطلاح مربوط به‌جملهٔ متمم، معلوم می‌شود که $\left(\text{با تقریب }\frac{۱}{۲\times۱۰^{۱۷}}\right)$ داریم:

$$\pi^۲=۹/۸۶۹\ ۶۰۴\ ۴۰۱\ ۰۸۹\ ۳۵۸\ ۶۲$$

این مثال، بسیار آموزنده است: مجموع $\pi^۲$ رشتهٔ متقارب را، با دقت زیادی، از روی دستور اولر-ماکلورن و، دو واقع، به‌کمک مجموع جزئی رشتهٔ متباعدی که عدد $\pi^۲$ را دور می‌زند، محاسبه کردیم. اگر می‌خواستیم با استفاده از خود رشتهٔ متقارب، به‌همین نتیجه برسیم، می‌بایستی بیش از یك میلیارد از جمله‌های آن را انتخاب کنیم.

۴۶۸. صورت دیگری از دستور اولر-ماکلورن. به‌دستورهای (۲۱) و (۲۱′) برمی‌گردیم، ولی فرض می‌کنیم که مشتق‌های همهٔ مرتبه‌های تابع $f(x)$، درحوزهٔ نامتناهی $[a, +\infty)$ وجود داشته باشند و در شرط‌های زیر صدق کنند:

(a) مشتق‌های مرتبهٔ زوج $f^{(2k)}(z)$، همه دراین بازه، دارای یک علامت باشند؛

(b) مشتق‌های مرتبهٔ فرد $f^{(2k-1)}(z)$، به‌ازای $z \to +\infty$، همگی به‌سمت صفر میل کنند.

عدد m را زوج می‌گیریم: $m=2k$. عددهای a و h را تثبیت می‌کنیم و $b=a+nh$ را (همراه با n) متغیر به‌حساب می‌آوریم. جملهٔ متمم R [(۲۱′) را ببینید] را به‌این صورت درمی‌آوریم:

$$-\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(a+ih-z)dz+$$

$$+\frac{1}{h}\sum_{i=n+1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+ih-z)\,dz\equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{h}\sum_{a}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+h-z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{h}\sum_{b}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+h-z)\,dz$$

و اگر نخستین مجموع را، با همهٔ جمله‌های دستور (۲۱)، که شامل a هستند، با مقدار ثابتی یکی کنیم:

$$C_k=-A_1f(a)-A_2hf'(a)-\cdots-A_{2k-2}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(a)-\frac{1}{h}\sum_{a}^{b}\int_0^h$$

که آشکارا، مستقل از b است، دستور (۲۱) چنین می‌شود:

$$\sum_{a}^{b}f(x)=C_k+\frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx+A_1f(b)+A_2hf'(b)+\cdots$$

$$\cdots+A_{2k-2}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(b)+R' \qquad (۲۵)$$

که در آن

$$R' = \frac{1}{h}\sum_{i=n+1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a+ih-z)dz =$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(b+ih-z)dz \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{h}\sum_{b}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x+h-z)dz$$

برای مدلل کردن این تبدیل، تنها باید تقارب رشته‌های نامتناهی مورد استفاده را، ثابت کنیم. ازرشتهٔ $\frac{1}{h}\sum_{a}^{\infty}$ آغاز می‌کنیم. از (۲۴) نتیجه می‌شود:

$$0 < \frac{\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a+ih-z)dz}{A_{2k}h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(a)-f^{(2k-1)}(a+nh)}<1$$

باتوجه به‌ویژگی تابع $\varphi_{2k}(x)$[۴۶۶] و بنا برشرط(a)، همهٔ جمله‌های صورت کسردارای یك علامت هستند که، در واقع، همان علامت مخرج کسر است. ازاین‌جا، با گذر به‌حد، به‌ازای $n \to \infty$، و با درنظر گرفتن شرط (b)، نتیجه می‌گیریم که رشتهٔ

$$\frac{1}{h}\sum_{a}^{b}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x+h-z)dz \equiv \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(a+ih-z)dz$$

متقارب است و، ضمناً، مجموع آن، همان علامت عبارت $A_{2k}h^{2k-1}.f^{(2k-1)}(a)$ رادارد و ازلحاظ قدرمطلق ازآن تجاوز نمی‌کند. اگردراین بحث، a را به b تبدیل کنیم، برای ما معلوم می‌شود که رشتهٔ

$$\frac{1}{h}\sum_{b}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(x+h-z)\,dz \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z) f^{(2k)}(b+ih-z)dz$$

هم متقارب است و، ضمناً ، مجموع آن، همان علامت عبارت $A_{2k}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b)$ را دارد و، از لحاظ قدرمطلق، ازآن تجاوز نمی‌کند.

بنابراین، نه‌فقط تقارب رشته‌های نامتناهی مورداستفاده را، ثابت کردیم، بلکه‌ضمناً، روشن کردیم که می‌توان جملهٔ متمم R' دستور (۲۵) را به‌صورت زیر نوشت:

$$R' = \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1} \cdot f^{(2k-1)}(b) = \theta \cdot (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} h^{2k-1} \cdot f^{(2k-1)}(b)$$

$$(0 < \theta < 1) \qquad (25^*)$$

خیلی جالب است که ثابت C_k در دستور (۲۵)، که برای آن- بنابه‌شیوهٔ تشکیل آن- امکان وابستگی به‌اندیس k نفی نشده بود، عملاً مستقل از k از آب درآمد. برای تأیید این مطلب، کافی است دستورهای (۲۵) و (۲۵*) را، باهمین دستورها به‌ازای $k=1$، مقایسه کنیم:

$$\sum_a^b f(x) = C_1 + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx + A_1 f(b) + \bar{R}'$$

که در آن

$$\bar{R}' = \bar{\theta} \cdot A_2 h \cdot f'(b) \quad (0 < \bar{\theta} < 1)$$

داریم:

$$C_1 + \bar{\theta} \cdot A_2 h \cdot f'(b) = C_k + A_2 h \cdot f'(b) + \cdots$$
$$\cdots + A_{2k-2} h^{2k-3} f^{(2k-3)}(x) + \theta \cdot A_{2k} h^{2k-1} f^{(2k-1)}(b)$$

اگر دراین‌جا، به‌ازای $b \to \infty$، به‌سمت حد برویم، به‌درنظر گرفتن شرط (b)، نتیجه می‌گیریم:

$$C_k = C_1 = C$$

ثابت C، که طبیعی است آن‌را ثابت اولر-ماکلورن برای تابع $f(x)$ بنامیم، علاوه‌بر تابع $f(x)$، به‌انتخاب a و h هم بستگی دارد.

یادداشت. وقتی که در نابرابری‌ها به‌سمت حد برویم، ظاهراً باید به‌علامت‌های نابرابری، علامت برابری را هم اضافه کنیم و برای ضریب θ در (۲۵*) بنویسیم: $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. ولی، حذف برابری صفر واضح است- مجموع رشتهٔ نامتناهی، با جمله‌هایی که یك علامت دارند، نمی‌تواند صفرشود. اگر هم $\theta = 1$ فرض شود، در آن صورت، با افزایش یك واحد به‌شمارهٔ k در (۲۵)، $R' = 0$ می‌شد که (به‌طوری که هم‌اکنون‌روشن

کردیم) ناممکن است. در نتیجه، همان‌طور که عملاً نوشتیم، باید در نظر بگیریم: $0<\theta<1$.

اگر به‌جای مجموع متناهی، رشتهٔ نامتناهی بنویسیم، رشتهٔ اولر-ماکلورن را به‌صورت زیر، به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_a^b f(x)=C+\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}f(b)+$$

$$+\frac{B_1}{2!}hf'(b)-\frac{B_2}{4!}h^3f'''(b)+$$

$$+\cdots+(-1)^{k-2}\frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(b)+$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b)+\cdots$$

[در این‌جا هم، علامت $=$، به‌معنای مشروط آن است]. بنا بر شرط (a)، همهٔ مشتق‌های $f^{(2k-1)}(b)$، ضمن ترقی b، در یك جهت تغییر می‌کنند و چون، بنا بر شرط (b)، به‌ازای $b\to\infty$، به‌سمت صفر میل می‌کنند، بنابراین، همهٔ آن‌ها دارای یك علامت‌اند. در این‌جا [و از (۲۵*)] نتیجه می‌گیریم که رشتهٔ اولر ـ ماکلورن، درشکل تازهٔ خود هم، مجموع $\sum_a^b f(x)$ را دور می‌زند.

یادداشت. در پایان، توضیحی دربارهٔ امکان تعیین مقدار ثابت موجود در این بسط، می‌دهیم. با اختیار یك $b>a$، که برای آن، هم مجموع وهم انتگرال، بدون هیچ اشکالی محاسبه می‌شود، می‌توان برای عدد C، یك رشتهٔ دورزن به‌دست آورد:

$$C=\sum_a^\infty f(x)-\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx+\frac{1}{2}f(b)-$$

$$-\frac{B_1}{2!}hf'(b)+\frac{B_2}{4!}h^3f'''(b)-\cdots$$

که در بیشتر موردها، امکان می‌دهد، مقدار تقریبی C را پیدا کنیم.

۴۶۹. دستور و رشتهٔ ستیرلینگ. به‌عنوان نمونهٔ مهم استفاده از بسط حاصل در

شمارهٔ پیش، آن را درمورد رشتهٔ

$$\ln(n!)=\ln n+\sum_{i=1}^{n-1}\ln i$$

به‌کار می‌بریم. بااختیار $a=1$، $h=1$ و (با تبدیل n به $n-1$، $b=n$ فرض می‌کنیم:

$$f(z)=\ln z \Rightarrow f^{(m)}(z)=(-1)^{m-1}.\frac{(m-1)!}{z^m}\ ,$$

ضمناً، شرط‌های (a) و (b) برقرارند. به‌این ترتیب، به‌بسط مجانبی زیر، برای $\ln(n!)$ می‌رسیم*:

$$\ln(n!)\sim C+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{B_1}{1\times 2}.\frac{1}{n}-\frac{B_2}{3\times 4}.\frac{1}{n^3}+$$

$$+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)2k}.\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots \qquad (۲۶)$$

این رشته، که به‌رشتهٔ ستیرلینگ موسوم است، به‌روشنی متباعد است، زیرا، قدرمطلق جملهٔ عمومی آن [۴۶۹]، برابر $\frac{s_{2k}}{2\pi^2 n}.\frac{(2k-2)!}{(2\pi n)^{2k-2}}$ می‌شود و به‌سمت ∞ میل می‌کند.

از بسط مجانبی $\ln(n!)$، همان‌طور که در ۴۶۴، ۳° نشان‌داده‌شد، می‌توان بسط خود فاکتوریل را هم به‌دست‌آورد. اگر به‌جای ضریب B_k، مقدار عددی آن را قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left\{1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+\cdots\right\}$$

اگر در رشتهٔ (۲۶)، جمله‌ها را تا همان‌جاکه نوشته شده است قطع، وجملهٔ متمم را اضافه کنیم، به‌دستور ستیرلینگ می‌رسیم:

$$\ln(n!)=C+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{B_1}{1\times 2}.\frac{1}{n}-\frac{B_2}{3\times 4}.\frac{1}{n^3}+\cdots$$

---

*) به‌مجموع لگاریتم‌ها، به‌طور جداگانه، $\ln n$ اضافه می‌شود. عدد ۱، که به‌صورت جمله‌ای در انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید، جزو C قراردارد.

$$\cdots+(-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}}+$$

$$+\theta\cdot(-1)^{k}\frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)}\cdot\frac{1}{n^{2k+1}} \qquad (27)$$

که، به‌طوری‌که خواهیم دید، برای محاسبهٔ تقریبی، کاملاً مناسب است.

با فرض $k=1$، حالت مهم و سادهٔ دستور ستیرلینگ حاصل می‌شود:

$$\ln(n!)=C+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{\theta}{12n}$$

که آنتی‌لگاریتم آن را، معمولاً، به‌این صورت می‌نویسند:

$$n!=e^{C}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}$$

این دستوررا، درشمارهٔ ۴۰۶، ازطریق دیگری به‌دست آورده بودیم؛ در آن‌جا هم، پیدا کردیم: $e^{C}=a=\sqrt{2\pi}$ و، بنابراین، مقدار ثابت C، که تااین‌جا برای ما نامعلوم بود، برابرمی‌شود با $\frac{1}{2}\ln 2\pi$.

به‌عنوان مثال $\ln(100!)$ را با ۱۰ رقم بعد ازممیز ـ از روی دستور (۲۷) ـ با انتخاب $k=2$ محاسبه می‌کنیم. هرپنج عدد را باهم جمع می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\ln 2\pi=0/91893\ 85332\ 04$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n=100/5\ \ln 100=462/81960\ 36918\ 03$$

$$-n=-100=-100$$

$$\frac{B_1}{2n}=\frac{1}{1200}=0/00083\ 33333\ 33$$

$$-\frac{B_2}{12n^3}=-\frac{1}{36\times 10^7}=-0/0000\ 00027\ 77$$

که با به‌حساب‌آوردن‌جملهٔ متمم، برای $\ln(100!)$، عدد ۳۶۳/۷۳۹۳۷ ۵۵۵۵۶ به‌دست

می‌آید. دقت این تقریب را، با اختیار جمله‌های بیشتر ومحاسبه آن‌ها با رقم‌های بیشتر، می‌توان به‌طورقابل‌ملاحظه‌ای زیادترکرد. درمثال ما، می‌توان این‌دقت را تاجملهٔ ۱۳۰۰م ادامه داد (که از آن‌جا، جمله‌ها ازلحاظ قدرمطلق، نزول می‌کنند).

یادداشت. خواننده، ضمن این مثال‌ها، مشاهده کرد که، چگونه می‌توان به‌کمك قطعه‌های رشته‌های آشکارا متباعد، مقدار کمیت‌های لازم را، حتی با دقتی زیاد، محاسبه کرد. بعضی از مؤلفان (چه درقدیم وچه درزمان ما)، این‌گونه رشته‌ها را «نیمه‌متقارب» می‌نامند. ولی ما، ازاین‌جهت ازبه‌کاربردن این اصطلاح پرهیزکردیم، که برای تعریف کافی و، درعین حال، درست آن، دچار دشواری‌هایی می‌شویم.

MATH75.IR

فصل سیزدهم

انتگرال‌های ناویژه

§۱. انتگرال‌های ناویژه، با حدهای بی‌نهایت

۴۷۰. تعریف انتگرال با حد بی‌نهایت. در فصل نهم، به‌مفهوم انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$، برای حالت بازهٔ متناهی $[a, b]$ و تابع کران‌دار $f(x)$، پرداختیم. فصل حاضر را، به‌تعمیم این‌مفهوم، درجهت‌های مختلف، اختصاص داده‌ایم. از بررسی انتگرال، در بازهٔ نامتناهی، آغاز می‌کنیم.

فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, +\infty)$ یعنی برای $x \geqslant a$، معین و در بخش متناهی دلخواهی از آن، یعنی بازهٔ $[a, A]$ انتگرال‌پذیر باشد، به‌نحوی‌که انتگرال $\int_a^A f(x)dx$، برای $A > a$ دلخواه، دارای معنا باشد.

حد این انتگرال را (متناهی یا نامتناهی)، وقتی‌که $A \to +\infty$، انتگرال تابع $f(x)$ از a تا $+\infty$ گویند و به‌صورت زیر نشان می‌دهند.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)dx \qquad (۱)$$

در حالتی که این حد متناهی باشد، انتگرال (۱) را متقارب و تابع $f(x)$ را، در بازهٔ نامتناهی $[a, +\infty)$، انتگرال‌پذیر گویند. در حالتی‌هم‌که حد (۱) برابر بی‌نهایت باشد، یا اصلاً وجود نداشته باشد، انتگرال را متباعد می‌نامند. برای تمایز این انتگرال، با انتگرال ویژه‌ای که قبلاً* دیده‌ایم، انتگرال معین (۱) را، انتگرال ناویژه می‌نامیم*.

*) قبلاً هم، در شمارهٔ **۳۷۳**، به‌مفهوم انتگرال ناویژه، برخورد کرده‌ایم.

با چند مثال، مطلب را، روشن‌تر می‌کنیم. ۱) تابع $\frac{۱}{۱+x^۲}$، در بازهٔ غیرمشخص $[۰, A)$ $(A>۰)$ انتگرال‌پذیر است، ضمناً داریم:

$$\int_۰^A \frac{dx}{۱+x^۲} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_۰^A = \operatorname{arc\,tg} A$$

چون برای این انتگرال، به‌ازای $A \to \infty$، حد متناهی $\frac{\pi}{۲}$ وجود دارد، بنابراین، انتگرال از ۰ تا ∞ متقارب می‌شود و مقدار آن چنین است:

$$\int_۰^{\infty} \frac{dx}{۱+x^۲} = \lim_{A\to\infty} \int_۰^A \frac{dx}{۱+x^۲} = \frac{\pi}{۲}$$

۲) می‌خواهیم روشن کنیم که برای کدام مقدارهای نماد $\lambda>۰$، انتگرال ناویژهٔ

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \quad (a>۰) \qquad (۲)$$

وجود دارد. $\lambda \neq ۰$ می‌گیریم، در آن‌صورت

$$\int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{۱}{۱-\lambda} x^{۱-\lambda} \Big|_a^A = \frac{۱}{۱-\lambda}(A^{۱-\lambda} - a^{۱-\lambda})$$

این نتیجه، به‌ازای $A \to \infty$، دارای حد ∞ یا عدد متناهی $\frac{۱}{\lambda-۱} a^{۱-\lambda}$ می‌شود، برحسب این‌که $\lambda<۱$ یا $\lambda>۱$ باشد. در حالت $\lambda = ۱$ داریم:

$$\int_a^A \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^A = \ln A - \ln a$$

و به‌ازای $A \to +\infty$، دارای حد ∞ است.

به‌این ترتیب، انتگرال (۲)، برای $\lambda>۱$ متقارب (و دارای مقدار $\frac{۱}{\lambda-۱} a^{۱-\lambda}$) و برای $\lambda \leqslant ۱$ متباعد می‌شود.

به همین ترتیب، می‌توان انتگرال تابع $f(x)$ از $-\infty$ تا a را هم، شبیه (۱)، تعریف کرد:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)dx \quad (A' < a) \qquad (۳)$$

و درست به‌همین ترتیب، برای انتگرال تابع $f(x)$، از $-\infty$ تا $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A \to +\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx$$

ضمناً، اصطلاح‌هایی که به‌مناسبت انتگرال (۱) مطرح کردیم، به‌قوت خود باقی است.

در حالت اخیر، با اختیار a به‌طور دلخواه، می‌توان نوشت:

$$\int_{A'}^{A} f(x)dx = \int_{A'}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{A} f(x)dx$$

و وجود حد، به‌ازای $A' \to -\infty$ و $A \to +\infty$، برای انتگرال سمت چپ، به‌روشنی، هم ارز است با وجود حدهای (۱) و (۳)، به‌طور جداگانه، برای انتگرال‌های سمت راست*. به‌این ترتیب، انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ را، می‌توان با برابری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

هم تعریف کرد، البته به‌این شرط که، انتگرال‌های سمت‌راست، دارای حد جداگانه باشند. این تعریف، عملاً، ارتباطی به‌انتخاب نقطهٔ a ندارد.

مثال‌ها:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \to -\infty} (-\operatorname{arc\,tg} A') = \frac{\pi}{2} \qquad (۳$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty} = \pi \qquad (۴$$

۴۷۱. استفاده از دستور اصلی محاسبهٔ انتگرالی. درمثال‌های فوق، ابتدا، انتگرال را دربازهٔ متناهی و به‌کمك تابع اولیه محاسبه و، سپس، به‌سمت حد عبور کردیم. می‌توان هر دو جنبه را، در یك دستور، با هم آورد.

---

*) حالتی را که، درآن، انتگرال‌های سمت‌راست، هر دو دارای حد بی‌نهایت و با علامت‌های مختلف‌اند، باید استثنا کرد.

فرض کنیم، مثلاً، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, +\infty)$ معین و در هر بخش متناهی $[a, A]$ از آن، انتگرال‌پذیر باشد. اگر، ضمناً، برای $f(x)$، تابع اولیهٔ $F(x)$ در تمامی بازهٔ $[a, +\infty)$ وجود داشته باشد، در آن‌صورت، از روی دستور اصلی محاسبهٔ انتگرال‌ها [۳۰۸] داریم:

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_a^A$$

از این‌جا روشن است که انتگرال ناویژهٔ (۱)، وقتی و تنها وقتی وجود دارد که حدمتناهی

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = F(\infty)$$

وجود داشته باشد و آن‌گاه

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{\infty}$$

به‌همین ترتیب داریم:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^a \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

که در آن، منظور از $F(-\infty)$، عبارت‌است از $\lim_{A'\to-\infty} F(A')$. خود امکان این محاسبه، یعنی وجود و متناهی بودن حدهای موجود در آن به‌معنای متناهی بودن انتگرال است.

به‌مثال‌های بعدی می‌پردازیم.

۴۷۲. مثال‌ها. ۱) $\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$ $(a>0)$.

چون برای تابع اولیهٔ

$$F(x) = -\frac{a\cdot\sin bx + b\cdot\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-ax}$$

داریم: $F(0) = -\frac{b}{a^2+b^2}$ و $F(\infty) = 0$، بنابراین

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

و به‌همین ترتیب

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{b\cdot\sin bx - a\cdot\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-ax}\Big|_0^{\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

۲) $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)\right]\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

۳) $$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \cos\frac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} = 1$$

۴) $\int_0^{\infty}\sin x\,dx$. تابع اولیه، برابر است با $-\cos x$، ولی محاسبهٔ $(-\cos x)\Big|_0^{\infty}$ دارای معنا نیست، زیرا $\cos x$، به‌ازای $x\to\infty$، به سمت هیچ عدد معینی میل نمی‌کند و، در نتیجه، انتگرال وجود ندارد.

۵) $$\int_0^{\infty}\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^3}dx$$

به‌کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء و تجزیه به کسرهای ساده، تابع اولیه را پیدا می‌کنیم:

$$F(x) = \int\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^3}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\ln(1+x^2) + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-x^2}$$

که‌وقتی $x\to 0$، داریم: $F(0) = \frac{1}{8}$: همین‌مقدار را برای تابع، به‌ازای $x = 0$، می‌گیریم.

از طرف دیگر داریم: $F(\infty) = 0$. به‌این ترتیب، مقدار انتگرال، برابر است با $-\frac{1}{8}$.

۶) هذلولی $xy = 1$، دور محور x دوران کرده است، می‌خواهیم، حجم و سطح

جانبی جسم حاصل را، برای $x \geqslant ۱$ پیدا کنیم.

ابتدا بخشی از جسم را درنظرمی‌گیریم که متناظر با تغییر x، از ۱ تا A $(A>۱)$ باشد؛ حجم و سطح جانبی این بخش، چنین است:

$$V_A=\pi\int_{۱}^{A}\frac{dx}{x^۲},\quad S_A=۲\pi\int_{۱}^{A}\frac{۱}{x}\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۴}}dx$$

طبیعی است که برای محاسبهٔ حجم V و سطح جانبی S تمامی جسم (که تا بی‌نهایت ادامه دارد)، باید حد این مقدارها را به‌دست آورد یعنی

$$V=\pi\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^۲},\quad S=۲\pi\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{x}\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۴}}dx$$

انتگرال اول متقارب است [۴۷۰، ۲)]\و برای حجم جسم، مقدار متناهی π به‌دست می‌آید. انتگرال دوم متباعد است و به‌این معنا است که سطح جانبی جسم، برابر بی‌نهایت می‌شود.

برای این‌که تباعد انتگرال دوم، مشخص شود، کافی است توجه‌کنیم که

$$S_A>۲\pi\int_{۱}^{A}\frac{dx}{x}=۲\pi\ln A$$

و روشن است که S_A، به‌ازای $A\to\infty$، به‌سمت ∞ میل می‌کند.

۷) جرم m درمبداء مختصات O قرار دارد ونقطهٔ مادی به‌جرم واحد واقع برمحور x به‌فاصلهٔ x از O را با نیروی

$$F=\frac{m}{x^۲}$$

(طبق قانون نیوتون) جذب می‌کند. نیروی F، با تغییرمکان M درطول محور x، ازوضع نظیر $x=r$ به‌سمت بی‌نهایت، چه‌کاری را انجام می‌دهد؟

واضح است که‌کار منفی است، زیرانیرو درجهت مخالف حرکت‌است. اگردستور (۹) شمارهٔ ۳۵۳ را در مورد این حالت به‌کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$A=\int_{r}^{\infty}-\frac{m}{x^۲}dx=\frac{m}{x}\Big|_{r}^{\infty}=-\frac{m}{r}$$

اگر تغییر مکان، در جهت عکس، از بی‌نهایت تا فاصلهٔ $x = r$ باشد، نیروی جاذبهٔ نیوتونی، کار مثبت $\frac{m}{r}$ را انجام می‌دهد. این کمیت را، پتانسیل نیروی مورد نظر در نقطهٔ M می‌نامند و به‌عنوان مقیاس انرژی پتانسیلی انباشته در نقطه، به‌کار می‌رود.

۸) برای کار انجام یافته به‌وسیلهٔ گاز، ضمن انبساط آن از حجم V_1 تا حجم V_2 $(V_2 > V_1)$، دستور زیرا را داریم [۳۵۴، (۱۰) را ببینید]:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

فرض کنیم گاز ایده‌آلی، در فشار p_1، حجم V_1 را اشغال کند. و فرض کنیم که حجم گاز بتواند تا بی‌نهایت انبساط یابد و ضمناً به‌صورت بی‌دررو (آدیاباتیک)، یعنی بدون مبادلهٔ گرما در محیط اطراف. در این شرط‌ها، به‌طوری که واضح است [۳۶۱، ۳)]، دستور پواسون را داریم:

$$pV^k = c \quad \left(k = \frac{c_p}{c_v} > 1\right)$$

آن‌وقت، کاری که می‌تواند به‌وسیلهٔ گاز، به‌ازای این انبساط انجام یابد، چنین می‌شود:

$$A_{\max} = \int_{V_1}^{\infty} cV^{-k} dv = \frac{c}{1-k} \cdot \frac{1}{V^{k-1}} \Big|_{V_1}^{\infty} = \frac{c}{k-1} \cdot \frac{1}{V_1^{k-1}}$$

با توجه به این‌که $c = p_1 V_1^k$، با قراردادن آن در دستور حاصل، بالاخره به‌دست می‌آوریم:

$$A_{\max} = \frac{p_1 V_1}{k-1}$$

۹) در مسألهٔ ۸) شمارهٔ ۳۵۶ نیروی F را، که بر واحد «بار مغناطیسی» قطعهٔ مستقیم‌الخط برق عمل می‌کند، به دست آوردیم:

$$F = \int_{s_1}^{s_2} \frac{al}{(a^2+s)^{\frac{3}{2}}} ds$$

حالا حالت‌هادی نامتناهی (در هر دوانتها) را درنظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم $s_1 = -\infty$ و $s_2 = +\infty$، آن‌وقت

$$F=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{al}{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}ds=\frac{l}{a}\cdot\frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2l}{a}$$

روشن است که هادی نامتناهی، تنها یك پندار است، با وجود این، نتیجهٔ حاصل می‌تواند مفید باشد: در حالت هادی بسیار طولانی، بهتر است آن‌را به‌تقریب نامتناهی‌در نظر گرفت، زیرا به‌این ترتیب، کار محاسبه بسیار ساده می‌شود.

۱۰) اگر در مدار الکتریکی با خودالقائی، درلحظهٔ زمان $t=0$، نیروی‌برق I_0 را جاری کنیم، درآن‌صورت، جریان اضافی قطع، تابع قانون

$$I=I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

به‌وجودمی‌آید [۴،۳۵۹]، (a) را ببینید. ما دراین‌جا علامت‌های سابق‌را حفظ‌می‌کنیم]. می‌خواهیم مقدار کامل اثر حرارتی ژول Q، که با این برق تولید می‌شود، محاسبه‌کنیم. مقدار جزئی گرما، در فاصلهٔ زمانی $[t, t+dt]$، به‌روشنی می‌شود:

$$dQ=I^2R\cdot dt$$

که با جمع‌کردن در تمامی بازهٔ نامتناهی، به‌دست می‌آید:

$$Q=\int_0^{\infty}I^2Rdt=RI_0^2\cdot\int_0^{\infty}e^{-\frac{2R}{L}t}dt=\frac{1}{2}LI_0^2$$

به‌این ترتیب، اگرچه جریانی‌که در فاصلهٔ زمانی محدود عبور می‌کند، نامحسوس است، برای تعیین مقدار کامل انرژی برق تبدیل شده به‌گرما، لازم می‌شود انتگرال‌گیری را در فاصله‌ای نامحدود انجام دهیم.

۴۷۳. شباهت با رشته‌ها. قضیه‌های ساده. در آینده، تنها دربارهٔ انتگرال‌های به‌صورت (۱) صحبت می‌کنیم، زیرا آن چه دربارهٔ این انتگرال‌ها گفته شود، می‌توان به‌سادگی در مورد حالت‌های (۲) و (۳) هم به‌کاربرد. ضمناً همیشه فرض ما بر این‌است که‌تابع $f(x)$، بین‌حدهای دلخواه a و $A>a$، انتگرال‌پذیر (به‌معنای ویژهٔ‌خود)می‌باشد و، در نتیجه، بحث تنها به‌انتگرال ناویژه از a تا ∞ مربوط می‌شود.

بین انتگرال‌های ناویژهٔ $\int_a^{\infty}f(x)dx$ و رشته‌های عددی $\sum_1^{\infty}a_n$، رابطهٔ عمیقی وجود داردکه پرداختن به‌آن، خالی از فایده نیست.

اگر فرایند جمع‌کردن نسبت به n را در رشته، با فرایند انتگرال‌گیری نسبت به x مقایسه کنیم، می‌توانیم این تناظرها را برقرار کنیم:

جملهٔ عمومی رشته	تابع زیر انتگرال
a_n	$f(x)$
مجموع جزئی رشته	انتگرال ویژه
$\sum_{1}^{N} a_n$	$\int_a^A f(x)dx$
مجموع رشته	انتگرال ناویژه
$\sum_{1}^{\infty} a_n$	$\int_a^\infty f(x)dx$
به‌عنوان حد مجموع جزئی	به‌عنوان حد انتگرال ویژه
به‌ازای $N \to \infty$	به‌ازای $A \to \infty$
باقی‌ماندهٔ رشته	انتگرال
$\sum_{N+1}^{\infty} a_n$	$\int_A^\infty f(x)dx$

ازقضیه‌های ساده‌ای دربارهٔ انتگرال نام می‌بریم که باقضیه‌های شمارهٔ **۳۶۴** دربارهٔ رشته‌ها، شباهت دارند. اثبات این قضیه‌ها را، که با استفاده از تناظر بالا انجام‌می‌گیرد، به‌خواننده وامی‌گذاریم.

۱°. اگر انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب باشد، درآن‌صورت $\int_A^\infty f(x)dx$ $(A>a)$ هم متقارب می‌شود و برعکس. ضمناً

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^\infty f(x)dx$$

۲°. در حالت تقارب انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ داریم:

$$\lim_{A\to\infty}\int_A^{\infty} f(x)dx = 0$$

۳°. از تقارب انتگرال $\int_a^{\infty} f(x)dx$، تقارب انتگرال

$$\int_a^{\infty} c\cdot f(x)\,dx \quad (c=\text{const.})$$

را می‌توان نتیجه گرفت. ضمناً

$$\int_a^{\infty} c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^{\infty} f(x)dx$$

و بالاخره

۴°. اگر انتگرال‌های $\int_a^{\infty} g(x)dx$ و $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ متقارب باشند، در آن صورت، انتگرال $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx$ هم متقارب می‌شود و

$$\int_a^{\infty}[f(x)\pm g(x)] = \int_a^{\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{\infty} g(x)dx$$

۴۷۴. تقارب انتگرال درحالت تابع مثبت. اگر تابع $f(x)$ مثبت (غیرمنفی) باشد، درآن صورت، انتگرال

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,dx \qquad (۴)$$

تابعی یکنوا (مونوتون) و صعودی از متغیر A می‌شود. براساس قضیه‌های مربوط به‌حد تابع‌های یکنوا [شمارهٔ **۵۷**]:

برای این‌که انتگرال ناویژهٔ (۱)ـ درحالت تابع مثبت $f(x)$ـ متقارب باشد، لازم و کافی است که انتگرال (۴)، با ترقی A، از بالا کران‌دار باشد:

$$\int_a^A f(x)dx \leqslant L \ (L=\text{const.})$$

درحالتی که این شرط برقرار نباشد، انتگرال (۱) دارای مقدار ∞ می‌شود [با **۳۶۵** مقایسه کنید].

«قضیهٔ مقایسه‌ای» زیربرای انتگرال تابع‌های مثبت، برهمین اساس قراردارد:

قضیهٔ ۱. اگر برای $x \geqslant A \ (A \geqslant a)$، نابرابری $f(x) \leqslant g(x)$ برقرار باشد، درآن صورت، از تقارب انتگرال $\int_a^\infty g(x)dx$، تقارب انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ نتیجه می‌شود و همچنین، از تباعد $\int_a^\infty f(x)dx$ تباعد $\int_a^\infty g(x)dx$ را می‌توان نتیجه گرفت.

اثبات را می‌توان کاملاً شبیه اثبات قضیهٔ ۱ شمارهٔ **۳۶۶**، دنبال کرد.

قضیهٔ سودمند زیر، نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱ می‌باشد.

قضیهٔ ۲. اگر حد

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \leqslant K \leqslant \infty)$$

وجود داشته باشد، درآن صورت، از تقارب انتگرال، $\int_a^\infty g(x)dx$، به‌ازای $K < +\infty$ تقارب انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ وازتباعد اولی، به‌ازای $K > 0$ تباعددومی نتیجه می‌شود.

[به این ترتیب، برای $0 < x < +\infty$، هردو انتگرال، به طور هم‌زمان، متقارب یا متباعدند.]

اثبات، شبیه قضیهٔ مشابه ۲ از شمارهٔ **۳۶۶** انجام می‌گیرد [**۴۷۳**، ۳° را ببینید].

با انتخاب تابع معینی برای مقایسه، می‌توان با توجه به این قضیه، معیاری برای تقارب یا تباعد انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ پیداکرد. عملا، درخیلی ازموردها، می‌توان از تابع $\frac{1}{x^\lambda}$، برای مقایسه‌استفاده کرد؛ این‌تابع، از $a > 0$ تا ∞، برای $\lambda > 0$ انتگرال‌پذیر وبرای $\lambda \leqslant 1$ انتگرال‌ناپذیر است. [**۴۷۰**، ۲)]. معیارهای زیر، به وسیلهٔ کوشی، برهمین مبنا ساخته شده‌اند.

فرض کنیم، برای x به‌قدرکافی بزرگ، تابع $f(x)$ به‌صورت

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

باشد، آن‌وقت: ۱) اگر $\lambda > ۱$ و $\varphi(x) \leqslant c < \infty$ باشد، در آن صورت، انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب است؛ ۲) اگر $\lambda \leqslant ۱$ و $\varphi(x) \geqslant c > ۰$ باشد، در آن صورت، این انتگرال متباعد است.

برای اثبات، باید از قضیهٔ ۱ استفاده کرد؛ تابع مقایسه عبارت است از $\frac{c}{x^\lambda}$ [۴۷۳، ۳°].

اگر، به‌ازای $x \to \infty$، تابع $f(x)$ (در مقایسه با $\frac{۱}{x}$)، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ $\lambda > ۰$ باشد، در آن صورت، انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$، متقارب یا متباعد می‌شود، برحسب آن‌که $\lambda > ۱$ یا $\lambda \leqslant ۱$ باشد.

در این‌جا، باید برای اثبات، به‌قضیهٔ ۲ استناد کنیم. $\frac{۱}{x^\lambda}$ نقش تابع $g(x)$ را به‌عهده دارد.

مثال‌ها. ۱) $\int_۰^\infty \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{۱+x^۲}dx$، $\int_۱^\infty \frac{dx}{x\sqrt{۱+x^۲}}$.

عبارت‌های زیرعلامت انتگرال، به‌ازای $x \to \infty$، به‌ترتیب، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ $\frac{۱}{۲}$ و ۲ هستند. درنتیجه، اولی متباعد و دومی متقارب است.

۲) $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx$، که در آن، $P(x)$ یك چندجمله‌ای صحیح از درجهٔ m و $Q(x)$ یك‌چندجمله‌ای صحیح از درجهٔ $n > m$ است که ریشه‌ای در بازهٔ $[a, \infty)$ ندارد.

برای x به‌قدر کافی بزرگ، عبارت زیر انتگرال، علامت معینی را حفظ می‌کند. به‌همین مناسبت (ودرصورت لزوم، با تغییر علامت) می‌توان ازمعیار مذکور در بالا، استفاده کرد. تابع زیر علامت انتگرال (به‌ازای $x \to \infty$)، بی‌نهایت کوچکی است از مرتبهٔ $m - n$، بنابراین انتگرال مفروض، به‌ازای $n = m + ۱$ متباعد و به‌ازای $n \geqslant m + ۲$ متقارب می‌شود (درحالت $n \leqslant m$، تباعد آن روشن است).

۴۷۵. تقارب انتگرال در حالت کلی. مسألهٔ وجود انتگرال ناویژهٔ $\int_a^\infty f(x)dx$،

بنابرتعریف (۱)، به‌مسألهٔ وجود حد متناهی، به‌ازای $A \to \infty$، برای تابع زیر منجر می‌شود:

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx \qquad (۴)$$

با به‌کار بردن معیار بولزانو-کوشی [۵۸] درمورد این تابع، می‌توان شرط وجود انتگرال ناویژه را، به‌صورت زیر تنظیم کرد:

برای تقارب انتگرال ناویژهٔ $\int_a^\infty f(x)dx$*، لازم وکافی است تا، برای هرعدد $\varepsilon>0$، چنان عدد $A_0>a$ وجود داشته باشد تا، به‌ازای $A>A_0$ و $A'>A_0$، داشته باشیم:

$$|\Phi(A')-\Phi(A)| = \left|\int_a^{A'} f(x)\,dx - \int_a^A f(x)\,dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

ازاین معیار، می‌توان برای اثبات گزارهٔ زیر استفاده کرد:

اگر انتگرال $\int_a^\infty f(x)\,dx$ متقارب باشد، درآن صورت*، مسلماً انتگرال

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ هم متقارب خواهد بود.

درواقع، اگرمعیارمذکور را درمورد انتگرال $\int_a^\infty |f(x)|dx$ ـ که طبق فرض متقارب است ـ به‌کاربریم، می‌بینیم که، برای $\varepsilon>0$ دلخواه، چنان $A_0>a$ پیدا می‌شود که نابرابری

$$\int_A^{A'} |f(x)|dx < \varepsilon$$

تنها به‌ازای $A'>A>A_0$ برقرار باشد. ولی معلوم است که

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_A^{A'} |f(x)|dx$$

---

*) بااین فرض که در هربازهٔ $[a, A]$، $A>a$، تابع $f(x)$ دارای انتگرال ویژه باشد.

و درنتیجه، برای همان A و A'، نابرابری زیرهم برقرار است:

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

و ازآن‌جا، با توجه به‌معیار ما، تقارب انتگرال $\int_a^{\infty} f(x)dx$ نتیجه می‌شود.

یادآوری کنیم که، در حالت کلی، نمی‌توان از تقارب انتگرال‌اخیر، تقارب انتگرال $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ را نتیجه گرفت. همین موقعیت به‌ما امکان می‌دهد تاحالت زیر رامشخص کنیم. اگرهمراه‌باانتگرال $\int_a^{\infty} f(x)dx$، انتگرال $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ هم متقارب باشد، درآن‌صورت، انتگرال $\int_a^{\infty} f(x)dx$ را متقارب مطلق و تابع $f(x)$ را انتگرال‌پذیر مطلق، دربازهٔ $[a, \infty)$، گویند. مثال انتگرال متقارب غیرمطلق را، در شمارهٔ بعد، خواهید دید.

وقتی‌که با تابع متناوب $f(x)$ (تابعی که علامت آن در تغییراست) سروکار داشته باشیم، نمی‌توان به‌طور مستقیم از معیار شمارهٔ **۴۷۴** استفاده‌کرد، ولی می‌توان تلاش‌کرد تا، به‌کمک‌آن، تقارب‌انتگرال تابع مثبت $|f(x)|$ راثابت‌کرد: اگراین تابع‌انتگرال‌پذیر باشد، درآن صورت، تابع $f(x)$ هم انتگرال‌پذیر است و، ضمناً، به‌طور مطلق.

ازاین‌جا، می‌توان گزارهٔ زیررا هم نتیجه‌گرفت‌که، اغلب، سودمند است:

اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, +\infty)$، انتگرال‌پذیر مطلق و تابع $g(x)$ کران‌دار باشد، درآن صورت، حاصل‌ضرب آن‌ها $f(x)\cdot g(x)$ هم، تابع انتگرال‌پذیر مطلق، در بازهٔ $[a, +\infty)$ خواهد بود.

برای اثبات، کافی است به‌نابرابری زیراستنادکنیم:

$$|f(x)\cdot g(x)| \leqslant L\cdot|f(x)|$$

مثلاً، انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx$ را در نظر می‌گیریم. در این‌جا، تابع $f(x)=\frac{1}{k^2+x^2}$ انتگرال‌پذیر (مطلق) است و، آن‌وقت چون $g(x)=\cos ax$ به‌روشنی

کران‌دار است، تقارب مطلق انتگرال مفروض، نتیجه می‌شود.

همان‌طور که دیده می‌شود، برای تابع‌های متناوب (متغیر العلامه) ـ در شرایط مساعد ـ تنها می‌توان تقارب مطلق را ثابت کرد. ولی اگر انتگرال تابع مفروض، متباعد یا متقارب غیرمطلق باشد، نمی‌توان به کمک معیارهای موجود، بین آن‌ها فرق گذاشت.

۴۷۶. معیارهای آبل و دیریکله. اکنون به معیارهای دیگری می‌پردازیم که براساس کاربرد قضیهٔ دوم مربوط به مقدارهای میانگین [۳۰۶]، پایه‌گذاری شده‌اند. این معیارها، شبیه معیارهای آبل و دیریکله، دربارهٔ تقارب رشته‌های نامتناهی [۳۸۴] هستند و، به همین مناسبت، آن‌ها را با نام همین دو دانشمند می‌نامیم. این معیارها، به‌ما امکان می‌دهند تا تقارب انتگرال‌های ناویژه را، در یک رشته از حالت‌هایی که با تقارب مطلق سروکار نداریم، مشخص کنیم.

معیار آبل. تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ را، در بازهٔ $[a, \infty)$، معین می‌گیریم و ضمناً

۱) تابع $f(x)$، در این بازه، انتگرال‌پذیر است، به‌نحوی که انتگرال (۱) متقارب باشد (دلو به‌طور غیرمطلق).

۲) تابع $g(x)$، یکنوا و کران‌دار است:

$$|g(x)| \leqslant L \quad (L = \text{const.}\ a < x < \infty)$$

در این صورت، انتگرال زیر متقارب می‌شود

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx \qquad (۵)$$

اثبات. با توجه به قضیهٔ دوم مربوط به مقدارهای میانگین، به‌ازای $A' > A > a$، دلخواه، داریم:

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int_A^{\xi} f(x)dx + g(A')\int_{\xi}^{A'} f(x)dx \qquad (۶)$$

که در آن $A \leqslant \xi \leqslant A'$. با توجه به فرض ۱)، برای $\varepsilon > 0$ مفروض دلخواه، چنان $A_0 > a$ پیدا می‌شود که، برای $A > A_0$، داشته باشیم:

$$\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

که در ارتباط با ۲)، برای $A' > A > A_0$، خواهیم داشت:

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| \leqslant g(A)\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right| + g(A')\cdot\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)dx\right| <$$

$$< L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} + L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon$$

که به‌معنای تقارب انتگرال (۵) است [۴۷۵].

می‌توان برای $f(x)$ و $g(x)$، ترکیب دیگری از شرط‌ها را در نظر گرفت تا، به‌ازای آن‌ها، انتگرال حاصل‌ضرب این دو تابع، متقارب شود:

معیار دیریکله. فرض می‌کنیم

۱) تابع $f(x)$، در بازهٔ متناهی دلخواه $[a, A]$ $(A>a)$ انتگرال‌پذیر، وانتگرال (۴) کران‌دار باشد:

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right| \leqslant K \quad (K=\text{const};\quad a\leqslant A<\infty)$$

۲) تابع $g(x)$، به‌ازای $x\to\infty$، به‌طور یکنوا به‌سمت صفر میل کند:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

در این‌صورت، انتگرال (۵) متقارب است.

[همان‌طور که می‌بینید، شرط قبلی ۱) تا حدی ضعیف‌تر شده است، زیرا در این‌جا، به تقارب انتگرال (۱) کاری نداریم؛ در عوض، به جای شرط ۲)، شرط قوی‌تری آمده است.]

اثبات. می‌توان مثل حالت قبل، و با شروع از برابری (۶)، آغاز کرد. ولی در این‌جا، می‌توان عامل‌های اول $g(A)$ و $g(A')$ را به‌دلخواه کوچك گرفت (به‌شرطی که A و A' به‌قدرکافی بزرگ و عامل‌های دوم را کران‌دار با عدد $2K$، بگیریم).

یادداشت. دراین‌جاهم، می‌توان معیار آبل را ازمعیار دیریکله نتیجه گرفت. درواقع، برای تابع یکنوای کران‌دار $g(x)$، الزاماً، حد متناهی وجود دارد:

$$g(\infty) = \lim_{x\to\infty} g(x)$$

اگر $f(x)\cdot g(x)$ را به‌این‌صورت تبدیل کنیم:

$$f(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot g(\infty) + f(x)[g(x)-g(\infty)]$$

می‌بینیم که برای حاصل‌ضرب دوم، شرط‌های دیریکله برقرارند [۴۷۳، ۳° و ۴° را ببینید]. مثلاً، به‌آسانی دیده می‌شود که، به‌ازای $\lambda > 0$، انتگرال‌های

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}} dx \quad \text{و} \quad \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\lambda}} dx \quad (a > 0)$$

متقارب‌اند. با استفاده از معیار دیریکله، فرض می‌کنیم $f(x) = \sin x$ یا $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$. شرط‌های ۱) و ۲) برقرارند، زیرا

$$\left| \int_a^A \sin x dx \right| = |\cos a - \cos A| \leqslant 2; \quad \left| \int_a^A \cos x dx \right| \leqslant 2$$

و تابع $\frac{1}{x^{\lambda}}$، وقتی $x \to \infty$، به‌طور یکنوا و نزولی، به‌سمت ۰ میل می‌کند.

از همین‌جا، می‌توان نتیجه گرفت که در حالت خاص $\lambda = 1$، انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

متقارب‌است (از این‌جهت توانستیم $a = 0$ بگیریم، که تابع زیرانتگرال، به‌ازای $x \to 0$، دارای حد متناهی است). می‌توان روشن کرد که این انتگرال، متقارب غیرمطلق است، یعنی انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

متباعد است. در واقع، اگر این انتگرال متقارب باشد، درآن‌صورت، با توجه به‌قضیهٔ ۱ شمارهٔ ۴۷۴، انتگرال

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \quad (a > 0)$$

هم باید متقارب باشد، زیرا $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$. در نتیجه، باید انتگرال

$$\frac{1}{2} \int_a^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx$$

و با اضافه‌کردن، انتگرال آشکارا متقارب

$$\frac{1}{2}\int_a^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$$

به‌آن، انتگرال

$$\frac{1}{2}\int_a^{\infty}\frac{dx}{x}$$

متقارب باشد، که درست نیست [۴۷۰، ۲)].

یادداشت. اکنون که تقارب انتگرال‌های

$$\int_a^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx, \quad \int_a^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$$

را ثابت‌کردیم، می‌توانیم تعریف تابع‌های غیرمقدماتی $\mathrm{si}\,x$ («سینوس‌انتگرالی») و $\mathrm{ci}\,x$ («کسینوس انتگرالی») را ــ کـه دربارهٔ آن‌هـا در شمارهٔ **۲۸۹** یادی کردیم ــ بدهیم. فرض می‌شود:

$$\mathrm{si}\,x=-\int_{x}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt, \quad \mathrm{ci}\,x=-\int_{x}^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$
$$(x\geqslant 0) \qquad (x>0)$$

اگر مثلاً، رابطهٔ دوم را به‌صورت

$$\mathrm{ci}\,x=-\int_{1}^{x}\frac{\cos t}{t}dt-\int_{1}^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$

بنویسیم، آن‌وقت، بنابرویژگی معلوم انتگرال معین [۳۰۵، ۱۲°]، روشن می‌شود که‌مشتق $\mathrm{ci}\,x$ برابر است با $\frac{\cos x}{x}$.

۴۷۷. تبدیل انتگرال ناویژه به‌رشتهٔ نامتناهی. می‌دانیم که مفهوم حدتابع را، به‌دو طریق می‌توان تعریف کرد: «به زبان $\varepsilon-\delta$» و «به‌زبان دنباله‌ها» [**۵۲** و **۵۳**]. اگر تعریف دوم حدرا، برای تابع $\Phi(A)$ [(۴) را ببینید]به‌کاربریم، در آن‌صورت می‌توان (۱) انتگرال‌ناویژه را، این‌طور تفسیر کرد: دنبالهٔ عددهای $\{A_n\}(A_n>a)$ ــ که تا بی‌نهایت صعود می‌کند ــ هر طورانتخاب شود، دنبالهٔ انتگرال‌های $\left\{\int_a^{A_n}f(x)dx\right\}$، بایدبه‌سمت

یك و تنها یك‌حد میل کنند*؛ و این‌حد، همان مقدار انتگرال نامتناهی $\int_a^{\infty} f(x)dx$ است.

از طرف دیگر، مسالهٔ مربوط به حد دنبالهٔ $\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$، همان مسالهٔ مربوط به‌جمع رشته است [۳۶۲]:

$$\int_a^{A_1} + \left\{\int_A^{A_2} - \int_a^{A_1}\right\} + \left\{\int_A^{A_3} - \int_a^{A_2}\right\} + \cdots$$

$$\cdots = \int_a^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \int_{A_2}^{A_3} + \cdots$$

بـه این ترتیب می‌تـوان گفت: شرط لازم و کافی، بـرای وجـود انتگرال ناویـژهٔ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ این است‌که، برای واریانت دلخواه $A_n \to \infty$ $(A_n > a)$، رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx \quad (A_0 = a)$$

به‌سمت یك و تنها یك حد میل کند؛ و همین حد یگانه، مقدار انتگرال ناویژه خواهد بود.

توجه‌کنیم که درحالت تابع مثبت (غیرمنفی) $f(x)$، برای‌وجود انتگرال، کافی‌است که رشتهٔ مفروض، با یك انتخاب خاص واریانت $A_n \to \infty$، متقارب باشد. در واقع، در این‌صورت، تابع صعودی (۴) ــ نسبت‌به A ــ به‌وسیلهٔ مجموع این‌رشته، کران‌دار می‌شود و، در نتیجه، به‌ازای $A \to \infty$، دارای حد متناهی است [۴۷۴].

منجر کردن مسالهٔ مربوط به‌تقارب‌انتگرال‌ها به‌مسأله مربوط‌به تقارب‌رشته‌ها، اغلب مفید است، زیرا امکان استفاده ازبیشتر معیارهای تقارب یاتباعد رشته‌ها را فراهم می‌کند.

به‌عنوان مثال، دوباره، انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ را در نظر می‌گیریم (که در شمارهٔ پیش هم، دربارهٔ آن، صحبت‌کرده بودیم).

---

*) کافی است فرض شود که همهٔ دنباله‌های $\left\{\int_a^{A_n} f(x)dx\right\}$ متقاربند تا، از آن‌جا، بتوان نتیجه گرفت‌که حد آن‌ها، یکی است [۵۳].

چون $\sin x$، به‌ازای xهای صعودی، با عوض کردن علامت در نقطه‌های $n\pi$ $(n=1, 2, 3, \dots)$، گاهی مقدارهای مثبت و گاهی مقدارهای منفی را اختیار می‌کند طبیعی است که درست همین عددها را، به‌عنوان A_n، در نظر بگیریم و رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx \qquad (۷)$$

را مورد بررسی قرار دهیم.

اگر تغییر متغیر $x=n\pi+t$ را در جملهٔ عمومی $v_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx$ انجام دهیم، به‌دست می‌آید:

$$v_n=(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}dt$$

ازاین‌جا دیده می‌شود که جمله‌های رشته، دارای علامت‌های متناوب و، از لحاظ قدرمطلق، به‌طور یکنوا نزولی است، به‌ازای $n>0$

$$|v_n|=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}dt<\frac{1}{n\pi}dt=\frac{1}{n}$$

و، درنتیجه، قدرمطلق جمله‌های رشته، با بزرگ‌شدن شمارهٔ آن‌ها، به‌سمت صفر میل می‌کند. رشتهٔ (۷)، از گونهٔ لایب نیتسی و با توجه به‌قضیهٔ معلوم [۳۸۱] متقارب می‌شود. مجموع آن‌را I می‌نامیم. به‌این ترتیب، برای $\varepsilon>0$ غیرمشخص، می‌توان N را طوری پیدا کرد که، به‌ازای $n\geqslant N$، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$\left|\int_0^{n\pi}\frac{\sin x}{x}dx-I\right|<\varepsilon \qquad (۸)$$

حالا، دیگر اثبات وجود انتگرال «به‌زبان $\varepsilon-\delta$» ساده‌تر است. فرض کنیم $A>N\pi$، آن‌وقت، چنان عدد طبیعی n_0 وجود دارد که داشته باشیم: $n_0\pi\leqslant A<(n_0+1)\pi$؛ ضمناً، واضح است که $n_0\geqslant N$. چون تابع $\sin x$، در بازهٔ $n_0\pi$ تا $(n_0+1)\pi$ تغییر علامت نمی‌دهد، بنابراین، انتگرال $\int_0^A$ بین انتگرال‌های $\int_0^{n_0\pi}$ و $\int_0^{(n_0+1)\pi}$ واقع می‌شود، که هر کدام

آن‌ها، بنابر (۸)، بین $I-\varepsilon$ و $I+\varepsilon$ قرار دارند؛ در نتیجه، همین وضع هم برای $\int_0^A$ وجود خواهد داشت. به‌این ترتیب، بالاخره، برای $A>N\pi$، داریم:

$$\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx - I\right| < \varepsilon$$

به‌طوری‌که انتگرال زیر وجود دارد:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx = I^*$$

می‌دانیم، این انتگرال متقارب غیرمطلق است، یعنی انتگرال $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ متباعد است. این واقعیت را، با تبدیل انتگرال به‌صورت رشته هم، می‌توان به‌سادگی ثابت کرد. در واقع، اگر این انتگرال متقارب باشد، باید داشته باشیم:

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi+t}dt$$

ولی $n\pi+t\leqslant(n+1)\pi$، به‌طوری‌که

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi+t}dt \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\cdot\int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

در حالی‌که رشتهٔ $\frac{2}{\pi}\sum\frac{1}{n+1}$ متباعد است [۳۶۵، ۱)].

۴۷۸. مثال‌ها. ۱) تقارب این انتگرال‌ها را بررسی کنید:

(a) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc}tg\,x}{x}dx$, (b) $\int_{z_0}^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-a)(z-b)}}$ $(z_0>a>b>0)$

(c) $\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$, (d) $\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}$

---

*) در این‌جاهم (مثل شمارهٔ پیش)، تنها به‌مسالهٔ تقارب این انتگرال علاقه داریم، به‌زودی خواهیم دید که $I=\frac{\pi}{2}$.

(a) تابع زیر علامت انتگرال، به‌ازای $x \to \infty$، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ اول می‌شود؛ انتگرال متباعد است.

(b) بی‌نهایت کوچك از مرتبهٔ $\frac{۳}{۲}$ است؛ انتگرال متقارب است.

(c) به‌ازای $x \to ۰$، تابع زیر علامت انتگرال به‌سمت صفر میل می‌کند. با بسط به‌صورت رشته، می‌بینیم که عبارت

$$e^{-\frac{a^۲}{x^۲}} - e^{-\frac{b^۲}{x^۲}} = \frac{b^۲ - a^۲}{x^۲} + \dots$$

به‌ازای $x \to +\infty$، بی‌نهایت کوچك مرتبه دوم می‌شود: انتگرال متقارب است.

(d) با بسط $e^{\pm x}$ به‌رشته، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{۱}{۲} = -\frac{x^۲}{۱۲} + \dots$$

به‌طوری‌که، وقتی $x \to ۰$، عبارت زیر انتگرال به‌سمت $-\frac{۱}{۱۲}$ میل می‌کند و در نتیجه، به‌ازای $x \to \infty$، بی‌نهایت کوچك مرتبهٔ دوم می‌شود: انتگرال متقارب است.

۲) همچنین، تقارب این انتگرال‌ها را بررسی کنید:

$$\text{(a)} \int_a^\infty x^\mu . e^{-ax} dx \quad (\mu, a > ۰); \qquad \text{(b)} \int_۰^\infty \frac{x dx}{\sqrt{e^{۲x} - ۱}};$$

$$\text{(c)} \int_۱^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^۲ - ۱}} dx$$

حل. (a) با اختیار $\lambda > ۱$ دلخواه، داریم:

$$\frac{x^\mu . e^{-ax}}{\frac{۱}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda+\mu}}{e^{ax}} \to ۰$$

انتگرال، متقارب است.

(b) ابتدا ملاحظه می‌کنیم که تابع زیر انتگرال، به‌ازای $x \to ۰$، به‌سمت صفر میل می‌کند اکنون دوباره $\lambda > ۱$ دلخواه را در نظر می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{\sqrt{e^{۲x}-۱}}:\frac{۱}{x^{\lambda}}=\frac{۱}{\sqrt{e^{۲x}.x^{-(۲\lambda+۲)}-x^{-(۲\lambda+۲)}}}\to ۰ \quad (x\to\infty \text{ به‌ازای})$$

انتگرال متقارب است.

(c) به‌ازای $x\to ۱$، تابع زیر انتگرال، دارای حد ۰ است. $۲>\lambda>۱$ می‌گیریم، آن‌وقت، نسبت این تابع به $\frac{۱}{x^{\lambda}}$ را می‌توان نوشت:

$$\frac{x^{\lambda}.\ln x}{x\sqrt{x^{۲}-۱}}=\frac{\ln x}{x^{۲-\lambda}}.\frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{۱}{x^{۲}}}}\to ۰ \quad (x\to\infty \text{ به‌ازای})$$

انتگرال متقارب است.

۳) و نیز برای انتگرال‌های

$$\text{(a)}\ \int_{۰}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}dx\ (a>۰);\quad \text{(b)}\ \int_{۰}^{\infty}x^{\mu}.e^{-ax}.\cos x dx\ (\mu, a>۰)$$

راهنمائی. در هر دو حالت، با حاصل‌ضرب یك تابع کران‌دار در تابع دیگر انتگرال‌پذیر (مطلق)، سر و کار داریم.

۴) تقارب این انتگرال را بررسی کنید ($\alpha>۰$):

$$\int_{۱}^{\infty}dx\int_{۰}^{\alpha}\sin(\beta^{۲}x^{۳})d\beta=\int_{۱}^{\infty}\left\{\int_{۰}^{\alpha}\sin(\beta^{۲}x^{۳})d\beta\right\}dx^{*}$$

می‌کوشیم مرتبهٔ نزول انتگرال «درونی» را، به‌ازای $x\to\infty$، برآورد کنیم. اگر $z=\beta^{۲}x^{۳}$ فرض کنیم، داریم:

$$\int_{۰}^{\alpha}\sin(\beta^{۲}x^{۳})d\beta=\frac{۱}{۲x^{\frac{۳}{۲}}}\int_{۰}^{\alpha^{۲}x^{۳}}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}dz$$

که، با توجه به‌تقارب انتگرال $\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}dz$ [۴۷۶]، می‌توان ثابت L را طوری پیدا کرد که به‌ازای هر $A>۰$ داشته باشیم:

*) در این‌جا، بدون اثبات می‌پذیریم که انتگرال «درونی»، تابعی پیوسته از x است.

$$\left|\int_{0}^{A}\frac{\sin z}{\sqrt{z}}dz\right|<L$$

بنابراین، انتگرال $\int_{0}^{\alpha}\sin(\beta^{2}x^{3})d\beta$، از لحاظ قدرمطلق، از عبارت $\frac{L}{x^{\frac{3}{2}}}$ تجاوز نمی‌کند.

از این‌جا، تقارب مطلق انتگرال مفروض، نتیجه می‌شود.

۵) تقارب این انتگرال‌ها را ثابت کنید ($a, k, \lambda>0$):

$$\text{(a)}\ \int_{0}^{\infty}\frac{x\cdot\sin ax}{k^{2}+x^{2}}dx;\quad \text{(b)}\ \int_{0}^{\infty}e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^{\lambda}}dx;$$

$$\text{(c)}\ \int_{a}^{\infty}|\ln x|^{\lambda}\cdot\frac{\sin x}{x}dx;\quad \text{(b)}\ \int_{0}^{\infty}\frac{\sin(x+x^{2})}{x^{\lambda}}dx$$

حل. در همهٔ حالت‌ها، از معیار دیریکله استفاده می‌کنیم.

(a) $g(x)=\frac{x}{k^{2}+x^{2}}$، برای xهای به‌قدرکافی بزرگ، به‌طوریکنوانزول‌می‌کند و، به ازای $x\to\infty$، بـه سمت صفر میل می‌کند؛ انتگرال $\int_{0}^{A}\sin(ax)dx$ هم، آشکارا کران‌دار است.

(b) $g(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}$، نزولی یکنوا، بـه‌ازای $x\to\infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند، و برای $f(x)=e^{\sin x}\cdot\sin 2x$ (اگر قرار دهیم $\sin x=t$) داریم:

$$\left|\int_{0}^{A}f(x)dx\right|=2\left|\int_{0}^{\sin A}te^{t}dt\right|<2e$$

(c) دربازهٔ $g(x)=|\ln x|^{\lambda}\cdot\frac{1}{x}$، برای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ x، داریم:

$$g'(x)=\frac{(\ln x)^{\lambda-1}}{x^{2}}(\lambda-\ln x)<0$$

به‌نحوی که $g(x)$ نزولی است و، به‌روشنی، به‌سمت صفر میل می‌کند و ...

(d) $g(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}$ و $f(x)=\sin(x+x^{2})$، به‌نحوی که (با گذاشتن $z=x+x^{2}$):

$$\int_a^A \sin(x+x^2)dx = \int_{a+a^2}^{A+A^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}}dz$$

این عبارت، با توجه به‌متقارب بودن انتگرال $\int_{a+a^2}^{\infty} \frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}}dz$ (که با همان معیار دیریکله، می‌توان آن‌را ثابت کرد)، از لحاظ قدرمطلق، کران‌دار می‌ماند.

۶) حکم زیر را ثابت کنید:

فرض کنیم، تابع $f(x)$، در بـازهٔ $[a, +\infty)$، معین و دارای دورهٔ تناوب $\omega > 0$ باشد؛ تابع $g(x)$ هم، در همان بازه، یکنوا و، به‌ازای $x \to \infty$، به‌سمت صفر میل‌می‌کند اگر انتگرال (ویژهٔ)

$$\int_a^{a+\omega} f(x)dx = 0 \qquad (۹)$$

در آن‌صورت، انتگرال (ناویژهٔ)

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx \qquad (۵)$$

متقارب می‌شود. و اگر برعکس داشته باشیم:

$$\int_a^{a+\omega} f(x)dx = K \neq 0 \qquad (۹^*)$$

در آن‌صورت، انتگرال (۵)، بسته به‌این‌که انتگرال

$$\int_a^{\infty} g(x)dx \qquad (۱۰)$$

متقارب یا متباعد باشد، متقارب یا متباعد می‌شود.

(a) ابتدا فرض می‌کنیم، شرط (۹) برقرار باشد و ثابت می‌کنیم که، در این‌حالت، انتگرال

$$\int_a^A f(x)dx$$

برای هر $A > a$، کران‌دار می‌ماند.

با توجه به ۳۱۴، ۱۰) و یادداشت مربوط به ۳۱۶، معلوم است که

$$\int_a^{a+k\omega} f(x)dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

و آن‌وقت، هرچه باشد $A > a$، اگر فرض کنیم $k = E\left(\frac{A-a}{\omega}\right)$، خواهیم داشت:

$$\left|\int_a^A f(x)dx\right| = \left|\int_{A+k\omega}^{A}\right| = \left|\int_a^{A-k\omega}\right| \leqslant \int_a^{a+\omega} |f(x)|dx = L$$

و نتیجه‌گیری مطلوب، مستقیماً از معیار دیریکله به‌دست می‌آید.

(b) در فرض (۹*)، $f(x)$ را به $f(x) - \frac{K}{\omega}$ تبدیل می‌کنیم. چون این تابع در شرطی از نوع (۹) صدق می‌کند، در آن‌صورت، انتگرال

$$\int_a^{\infty} \left(f(x) - \frac{1}{\omega}K\right)g(x)dx \qquad (5^*)$$

بنابر آن‌چه ثابت شد، متقارب می‌شود. از همین‌جا روشن است که انتگرال‌های (۵) و (۱۰)، به‌طور هم‌زمان، متقارب یا متباعدند.

۷) اگر مثلاً $f(x) = \sin^2 x$ در بازهٔ $[0, +\infty)$ و $\omega = \pi$ فرض کنیم، در آن‌صورت می‌بینیم که انتگرال

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

و در نتیجه، انتگرال

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x \cdot g(x)dx$$

(با توجه به فرض‌های سابق نسبت به $g(x)$)، هم‌زمان با انتگرال (۱۰)، متقارب یا متباعد است.

برعکس، انتگرال

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \sin^2 x\right)g(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \cos 2x \cdot g(x)dx$$

در همهٔ حالت‌ها و مستقل از رفتار انتگرال (۱۰) متقارب است.

۸) تقارب این انتگرال‌ها را بررسی کنید:

$$\text{(a)}\ \int_0^{\infty} e^{\cos x}\cdot\sin(\sin x)\frac{dx}{x},\quad \text{(b)}\ \int_0^{\infty} e^{\sin x}\cdot\sin(\sin x)\frac{dx}{x}$$

(a) داریم:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cdot\sin(\sin x)dx=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}=0$$

زیرا، دو انتگرال اخیر، تنها در علامت باهم متفاوتند (جای‌گذاری $z=2\pi-x$)؛ بنابر ۶)، انتگرال (a) متقارب است.

(b). این‌بار داریم:

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin x}\cdot\sin(\sin x)dx>0$$

به‌نحوی که [۶) را ببینید]، با توجه به‌تباعد انتگرال

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{x}\quad (a>0)$$

انتگرال (b) هم متباعد می‌شود.

۹) مطلوب است بررسی انتگرال

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\mu}+\sin x}dx$$

از لحاظ تقارب، در رابطه با مقدارهای پارامتر $\mu>0$.

اتحاد زیر روشن است:

$$\frac{\sin x}{x^{\mu}+\sin x}=\frac{\sin x}{x^{\mu}}-\frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu}+\sin x)}$$

انتگرال جملهٔ اول سمت راست

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\mu}}dx$$

به‌طوری که می‌دانیم [۴۷۶]، همواره متقارب است. به‌انتگرال جملهٔ دوم سمت راست

می‌پردازیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu}+\sin x)}dx \qquad (11)$$

چون

$$\frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu}+1)} < \frac{\sin^2 x}{x^{\mu}(x^{\mu}+\sin x)} < \frac{1}{x^{\mu}(x^{\mu}-1)},$$

پس، به ازای $\mu > \frac{1}{2}$، انتگرال عبارت سمت‌راست و، همراه با آن، انتگرال (۱۱) متقارب می‌شود. به‌ازای $\mu \leqslant \frac{1}{2}$، عبارت سمت چپ را درنظر می‌گیریم؛ انتگرال آن، بنابر ۷)، مثل انتگرال

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\mu}(x^{\mu}+1)} \quad (a>0)$$

رفتار می‌کند و چون انتگرال اخیر متباعد است، همراه با آن، انتگرال (۱۱) هم متباعد می‌شود. بالاخره، انتگرال مفروض، به‌ازای $\mu > \frac{1}{2}$ متقارب و به‌ازای $\mu \leqslant \frac{1}{2}$ متباعد است.

مقایسهٔ حالت $\mu \leqslant \frac{1}{2}$ این مثال با معیار دیریکله، آموزنده است: انتگرال عامل اول $\sin x$ کران‌دار است و، درعین‌حال، عامل دوم

$$\frac{1}{x^{\mu}+\sin x}$$

به‌ازای $x \to 0$، به‌سمت صفر میل می‌کند؛ تنها شرط یکنوائی این عامل وجود ندارد و، به‌همین جهت، انتگرال مفروض، متباعد می‌شود.

۱۰) این انتگرال را، ازنظر تقارب، بررسی کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}\,dx}{1+x^{\beta}\sin^2 x}$$

(در ارتباط با مقدار پارامترهای $\alpha, \beta > 0$).

اگر تابع زیرانتگرال را $f(x)$ بنامیم، با تغییر x بین $n\pi$ و $(n+1)\pi$، خواهیم

داشت:

$$\frac{(n\pi)^{\alpha}}{1+[(n+1)\pi]^{\beta}\sin^{2}x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{[(n+1)\pi]^{\alpha}}{1+(n\pi)^{\beta}\sin^{2}x}$$

که اگر از این نابرابری، با توجه به‌این‌که

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+A\sin^{2}x}=\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+A\sin^{2}x}=\frac{\pi}{\sqrt{1+A}}\quad(12)$$

انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{n^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^{\beta}\pi^{\beta}}}\leqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(x)\,dx\leqslant\frac{(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^{\beta}\pi^{\beta}}}$$

اکنون، نسبت به n، از ۰ تا ∞ جمع می‌کنیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^{\beta}\pi^{\beta}}}\leqslant\int_{0}^{\infty}f(x)\,dx\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^{\beta}\pi^{\beta}}}$$

وچون هردو رشتهٔ دوطرف، به‌طور هم‌زمان، با رشتهٔ

$$\sum_{0}^{\infty}n^{\alpha-\frac{1}{2}\beta}$$

متقارب یا متباعد می‌شوند، بنابراین، همین حکم، برای انتگرال مفروض هم درست‌است.

به این ترتیب، انتگرال مفروض، به‌ازای $\beta>2(\alpha+1)$ متقارب و به ازای $\beta\leqslant2(\alpha+1)$ متباعد است.

۱۱) همان پرسش مسألهٔ قبلی، دربارهٔ انتگرال

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{\alpha}dx}{1+x^{\beta}|\sin x|}\quad(\alpha,\beta>0)$$

روش بحث، کاملا شبیه مثال قبل‌است. به‌جای انتگرال (۱۲)، دراین‌جا بایدانتگرال زیررا درنظر بگیریم [۲۸۸، ۱۴] را ببینید]:

$$\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+A\sin x}=2\frac{\ln(A+\sqrt{A^{2}-1})}{\sqrt{A^{2}-1}}\quad(A>1)$$

*) این را، می‌توان به‌سادگی، از ۲۸۸، ۱۰) یا ۳۰۹، ۹) نتیجه گرفت.

چون به‌ازای $A \to \infty$

$$\frac{\ln(A+\sqrt{A^2-1})}{\sqrt{A^2-1}} : \frac{\ln A}{A} \to 1$$

بنابراین کافی است انتگرال مفروض را با رشته‌های

$$\sum_1^\infty n^\alpha . \frac{\ln(n+1)^\beta}{(n+1)^\beta} \quad \text{و} \quad \sum_1^\infty (n+1)^\alpha . \frac{\ln n^\beta}{n^\beta}$$

و درنتیجه، با رشتهٔ

$$\sum_2^\infty \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}}$$

مقایسه کنیم.

جواب: انتگرال مفروض به ازای $\beta > \alpha+1$ متقارب و به ازای $\beta \leqslant \alpha+1$ متباعد است.

مثال‌های ۶)، ۷)، ۹)، ۱۰) و ۱۱)، به‌هاردی (G. H. Hardy) تعلق دارند.

۱۲) دربارهٔ تقارب و تباعد انتگرال

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha |\sin x|^\beta}$$

برحسب مقدار پارامترهای α و β $(\alpha, \beta > 0)$ بحث کنید.

(a) فرض می‌کنیم $\alpha \leqslant 1$. چون

$$\frac{1}{1+x^\alpha . |\sin x|^\beta} \geqslant \frac{1}{1+x^\alpha}$$

بنابراین، دراین حالت، انتگرال متباعد است [۴۷۴].

(b). فرض می‌کنیم $\beta \leqslant \alpha$، اگر به‌رشتهٔ [۴۷۷] عبور کنیم، داریم:

$$\sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^\alpha . |\sin x|^\beta} =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{dz}{1+(n\pi+z)^\alpha . \sin^\beta z} \geqslant \sum_{n=0}^\infty \int_0^{\frac{1}{(n+1)\pi}}$$

ولی برای $0<z<\frac{1}{(n+1)\pi}$، داریم:

$$(n\pi+z)^{\alpha}\cdot\sin^{\beta}z<(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha}z^{\beta}<(n+1)^{\beta}\pi^{\beta}\cdot\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)^{\beta}=1$$

به‌طوری‌که جمله‌های رشتهٔ اخیر، ازجمله‌های نظیر رشتهٔ متباعد

$$\frac{1}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

بزرگتر می‌شود. انتگرال مفروض، دراین حالت هم متباعد است.

(c). فرض کنیم $\alpha>\beta>1$. J_1+J_2 را به‌صورت نشان می‌دهیم، که در آن

$$J_1=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{1+(n\pi+z)^{\alpha}\cdot\sin^{\beta}z},\quad J_2=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{1+(n\pi-z)^{\alpha}\sin^{\beta}z}$$

سپس، برای $0<z<\frac{\pi}{2}$ و $n\geqslant 1$

$$(n\pi+z)^{\alpha}\cdot\sin^{\beta}z\geqslant(n\pi)^{\alpha}\left(\frac{2}{\pi}z\right)^{\beta}=n^{\alpha}c^{\beta}z^{\beta}\quad\left(c=2\pi^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\right)$$

ازآن‌جا

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{1+(n\pi+z)^{\alpha}\cdot\sin^{\beta}z}\leqslant\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{1+n^{\alpha}c^{\beta}z^{\beta}}=$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot c}\int_{0}^{n^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot c\cdot\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+t^{\beta}}\leqslant\frac{c^{*}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\quad\left(c^{*}=\frac{1}{c}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{1+t^{\beta}}\right)$$

بنابراین

$$J_1\leqslant\frac{\pi}{2}+c^{*}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}<\infty$$

وبه‌همین‌ترتیب، ثابت می‌شود $J_2<\infty$. انتگرال مفروض، دراین حالت، متقارب است.

(d). حالت کلی هم، وقتی‌که $\alpha>1$ و $\alpha>\beta$ باشد، به حالت $\alpha>\beta>1$ منجر می‌شود. درواقع، دراین‌حالت، چنان $\beta'\geqslant\beta$ پیدا می‌شود که داشته باشیم: $\alpha>\beta'>1$، وچون، باکوچکترشدن β، تقارب تقویت‌می‌شود، بنابراین، دراین‌حالت‌کلی هم،انتگرال

مفروض، متقارب است.

اگر همهٔ بحث را خلاصه کنیم، می‌بینیم که، انتگرال J، با توجه به‌شرط‌های هم‌زمان $\alpha>-1$ و $\alpha>\beta$، متقارب و برای سایر حالت‌ها متباعد است. به‌طور خلاصه می‌توان گفت: اگر $\alpha>\max(-1,\beta)$ باشد، انتگرال متقارب و اگر $\alpha\leqslant\max(-1,\beta)$ باشد، انتگرال متباعد است.

§۲. انتگرال ناویژه از تابع بی‌کران

۴۷۹. تعریف انتگرال تابع بی‌کران. تابع $f(x)$ را در بازهٔ متناهی $[a,b]$ در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که $f(x)$ در این بازه، کران‌دار نباشد. ضمناً فرض می‌کنیم، این تابع، در بازهٔ دلخواه $[a,b-\eta)$ $(0<\eta<b-a)$ کران‌دار و انتگرال‌پذیر، ولی در هر بازهٔ $[b-\eta,b]$ (سمت‌چپ نقطهٔ b)، بی‌کران باشد. نقطهٔ b را، در این حالت، نقطهٔ خاص گویند.

حد (متناهی یا نامتناهی) انتگرال $\int_a^{b-\eta}f(x)dx$ وقتی $\eta\to 0$ ـ انتگرال (ناویژهٔ) تابع $f(x)$ از a تا b، خوانده می‌شود و، طبق معمول، این‌طور معرفی می‌شود:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta}f(x)dx \qquad (1)$$

وقتی که این حد متناهی باشد، گویند انتگرال (۱) متقارب و تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a,b]$، انتگرال‌پذیر است. در حالتی هم که حد (۱) نامتناهی باشد و یا اصلاً[۴] وجود نداشته باشد، انتگرال را متباعد گویند.

مثال. ۱) تابع $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، در بازهٔ دلخواه $[0,1-\eta]$، $(0<\eta<1)$، کران‌دار و انتگرال‌پذیر است و

$$\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^{1-\eta}=\arcsin(1-\eta)$$

تابع، در نقطهٔ $x=1$، بی‌نهایت می‌شود. منظور ما از این موقعیت این است که، به‌ازای $x\to 1$، تابع $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. روشن است که تابع، در بازهٔ دلخواه $(0,1-\eta)$، بی‌کران است، یعنی نقطهٔ $x=1$، نقطهٔ خاص تابع است. در عمل،

بسیار پیش می‌آید که، درست، باهمین نوع نقطه‌ها، سروکار پیدا می‌کنیم.

چون انتگرال ما، به‌ازای $\eta \to 0$، به‌سمت حد $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ میل می‌کند، بنابراین، انتگرال ناویژه وجود دارد:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \to 0} \int_0^{1-\eta} = \frac{\pi}{2}$$

اکنون فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در هر بازهٔ $[a+\eta', b]$ $(0<\eta'<b-a)$، کران‌دار و انتگرال‌پذیر، ولی در هر بازهٔ $[a, a+\eta']$ (سمت راست نقطهٔ a، نقطهٔ خاص)، بی‌کران باشد. دراین‌صورت، انتگرال (ناویژهٔ) تابع $f(x)$، از a تا b، با این برابری تعریف می‌شود:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta' \to 0} \int_{a+\eta'}^b f(x)\,dx \qquad (۲)$$

درحالت کلی، ممکن است در بازهٔ $[a, b]$، به‌تعداد متناهی از نقطه‌های خاص c_1، c_2، ...، c_{n-1}، c_n وجود داشته باشد که تابع $f(x)$، در نزدیکی آن‌ها، بی‌کران، ولی در هر بخش بازه که شامل نقطه‌های خاص نباشد، کران‌دار و انتگرال‌پذیر باشد.

برای سادگی کار، تعداد نقطه‌های خاص را برابر ۳ می‌گیریم؛ ضمناً فرض می‌کنیم که دوتا از این نقطه‌های خاص، منطبق بردو انتهای a و b ازبازه باشد وسومی، یعنی c، درفاصلهٔ بین آن‌ها قرار گیرد. دراین صورت، انتگرال از a تا b را، با برابری زیرتعریف می‌کنند:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta_1 \to 0 \\ \cdots \\ \eta_4 \to 0}} \left\{ \int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} + \int_{c+\eta_2}^{b-\eta_4} \right\} \qquad (۳)$$

اگر نقطه‌های d و e را، به‌ترتیب، در درون هرکدام از بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ انتخاب کنیم، خواهیم داشت:

$$\int_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} = \int_{a+\eta_1}^{d} + \int_{d}^{c-\eta_2}, \quad \int_{c+\eta_2}^{b-\eta_4} = \int_{c+\eta_2}^{e} + \int_{e}^{b-\eta_4}$$

به‌سادگی روشن می‌شود که، وجود حد (۳)، هم‌ارزاست با وجود حد برای همهٔ این‌چهار انتگرال به‌طور جداگانه؛ به‌نحوی که تعریف (۳) را، می‌توان به‌این صورت عوض کرد:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^d f(x)\,dx+\int_d^c f(x)\,dx+\int_c^e f(x)\,dx+\int_e^b f(x)\,dx$$

با این فرض که همهٔ انتگرال‌های ناویژهٔ سمت راست وجود داشته باشند*. این تعریف، ارتباطی به‌انتخاب نقطه‌های d و e ندارد.

درمورد انتگرال‌های ناویژهٔ (۲) و (۳) هم، همان اصطلاح‌های قبلی به‌کار می‌رود. دنبالهٔ مثال‌ها

۲) $\int_{-۱}^{۰}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$؛ نقطهٔ خاص ۱ —.

$$\int_{-۱}^{۰}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}=\lim_{\eta'\to ۰}\int_{-۱+\eta'}^{۰}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}=\lim_{\eta'\to ۰}[-\arcsin(-۱+\eta')]=\frac{\pi}{۲}$$

۳) $\int_{-۱}^{+۱}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$؛ نقطه‌های خاص ۱ — و ۱.

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}=\int_{-۱}^{۰}+\int_{۰}^{۱}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}=\pi$$

۴) می‌خواهیم، ببینیم، به‌ازای چه مقدارهایی ازنمای $\lambda>۰$، انتگرال ناویژهٔ زیر متقارب است:

$$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^\lambda}\quad(b>a)\qquad(۴)$$

برای $\lambda\neq ۱$، انتگرال

$$\int_{a+\eta}^{b}\frac{dx}{(x-a)^\lambda}=\frac{۱}{۱-\lambda}[(b-a)^{۱-\lambda}-\eta^{۱-\lambda}]$$

به ازای $\eta\to ۰$، دارای حد ∞ یا عدد متناهی $\frac{۱}{۱-\lambda}(b-a)^{۱-\lambda}$ است، برحسب آن‌که $\lambda>۱$ یا $\lambda<۱$ باشد. درحالت $\lambda=۱$ داریم:

---

*) به‌استثنای موردی‌که دوتا ازاین انتگرال‌ها برابر بی‌نهایت، ولی با علامت‌های متفاوت باشند.

$$\int_{a+\eta}^{b}\frac{dx}{x-a}=\ln(b-a)-\ln\eta\to\infty \quad (\eta\to 0 \text{ به‌ازای})$$

بنابراین، انتگرال (۴)، به‌ازای $\lambda<1$ متقارب ودارای مقدار $\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$ است و، به‌ازای $\lambda\geqslant 1$، متباعد است [با ۴۷۰، ۲) مقایسه کنید].

۶) درمورد انتگرال

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^{\lambda}} \quad (b>a, \lambda>0)$$

هم می‌توان به‌نتیجهٔ مشابهی رسید که با مثال قبلی، تفاوت اساسی ندارد.

یادداشت: توجه به‌مطلب زیر مفید است: اگر تابع $f(x)$، دربازهٔ $[a, b]$، به‌معنای خاص خود، انتگرال‌پذیر باشد (یعنی $\int_a^b f(x)dx$ وجود داشته باشد)، در آن صورت، برابری حدی (۱)[(۲) یا (۳)] هم برای آن برقرار است؛ واین را می‌توان ، به‌طور مستقیم، ازپیوستگی انتگرال نسبت به‌حد بالایی (پایینی) نتیجه گرفت [۳۰۵، ۱۱°]، به‌این ترتیب، تعریفی که برای انتگرال ناویژه داشتیم، به‌خودی خود، برای انتگرال ویژه هم درست است.

بالاخره، تابع $f(x)$ را دربازه‌ای نامتناهی، ومثلا دربازهٔ $[a, +\infty)$ درنظر می گیریم وفرض می کنیم که دارای تعداد متناهی* ازنقطه‌های خاص باشد، که در نزدیکی آن‌ها، تابع بی کران باشد. ضمناً ، فرض می کنیم که در هربازهٔ متناهی $[a, A]$، انتگرال $\int_a^A f(x)dx$ ، چه‌ویژه وچه‌ناویژه، طبق تعریف قبل وجود داشته باشد. آن‌وقت، یکبار دیگر، باگذر به‌حد، به ازای $A\to\infty$، می‌توان انتگرال ناویژه را، دربازهٔ $[a, \infty)$ با همان برابری (۱)[۴۷۰] تعریف کرد.

در حالت بازهٔ نامتناهی، نقطه‌های $\pm\infty$، همان نقش نقطه‌های خاص را به‌عهده دارند. به‌همین مناسبت، نقطه‌های $\pm\infty$ را هم- بدون توجه به‌این که تابع $f(x)$، با ترقی نامحدود x، کران‌دار می‌ماند یا بی کران است- نقطه‌های خاص می‌نامند.

---

*) نقطه‌های خاص را، می‌توان مجموعه‌ای نامتناهی هم درنظر گرفت، تنها به‌این شرط که، در هر بازهٔ متناهی $[a, A)(A>a)$، تعداد آن‌ها متناهی باشد (که می‌تواند همراه با A، تا بی‌نهایت افزایش یابد).

۴۸۰. یادداشتی دربارهٔ نقطه‌های خاص. تابع $f(x)$ را، که در بازهٔ متناهی $[a, b]$ معین است، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، در این بازه، به‌مفهوم ویژهٔ خود، انتگرال‌پذیر نباشد. آن‌وقت، در بازهٔ $[a, b]$، حتماً نقطهٔ c را می‌توان چنان پیدا کرد که، در همسایگی آن، تابع (به‌معنای ویژه) انتگرال‌ناپذیر می‌شود.

درواقع، اگر چنین نقطه‌هایی در بازهٔ مفروض وجود نداشته باشد، در آن صورت، می‌توانستیم هر نقطهٔ x از بازهٔ $[a, b]$ را، با چنان همسایگی σ محصور کنیم که تابع ما، در محدودهٔ آن، انتگرال‌پذیر باشد. اگر پیش قضیهٔ بورل [۸۸] را در مورد دستگاه $\Sigma = \{\sigma\}$ که بازهٔ $[a, b]$ را می‌پوشاند ــ به‌کار بریم، بازهٔ $[a, b]$ به‌سادگی به‌تعداد متناهی بخش‌ها تجزیه می‌شود کــه تابع، در هرکدام از آن‌ها، انتگرال‌پذیر است. ولی، از این‌جا نتیجه می‌شود که تابع، در تمامی بــازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است که با فرض ما سازگار نیست.

طبیعی است که این نقطهٔ c را، خاص بنامیم: مثل این است که ویژگی انتگرال‌ناپذیری تابع، در آن «متمرکز» شده است. تعداد نقطه‌های خاص، ممکن است بیشتر از یك و حتی مجموعه‌ای نامتناهی باشد. مثلا در حالت تابع دیریکله [۳۰۰، ۲)]، نقطه‌های خاص، سراسر بازهٔ $[۱, ۰]$ را پر می‌کنند.

ما تنها به‌حالتی می‌پردازیم که تعداد نقطه‌های خاص c_0، c_1، c_2، ...، c_n متناهی باشد. در این حالت، طبیعت «خاص بودن» در نقطه‌های نامبرده، به‌آسانی آشکار می‌شود: تابع، در همسایگی هرکدام از آن‌ها، به‌طور ساده بی‌کران است (و همین بی‌کرانی، سبب انتگرال‌ناپذیری به‌معنای ویژه می‌شود). برای فهمیدن این مطلب، حالتی را در نظر می‌گیریم کــه تنها نقطهٔ خاص، b باشد.

فرض می‌کنیم، بــه ازای $\eta > ۰$ دلخــواه $(\eta < b - a)$، تابع $f(x)$ در بــازهٔ $[a, b - \eta]$ انتگــرال‌پذیر (و در نتیجه، الزاماً کــران‌دار)، ولی در بــازهٔ $[b - \eta, b]$، انتگرال‌ناپذیر باشد. باید ثابت کرد که، با این شرط‌ها، تابع نمی‌تواند در نزدیکی نقطهٔ b کران‌دار باشد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض می‌کنیم، برای همهٔ xها در $[a, b]$ داشته باشیم:

$$|f(x)| \leqslant L \quad (L = \text{const.})$$

$\varepsilon > ۰$ را مفروض می‌گیریم و $\eta < \frac{\varepsilon}{۶L}$ را اختیار می‌کنیم. برای بازهٔ $[a, b - \eta]$ــ که در آن، تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر است ــ ازروی $\frac{\varepsilon}{۳}$ می‌توان $\delta > ۰$ را چنان پیدا کرد که ضمن تجزیهٔ این بازه به‌بخش‌هایی به‌درازای $\Delta x_i < \delta$، داشته باشیم:

$$\sum_{i'}\omega_{i'}\cdot\Delta x_{i'}<\frac{\varepsilon}{۳}$$

که در آن $\omega_{i'}$، مثل همیشه، معرف نوسان‌های نظیر تابع است [۲۹۷]. می‌توان، علاوه بر آن، فرض کرد: $\delta<\eta$. حال، تمامی بازهٔ $[a, b]$ را به‌بخش‌هایی به‌درازای $\Delta x_i<\delta$ تجزیه و فرض می‌کنیم $\Delta x_{i'}$، نظیر بخش‌هایی باشد که از محدودهٔ $[a, b-\eta]$ تجاوز نمی‌کنند، و $\Delta_{i''}$ بقیهٔ بخش‌ها؛ که از آن‌ها، تنها یکی می‌تواند از محدودهٔ $[a, b-\eta]$ خارج شود، آن‌هم به‌شرطی که خود نقطهٔ $b-\eta$ در ترکیب نقطه‌های تقسیم وارد نشده باشد. در این صورت، مثل قبل

$$\sum_{i'}\omega_{i'}\cdot\Delta_{i'}<\frac{\varepsilon}{۳}$$

ولی، ازطرف دیگر داریم:

$$\sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}<۲L\cdot\sum_{i''}\Delta x_{i''}<۲L(\eta+\delta)<۴L\eta<\frac{۲}{۳}\varepsilon$$

وسرانجام

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i=\sum_{i'}+\sum_{i''}<\varepsilon$$

به‌این‌ترتیب، انتگرال‌پذیری تابع $f(x)$، در تمامی بازهٔ $[a, b]$، مشروط می‌شود ونقطهٔ b، علی‌رغم فرض، ناویژه از آب درمی‌آید.

بنابراین، درحالتی که تعداد نقطه‌های خاص متناهی باشد، آن‌ها را به‌این‌ترتیب می‌توان مشخص کرد که تابع، درنزدیکی آن‌ها، کراندار بودن خود را ازدست می‌دهد و این، همان تعریفی است که، درشمارهٔ پیش، دربارهٔ نقطه‌های خاص آوردیم.

۴۸۱. به‌کاربردن دستور اصلی محاسبهٔ انتگرالی. مثال‌ها. تابع $f(x)$ را، دربازهٔ $[a, b]$، معین می‌گیریم وفرض می‌کنیم، درهربازهٔ $[a, b-\eta]$ انتگرال‌پذیر (به‌معنای ویژه)، و b، نقطهٔ خاص آن باشد. اگربرای تابع $f(x)$، دربازهٔ $[a, b)$ یعنی برای $a\leqslant x<b$، تابع اولیهٔ $F(x)$ وجود داشته باشد، در آن صورت

$$\int_a^{b-\eta}f(x)dx=F(b-\eta)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b-\eta}$$

ووجود انتگرال ناویژه (۱)، به‌معنای وجود حد متناهی $\lim_{\eta\to۰}F(b-\eta)$ است. اگراین

آخری وجود داشته باشد، طبیعی است که آن را به‌جای مقدار $F(b)$، یعنی تابع اولیه به‌ازای $x=b$ بگیریم و، با توجه به‌آن، تابع $F(x)$ را در تمامی بازهٔ $[a, b]$ پیوسته به‌حساب آوریم. آن‌وقت، برای محاسبهٔ انتگرال (۱) دستور معمولی را خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \qquad (۵)$$

همین دستور، برای حالتی هم‌که نقطهٔ خاص در درون فاصله باشد ویا برای‌حالتی که‌چند نقطهٔ خاص وجود داشته باشد، برقراراست، ولی (این را باید به‌طور حدی‌به‌خاطر داشت) تنها بااین شرط‌که تابع اولیهٔ $F(x)$، که مشتق آن در همه‌جا، به‌استثنای نقطه‌های خاص، برابر $f(x)$ است، در این نقطه‌ها هم پیوسته باشد. وجود چنین تابع اولیه‌ای، وجود انتگرال ناویژه را تأمین می‌کند.

یادداشت. وقتی که دربارهٔ تابع «اولیهٔ» $F(x)$ صحبت می‌کنیم. می‌توانیم آن را به‌مفهوم بازهم وسیع‌تری بگیریم: $F(x)$ دارای مشتق $f(x)$ خود در همه‌جا، به‌استثنای نقطه‌های خاص و هم چند نقطهٔ دیگر (به‌تعداد متناهی) باشد؛ تنها باید دراین نقطه‌ها، پیوستگی تابع $F(x)$ از بین نرود [با ۳۱۰ مقایسه کنید].

در دستور اصلی (۵)، با عوض‌کردن b به x و $f(x)$ به $F'(x)$، می‌توان، مانند شمارهٔ ۳۱۰، آن را به‌این صورت نوشت:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(x)dx$$

به‌این‌ترتیب، ازروی مشتق مفروض $F'(x)$، دوباره تابع اولیهٔ $F(x)$ شناخته می‌شود، تنها به‌شرطی‌که مشتق، ولو به‌معنای ناویژه، انتگرال‌پذیر باشد.

به‌چند مثال بپردازیم.

۱) $\int_{-۱}^{۸} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x}}$؛ نقطهٔ خاص $x=۰$. چون تابع اولیهٔ $\frac{۳}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}$ در این نقطه پیوسته است، پس انتگرال وجود دارد:

$$\int_{-۱}^{۸} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x}} = \frac{۳}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}\Big|_{-۱}^{۸} = \frac{۹}{۲}$$

۲) $\int_{-۲}^{۲} \frac{۲xdx}{x^۲-۱}$ وجود ندارد، زیرا تابع اولیهٔ $\ln|x^۲-۱|$، در نقطه‌های خاص

$x=\pm 1$، برابر ∞ می‌شود.

۳) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$؛ نقطهٔ خاص $x=1$. در این‌جا، تابع اولیهٔ $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$، به‌ازای $x=1$، پیوسته است، در نتیجه، انتگرال وجود دارد $\left(=\frac{\pi^2}{8}\right)$.

۴) $\int_0^1 \ln x dx$؛ نقطهٔ خاص $x=0$. تابع اولیهٔ $x\ln x - x$، به‌ازای $x\to 0$، دارای حد ۰ است. اگر همین مقدار را برای $x=0$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\int_0^1 \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = -1$$

۵) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$؛ نقطهٔ خاص $x=1$. داریم:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = -\arcsin\frac{x+1}{2x}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}$$

۶) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$؛ نقطهٔ خاص $x=1$. انتگرال وجود ندارد، زیرا تابع اولیهٔ $\ln\ln x$، به‌ازای $x=1$، برابر ∞ می‌شود.

۴۸۲. شرط‌ها و معیارهای وجود انتگرال. تنها به‌حالتی می‌پردازیم که با تعریف (۱) ارتباط پیدا می‌کند، زیرا گسترش این‌حالت، بر حالت‌های دیگر، اشکالی پیش نمی‌آورد. با توجه به‌شباهت کاملی که با انتگرال ناویژه، که بر بازهٔ نامتناهی $[a,\infty)$ گسترش یافته است، به‌تنظیم چند گزارهٔ اصلی اکتفا می‌کنیم. اثبات، شبیه قبل است.

برای تقارب انتگرال ناویژهٔ (۱) ــ درحالت تابع مثبت $f(x)$ ــ لازم و کافی است تا، به‌ازای هر $\eta>0$، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$\int_a^{b-\eta} f(x)dx \leqslant L \quad (L=\text{const.})$$

قضیه‌های مربوط به‌مقایسه [۴۷۴]، در این‌حالت هم تقریباً با همان عبارت‌ها، تنظیم و اثبات می‌شوند. معیار کوشی را، که نتیجه‌ای از آن است، بدون اثبات می‌آوریم:

فرض کنیم، برای مقدارهای x به‌قدر کافی نزدیک به b، تابع $f(x)$، به‌این‌صورت باشد:

$$f(x)=\frac{g(x)}{(b-x)^{\lambda}} \quad (\lambda>0)$$

آن‌وقت: ۱) اگر $\lambda<1$ و $g(x)\leqslant c<+\infty$، درآن صورت، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ متقارب می‌شود؛ ۲) اگر $\lambda\geqslant 1$ و $g(x)\geqslant c>0$، در آن صورت، این انتگرال متباعد می‌شود.

شکل خاص‌تر، درعمل راحت‌تر است:

اگر به‌ازای $x\to b$، تابع $f(x)$ بی‌نهایت بزرگ مرتبهٔ $\lambda>0$ (در مقایسه با $\frac{1}{b-x}$) باشد، در آن صورت، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، برحسب آن که $\lambda<1$ یا $\lambda\geqslant 1$ باشد، متقارب یا متباعد می‌شود.

مثال‌ها. ۱) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$. تابع زیرعلامت انتگرال، به‌ازای $x\to 1$، بی‌نهایت بزرگ مرتبهٔ $\frac{1}{4}$ می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}:\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}}\to\frac{1}{\sqrt[4]{4}} \quad (x\to 1 \text{ به‌ازای})$$

و درنتیجه، انتگرال متقارب می‌شود.

۲) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2<1)$. بی‌نهایت بزرگ مرتبهٔ $\frac{1}{2}$. انتگرال متقارب است.

۳) $\int_0^1 x^{\mu}\ln x\,dx$. اگر $\mu>0$، به‌ازای $x\to 0$ داریم: $f(x)=x^{\mu}\ln x\to 0$. انتگرال ویژه وجود دارد. به‌ازای $\mu\leqslant 0$، تابع زیرعلامت انتگرال، به‌ازای $x=0$ بی‌نهایت می‌شود.

اگر داشته باشیم $-1<\mu$، درآن‌صورت، با اختیار λ، باشرط $-\mu=|\mu|<\lambda<1$،

خواهیم داشت:

$$\frac{x^{\mu}\ln x}{\frac{1}{x^{\lambda}}}=x^{\lambda+\mu}\ln x\to 0\ (x\to 0\ \text{به‌ازای}\ 0)$$

چون انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\lambda}}$ متقارب است، بنابراین، انتگرال مفروض هم متقارب می‌شود [از روی قضیهٔ مشابه قضیهٔ ۲ شمارهٔ ۴۷۴].*

بالاخره، اگر $\mu\geqslant -1$، انتگرال $\int_0^1 x^{\mu}dx$ متباعد و، درنتیجه، انتگرال مفروض هم متباعد می‌شود، زیرا [بنابرهمان قضیه]

$$\frac{x^{\mu}\ln x}{x^{\mu}}=\ln x\to 0\ (x\to 0\ \text{به‌ازای}\ 0)$$

درشمارهٔ بعد هم، مثال‌های دیگری را خواهید دید.

سپس، با به‌کاربردن معیار بولزانو-کوشی، شرط کلی‌تری برای تقارب پیدامی‌کنیم:

برای تقارب انتگرال ناویژه $\int_a^b f(x)dx$ (که در آن، b نقطه‌ای خاص است)، لازم وکافی است که برای هر عدد $\varepsilon>0$، چنان عدد $\delta>0$ پیدا شود تا، به‌ازای، $0<\eta<\delta$ و $0<\eta'<\delta$، این نابرابری برقرار باشد:

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

ازاین‌جا، مثل قبل، نتیجه می‌شود:

اگرانتگرال $\int_a^b |f(x)|dx$ متقارب باشد، در آن صورت**، به طور مسلم، انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ هم متقارب می‌شود.

---

*) درمورد تابع $x^{\mu}\ln x$، معیار مربوط به‌تابع‌های مثبت را به‌کار می‌بریم، زیرا با تغییرسادهٔ علامت، به‌تابعی مثبت منجرمی‌شود.

**) بااین فرض که درهر بازهٔ $[a, b-\eta]$ $(\eta>0)$، تابع $f(x)$ (به‌معنای ویژه) انتگرال‌پذیر باشد.

عکس مطلب، درحالت کلی، درست نیست. به‌همین مناسبت، دراین‌جاهم این‌حالت‌ها را از هم جدا می‌کنند: اگر همراه با انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، انتگرال $\int_a^b |f(x)|dx$ هم متقارب باشد، آن‌وقت، انتگرال اولی را متقارب مطلق و تابع $f(x)$ را انتگرال‌پذیر مطلق، در بازهٔ $[a, b]$، گویند.

شبیه آخرین حکم شمارهٔ ۴۷۶، در این‌جاهم به‌سادگی ثابت می‌شود:

اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر مطلق و تابع $g(x)$، در همان‌بازه، انتگرال‌پذیر به معنای ویژه باشد، در آن‌صورت، تابع $f(x).g(x)$ هم، در بازهٔ $[a. b]$، انتگرال‌پذیر مطلق خواهد بود.

و اگر بستگی با رشته‌های نامتناهی را در نظر بگیریم، به‌این قضیه می‌رسیم:

برای تقارب انتگرال ناویژه $\int_a^b f(x)dx$ (که در آن، b نقطهٔ خاص است)، لازم و کافی است که، به‌ازای هر مقدار دلخواه واریانت $a_n \to b$، رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx \quad (a_0 = a,\ a \leqslant a_n < b)$$

به‌سمت یك مجموع میل کند و همین مجموع هم، مقدار انتگرال ویژه را به‌دست می‌دهد.

مثالی از انتگرال متقارب غیرمطلق. فرض‌کنیم، برای $0 < x \leqslant 2$ داشته باشیم:

$$f(x) = 2x.\sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x}.\cos\frac{\pi}{x^2}$$

این تابع، به‌ازای $x > 0$ پیوسته است و تنها نقطهٔ خاص برای آن، در بازهٔ $[0, 2]$، نقطهٔ 0 است. از طرف دیگر، تابع اولیه برای $f(x)$، چنین است:

$$F(x) = x^2.\sin\frac{\pi}{x^2}$$

که به‌ازای $x \to 0$، دارای حد $F(+0) = 0$ است. به‌این ترتیب، انتگرال

$$\int_0^2 f(x)dx = x^2.\sin\frac{\pi}{x^2}\Big|_0^2 = 2\sqrt{2}$$

متقارب است.

برای آن‌که نشان دهیم، انتگرال $\int_0^{۲}|f(x)|dx$ متباعد است، این انتگرال را به‌صورت رشته نشان می‌دهیم. واریانت a_n را با قراردادن

$$a_0=۲,\quad a_{۲k-۱}=\sqrt{\frac{۲}{۲k-۱}},\quad a_{۲k}=\frac{۱}{\sqrt{k}}\quad (k=۱,۲,۳,\dots$$

انتخاب می‌کنیم، آن‌گاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n-۱}}|f(x)|dx=\sum_{k=۱}^{\infty}\int_{a_{۲k}}^{a_{۲k-۱}}|f(x)|dx$$

در بازهٔ $[a_{۲k},a_{۲k-۱}]$، یعنی برای $k\pi-\frac{\pi}{۲}\geqslant\frac{\pi}{x^۲}\geqslant k\pi$، $\sin\frac{\pi}{x^۲}$ و $\cos\frac{\pi}{x^۲}$ دارای علامت‌های مختلف هستند، به‌طوری‌که $f(x)$، علامت معینی را حفظ می‌کند و بنابراین

$$\int_{a_{۲k}}^{a_{۲k-۱}}|f(x)|dx=\left|\int_{a_{۲k}}^{a_{۲k-۱}}f(x)dx\right|=$$

$$=|F(a_{۲k-۱})-F(a_{۲k})|=\frac{۲}{۲k-۱}>\frac{۱}{k}$$

که با توجه به‌تباعد رشتهٔ توافقی $\sum_{۱}^{\infty}\frac{۱}{k}$، رشتهٔ مفروض و، همراه با آن، انتگرال مفروض متباعد می‌شود.

۴۸۳. مثال‌ها. تقارب انتگرال‌های زیر را بررسی کنید.

۱) (a) $\int_0^{\theta}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}$، (b) $\int_0^{۱}\frac{dx}{\sqrt[۳]{x(e^x-e^{-x})}}$، (c) $\int_0^{۱}\frac{dx}{\ln x}$،

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{۲}}(tgx)^p dx$، (e) $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}}\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)^p d\theta$

حل: (a). نقطهٔ ویژه $\varphi=\theta$. با توجه به‌وجود مشتق

$$\lim_{\varphi \to \theta} \frac{\cos\varphi - \cos\theta}{\varphi - \theta} = -\sin\theta$$

عبارت‌زیر علامت‌انتگرال (به‌ازای $\varphi \to \theta$). بی‌نهایت‌بزرگ مرتبهٔ $\frac{1}{2}$ $\left(\text{نسبت‌به } \frac{1}{\theta - \varphi}\right)$ می‌شود. انتگرال متقارب است.

(b). *نقطهٔ ویژه* $x = 0$. چون

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$$

مرتبهٔ عبارت زیر انتگرال $\left(\text{نسبت‌به } \frac{1}{x}\right)$ برابر $\frac{2}{3}$ می‌شود. انتگرال، متقارب است.

(c). در این‌جا هم

$$\frac{\ln x}{x-1} \to 1 \quad (\text{به‌ازای } x \to 1)$$

مرتبه $\left(\text{نسبت‌به } \frac{1}{1+x}\right)$ برابر است با ۱. انتگرال متباعد است.

(d). اگر داشته‌باشیم: $p > 0$، آن‌وقت‌نقطهٔ خاص، عبارت‌است از $\frac{\pi}{2}$ و اگرداشته باشیم $p < 0$، بـا نقطه خاص ۰ سر و کار داریم. در هر دو حالت، عبارت زیر انتگرال، بی‌نهایت بزرگی از مرتبهٔ $|p|$ می‌شود. بنابراین، انتگرال بـه ازای $|p| < 1$ متقارب و $p \geqslant 1$ متباعد است.

(e). نقطهٔ‌خاص، به‌ازای $p > 0$، نقطهٔ $-\frac{\pi}{4}$ و به‌ازای $p < 0$، نقطهٔ $\frac{\pi}{4}$ است. جواب شبیه حالت قبلی است.

(۲) (a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$، (b) $\int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x} dx$، $(a, b > 0)$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$، (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin^2\theta - k^2| d\theta$

حل: (a). به‌ازای $x \to 0$، تابع زیر انتگرال به‌سمت ۰ میل می‌کند؛ نقطهٔ خاص

$x=0$. فرض کنیم $-1<\lambda<0$، آن‌وقت

$$\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}:\frac{1}{x^\lambda}=\frac{x^\lambda\cdot\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\to 0 \quad (x\to 0 \text{ به‌ازای})$$

انتگرال متقارب است.

(b). به‌ازای $x\to 1$، با رفع ابهام، متوجه می‌شویم که تابع زیر علامت انتگرال، دارای حد متناهی $(=b-a)$ است. نسبت تابع زیر انتگرال به‌صورت کسر، برابر است با $\frac{1}{\ln x}$ که، به‌ازای $x\to 0$، به‌سمت صفر میل می‌کند. با توجه به تقارب انتگرال $\int_0^1 (e^{b-1}-e^{a-1})dx$، انتگرال مفروض هم متقارب می‌شود.

(c). نقطهٔ خاص $x=0$. فرض می‌کنیم $-1<\lambda<0$، داریم:

$$\frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x^\lambda}}=\left(\frac{x}{\sin x}\right)^\lambda\cdot \sin^\lambda x\cdot\ln(\sin x)\to 0 \quad (x\to 0 \text{ به‌ازای})$$

انتگرال متقارب است.

(d). فرض می‌کنیم $k=\sin\omega$ $\left(0<\omega\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$؛ نقطهٔ خاص $\theta=\omega$. دوباره فرض می‌کنیم: $-1<\lambda<0$؛ آن‌وقت

$$\frac{\ln|\sin^2\theta-\sin^2\omega|}{\frac{1}{(\theta-\omega)^\lambda}}=\left|\frac{\theta-\omega}{\sin\theta-\sin\omega}\right|^\lambda\cdot|\sin\theta-\sin\omega|^\lambda\times$$

$$\times\{\ln|\sin\theta-\sin\omega|+\ln(\sin\theta+\sin\omega)\}$$

که به‌ازای $\theta\to\omega$، به‌سمت صفر میل می‌کند. انتگرال، متقارب است.

(۳) (a) $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$، (b) $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\cdot\ln x\,dx$

حل: (a). به‌ازای $a<1$، نقطهٔ خاص ۰ و به‌ازای $b<1$، نقطهٔ خاص، ۱ می‌باشد. انتگرال مفروض را، به‌دو انتگرال تجزیه می‌کنیم، مثلاً $\int_0^1=\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^1$. چون تابع

زیر انتگرال، به‌ازای $x \to 0$، بی‌نهایت بزرگ مرتبهٔ $a-1$ (با شرط $a<1$) می‌شود، بنابراین، انتگرال اول، تنها باشرط $a-1<1$، یعنی $a>0$، متقارب است. به‌همین ترتیب انتگرال دوم‌هم، برای $b>0$ متقارب می‌شود. به‌این‌ترتیب انتگرال مفروض، وقتی و تنها وقتی متقارب است که، به‌طورهمزمان، داشته باشیم: $a>0$ و $b>0$.

(b). وضع نسبت به‌نقطهٔ $x=0$، مانند قبل است. کافی است $\int_0^{\frac{1}{2}}$ را، و ضمناً بـا فرض $a \leqslant 1$، بررسی کنیم (در حالت $a>1$، بـا انتگرال ویژه سر و کار داریم). بحث شبیه مثال ۳) شمارهٔ ۴۸۲ است. انتگرال، برای $a>0$، مانندحالت (a) متقارب می‌شود.

در مورد نقطهٔ $x=1$، وضع دراین‌جا تغییر می‌کند. زیرا $\ln x$ به‌ازای $x \to 1$، بی‌نهایت کوچك مرتبه یکم می‌شود. انتگرال $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$، برای $b>-1$ وجود دارد.

بالاخره، شرطهای تقارب انتگرال مفروض، عبارتند از $a>0$ و $b>-1$.

۴) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}\varphi d\varphi}{|1+k\cos\varphi|^n}$.

حل: چون حالت $k<0$، بـا تبدیل φ به $\varphi_1=\pi-\varphi$، به‌حالت $k>0$ منجر می‌شود، می‌توان به‌حالت $k \geqslant 0$ اکتفا کرد. علاوه برآن، برای تقارب انتگرال در همهٔ حالت‌ها، لازم است داشته باشیم $n>0$. زیرا در غیر این‌صورت، به‌ازای $\varphi \to 0$ (یا $\varphi \to \pi$)، تابع زیر انتگرال، بی‌نهایت از مرتبهٔ بزرگتر یا مساوی ۱ می‌شود.

اگر $k<1$. در آن‌صورت، همین شرطها، کافی هم هست. برای $k=1$، انتگرال نمی‌تواند متقارب باشد، زیرا وقتی $\varphi \to \pi$، بی‌نهایت بزرگی بـا مرتبهٔ بیشتر از ۱ را خواهیم داشت.

بالاخره، فرض می‌کنیم $k>1$. در این‌حالت، دربازه، یك نقطهٔ خاص وجود دارد: $\alpha=\arccos\left(-\frac{1}{k}\right)$. وقتی $\varphi \to \alpha$، عبارت زیر علامت انتگرال، بی‌نهایت بزرگ از مرتبهٔ n می‌شود. یعنی برای تقارب انتگرال، شرط $n<1$ هم لازم است.

به‌این‌ترتیب، انتگرال وقتی متقارب‌است که داشته باشیم: ۱) $k>1$ و $0 \leqslant n<1$ و ۲) $k>1$ و $0<n<1$. انتگرال، در سایر حالت‌ها، متباعد است.

(۵) (a) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$، (b) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$، (c) $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$.

حل: نقطهٔ خاص ∞ و همچنین (برای $a<1$) ۰. اگر انتگرال را به صورت $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ تجزیه کنیم، در آن‌صورت، اولی به‌ازای $a>0$ بی‌نهایت بزرگ مرتبهٔ $1-a<1$ (نسبت به x) و دومی به‌ازای $a<1$، بی‌نهایت کوچك مرتبهٔ $2-a>1$ (نسبت به $\frac{1}{x}$) و متقارب می‌شوند. در نتیجه، انتگرال مفروض، به‌ازای $0<a<1$، متقارب است.

(b) نقطه‌های خاص: ∞ و ۰؛ $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. با اختیار $0<\lambda<1$، داریم:

$$\frac{\ln x}{1+x^2}:\frac{1}{x^\lambda}=\frac{x^\lambda \ln x}{1+x^2}\to 0 \quad (x\to 0 \text{ به ازای})$$

$\int_0^1$ متقارب می‌شود. حال فرض می‌کنیم $1<\mu<2$، آن وقت

$$\frac{\ln x}{1+x^2}:\frac{1}{x^\mu}=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\ln x}{x^{2-\mu}}\to 0 \quad (x\to\infty \text{ به‌ازای})$$

یعنی، انتگرال $\int_1^\infty$ هم متقارب می‌شود، که از آن‌جا، تقارب انتگرال $\int_0^\infty$ نتیجه می‌شود.

(c) نقطه‌های خاص ∞ و ۰ (به‌ازای $p<1$). $\int_0^1$ تنها به ازای $p>0$ وجود دارد (بی‌نهایت کوچك مرتبهٔ $1-p$ نسبت به $\frac{1}{x}$). $\int_1^\infty$، برای هر مقدار دلخواه p، وجود دارد، زیرا با اختیار $\lambda>1$ داریم:

$$\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^\lambda}}=\frac{x^{\lambda+p-1}}{e^x}\to 0 \quad (x\to\infty \text{ به‌ازای})$$

$\int_0^\infty$ به‌ازای $p>0$ وجود دارد.

در دو تمرین بعدی، در بازهٔ متناهی (یا نامتناهی) $[a, b]$ (یا در هریك از بخش‌های متناهی آن، اگر با بازهٔ نامتناهی سر و کار داشته باشیم)، تابع را با تعداد محدودی نقطهٔ خاص در نظر می‌گیریم.

۶) ثابت کنید:

(a). اگر تابع f^2 انتگرال‌پذیر باشد، خود تابع f، الزاماً انتگرال‌پذیر مطلق خواهد بود (دربارهٔ چنین تابعی گویند این تابع «با مربع خود» انتگرال‌پذیر است).

(b). اگر دو تابع f و g «با مربع‌خود» انتگرال‌پذیر باشند، در آن‌صورت، مجموع آن‌ها $f+g$ هم، با مربع خود انتگرال‌پذیر است.

(c). باهمان فرض‌ها، حاصل‌ضرب fg هم، تابع انتگرال‌پذیر (مطلق) خواهد بود.

همهٔ این‌ها، بنابر قضیهٔ مقایسه، از نابرابری‌های زیر نتیجه می‌شوند:

$$|f| \leqslant \frac{1+f^2}{2},\quad (f+g)^2 \leqslant 2(f^2+g^2),\quad |f\cdot g| \leqslant \frac{f^2+g^2}{2}$$

۷) برای این گونه تابع‌ها، می‌توان همان نابرابری‌های انتگرالی شمارهٔ **۳۲۱** را برقرار کرد، با این فرض که تابع‌های مفروض (به‌معنای ویژه) انتگرال‌پذیر باشند. مثلاً، اگر نقطهٔ خاص، در همهٔ حالت‌ها، منحصر به b باشد (که می‌تواند ∞ هم بشود)؛ در آن‌صورت، باید نابرابری‌های انتگرالی را برای بازهٔ $[a, x_0]$ نوشت، که در آن $a<a_0<b$، و سپس، به‌ازای $x_0 \to b$، به‌سمت حد عبور کرد تا درستی نابرابری‌ها، برای انتگرال‌های ویژه هم ثابت شود. از آن جا می‌توان از تقارب انتگرال‌های سمت راست‌نابرابری‌ها، تقارب انتگرال‌های سمت چپ را ــ شبیه‌آن‌چه در **۳۷۵**، ۸) دربارهٔ رشته‌های نامتناهی داشتیم ــ نتیجه‌گرفت.

۴۸۴. مقدار اصلی انتگرال‌های ناویژه. تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[a, b]$ مفروض می‌گیریم و فرض می‌کنیم که، این‌تابع، تنها یك نقطهٔ خاص c، در درون بازه، داشته باشد و، ضمناً، در هر بخشی از این بازه که شامل c نیست، به‌معنای ویژه انتگرال‌پذیر باشد. انتگرال ناویژهٔ از a تا b با برابری

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta' \to 0}} \left\{ \int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta'}^b \right\}$$

تعریف می‌شود، ضمناً، باید حد، بدون بستگی به‌عبور حدی نسبت به η و نسبت به η'، وجود داشته باشد. در بعضی حالت‌ها که این حد وجود ندارد، می‌توان حد همان عبارت را، به‌شرطی که η و η' برابر باشند و به‌سمت صفر میل کنند ($\eta = \eta' \to 0$) در نظر گرفت. اگر چنین حدی وجود داشته باشد، آن‌را (با پیروی از کوشی)، مقدار اصلی انتگرال ناویژهٔ $\int_a^b f(x)dx$ می‌نامند و چنین می‌نویسند:

$$\text{V.p.}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to 0}\left\{\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b\right\}$$

[V.p. حرف‌های اول واژه‌های «Valeur principale»، به‌معنای «مقدار اصلی» در زبان فرانسه می‌باشد]. در این حالت می‌گویند که: انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ به‌معنای مقدار اصلی وجود دارد. روشن است که، اگر انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ به‌معنای ناویژه وجود داشته باشد، در آن‌صورت، بی‌تردید، به‌معنای مقدار اصلی هم وجود خواهد داشت، ولی عکس آن، همیشه درست نیست. به‌مثال‌ها می‌پردازیم.

۱) انتگرال $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ $(a<c<b)$، به‌عنوان ناویژه، وجود ندارد، زیرا عبارت

$$\int_a^{c-\eta}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\eta'}^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\eta}{\eta'}$$

در حالتی که η و η'، مستقل از یکدیگر، به‌سمت صفر میل کنند، دارای حد معینی نیست. درحالی که اگر η و η' برابر باشند، به‌دست می‌آید:

$$\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b = \ln\frac{b-c}{c-a}$$

۲) انتگرال ناویژهٔ $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$ $(a<c<b$ و $n\geqslant 2)$، برای مقدارهای زوج n، نامتناهی است و، برای مقدارهای فرد n، اصلاً، وجود ندارد.

این عبارت را در نظر می‌گیریم:

$$\int_a^{c-\eta}\frac{dx}{(x-c)^n} + \int_{c+\eta}^b \frac{dx}{(x-c)^n} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} + \frac{1}{\eta^{n-1}} + (-1)^n\frac{1}{\eta^{n-1}}\right\}$$

که اگر n عددی فرد باشد، به‌سمت عدد ثابتی میل می‌کند. در این حالت، مقدار اصلی، چنین خواهد بود:

$$\text{V.p.}\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}}-\frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right] \quad (n\text{، عددی فرد})$$

۳) انتگرال متباعد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{k-\sin\theta}$ $(0<k<1)$ را در نظر می‌گیریم؛ نقطهٔ خاص $\alpha=\arcsin k$، و بـه‌ازای $\theta \to \alpha$، تابع زیر علامت انتگرال، بی‌نهایت از مرتبه یکم می‌شود. داریم:

$$\int \frac{d\theta}{k-\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left|\frac{k-\sin\theta}{1-k\sin\theta-\sqrt{1-k^2}\cos\theta}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left|\frac{\sin\alpha-\sin\theta}{1-\cos(\alpha-\theta)}\right|$$

بنابراین

$$\int_0^{\alpha-\eta}+\int_{\alpha+\eta}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left\{\ln\frac{\sin\alpha-\sin(\alpha-\eta)}{\sin(\alpha+\eta)-\sin\alpha}+\ln\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right\}$$

وقتی کـه $\eta \to 0$، نخستین عبارت زیر علامت لگاریتم به‌سمت ۱ میل می‌کند (بـا رفع ابهام به‌کمك قاعدهٔ هوپیتال) و بالاخره

$$\text{V.p.}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{k-\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k} \quad (0<k<1)$$

در برخی حالت‌هـا، می‌توان وجود مقدار اصلی انتگرال را، از پیش، معین کـرد. به‌یکی از این حالت‌ها می‌پردازیم. فرض کنیم انتگرال

$$\int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

داده شده باشد، که در آن، $f(x)$، تابعی است پیوسته در بازهٔ $[a, b]$ و تنها در یك نقطهٔ c از درون بازه، برابر صفر می‌شـود. ضمناً، فرض می‌کنیم، مشتق اول $f'(x)$ وجود داشته باشد و در نقطهٔ $x=c$ مخالف صفر باشد، همچنین، مشتق دوم $f''(x)$ هـم وجود داشته باشد.

چون $\frac{۱}{f(x)}$، به‌ازای $x=c$، بی‌نهایت بزرگ مرتبهٔ یکم می‌شود و، ضمناً، باعبور x از c، تغییر علامت می‌دهد، بنابراین، انتگرال مفروض وجود ندارد. با این حال، روشن می‌کنیم که این انتگرال، به‌معنای مقدار اصلی، وجود دارد.

فرض می‌کنیم

$$\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{f'(c)\cdot(x-c)}+\varphi(x)$$

این تابع، برای $x\neq c$ پیوسته است. در نزدیکی $x=c$، با توجه به‌دستور تیلور باجملهٔ متمم به‌شکل په‌آنو، داریم [۱۲۴]:

$$f(x)=f'(c)\cdot(x-c)+[f''(c)+\alpha(x)]\cdot\frac{(x-c)^{۲}}{۲}$$

که درآن، وقتی $x\to c$، داریم: $\alpha(x)\to ۰$، در آن‌صورت، روشن است

$$\varphi(x)=-\frac{\frac{۱}{۲}[f''(c)+\alpha(x)]}{f'(c)\left[f'(c)+\frac{f''(c)+\alpha(x)}{۲}(x-c)\right]}$$

به‌طوری‌که $\varphi(x)$، در نزدیکی $x=c$، کران‌دار بودن خود را حفظ می‌کند و در نتیجه، حتی به‌معنای‌ویژه، انتگرال‌پذیر است. چون برای تابع $\frac{۱}{f'(x)\cdot(x-c)}$، انتگرال به‌معنای مقدار اصلی وجود دارد [۱) را ببینید]، بنابراین، همین نتیجه‌گیری در مورد انتگرال مفروض هم درست است.

به‌کمك این معیار، مثلاً می‌توان به‌سادگی، وجود مقدار اصلی انتگرال را، درمثال ۳) ثابت کرد. از مثال دیگری، می‌توان برای تعریف یك تابع مهم غیرمقدماتی، به‌نام «لگاریتم انتگرالی» ــ استفاده کرد:

$$\operatorname{li} a=\int_{۰}^{a}\frac{dx}{\ln x}$$

این انتگرال، تنها به‌ازای $۰<a<۱$ متقارب است؛ برای $a>۱$، تنها به معنای مقدار اصلی، قابل درك است.

مفهوم مقدار اصلی را، بدون اشکال، درمورد حالتی هم که با تعدادی دلخواه از نقطه‌های خاص درون بازه سروکار دارد، می‌توان به‌کار برد.

تا این‌جا، امکان خاص بودن را، برای دوانتهای بازه، استثنا کردیم؛ اگر، ضمن ساختن مقدار اصلی، این خاص بودن را به‌حساب نیاوریم، از این استثنا هم می‌توان صرف‌نظر کرد.

۴) انتگرال آشکارا متباعد

$$\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x}dx \quad (a>0)$$

را درنظر می‌گیریم. نقطه‌های خاص عبارتند از $x=1$ و، درحالت $a<1$، انتهای $x=0$، به‌سادگی ثابت می‌شود که دراین حالت

$$\text{V.p}\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x}dx = \lim_{\eta\to 0}\left\{\int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^2\right\}$$

به‌طور ساده، به‌انتگرال زیرمنجرمی‌شود:

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{a-1}-(1+t)^{a-1}}{t}\,dt$$

(که به‌ازای $a<1$، ناویژه است).

درپایان، ازنوع دیگری «مقداراصلی»ـ که اغلب مورد استفاده قرار می‌گیردـ یاد می‌کنیم. به‌خصوص، به‌انتگرالی می‌پردازیم که هردو مرز بازهٔ آن بی‌نهایت باشد: $(+\infty, -\infty)$ وضمناً، در درون بازهٔ خود، نقطه‌های خاص نداشته باشد. می‌دانیم که چنین انتگرالی را می‌توان، یااین برابری حدی، تعریف کرد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)\,dx$$

که در آن، عبور به‌حد، نسبت به A و نسبت به A'، مستقل از یکدیگر فرض می‌شود. ممکن است وضعی پیداشود که، به‌این‌معنا، حدی وجود نداشته باشد، ولی بافرض خاص $A=A'$، بتوان حدآن را به‌دست آورد، این‌حد را هم، مقدار اصلی انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ گویند واین‌طور نشان می‌دهند:

$$\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$$

مثلاً، اگر تابع $f(x)$ فرد باشد، انتگرال آن در بازهٔ $(-A, A)$، که نسبت به ۰ متقارن است، برابر صفر می‌شود، به‌طوری که ضمناً

$$\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ۰$$

هرچند ممکن است انتگرال ناویژهٔ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$، اصلاً وجود نداشته باشد (مثلاً، برای تابع $\sin x$).

اگر تابع $f(x)$ زوج باشد، در آن صورت داریم:

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = ۲\int_{۰}^{A} f(x)\,dx$$

وقتی و تنها وقتی حداین انتگرال وجود دارد که برای انتگرال $\int_{۰}^{A} f(x)dx$، حدی وجود داشته باشد، یعنی انتگرال ناویژهٔ $\int_{۰}^{\infty} f(x)\,dx$ وجود داشته باشد که، همراه با آن، انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ هم وجود خواهد داشت. به‌این‌ترتیب، مقدار اصلی انتگرال، برای تابع زوج، تنها وقتی وجود دارد که انتگرال ناویژه هم وجود داشته باشد (و طبیعی است که، ضمناً، برابر آن خواهد بود).

هر تابع $f(x)$ را (که در هر بازهٔ متناهی انتگرال‌پذیر باشد) می‌توان به صورت مجموع دو تابع زوج و فرد

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{۲},\quad \psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{۲}$$

نشان داد (که دارای همان خاصیت انتگرال‌پذیری هستند).

و حالا، می‌توان از بحث بالا نتیجه گرفت:

$$\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

بشرطی که انتگرال ناویژه آخری وجود داشته باشد. مثلا، با توجه به این که تابع $\frac{1+x}{1+x^2}$، از بخش زوج $\frac{1}{1+x^2}$ و بخش فرد $\frac{x}{1+x^2}$ تشکیل شده است، بلافاصله می‌توان نوشت:

$$\text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$$

۴۸۵. یادداشتی دربارهٔ مقدار تعمیم‌یافتهٔ انتگرال‌های متباعد. در §۹ فصل یازدهم، از روش‌هایی یاد کردیم که، به کمک آن‌ها، بتوان «مجموع تعمیم‌یافتهٔ» رشته‌های متباعد را به‌دست آورد. روش‌های مشابهی وجود دارد که امکان محاسبهٔ «مقدار تعمیم‌یافتهٔ» انتگرال‌های متباعد را به‌وجود می‌آورند. درواقع، در شمارهٔ قبل هم، که با واردکردن بعضی شرط‌های جزئی درجریان محاسبهٔ حدها، کاررا به‌محاسبهٔ انتگرال‌های ناویژهٔ معمولی منجر کردیم، همین هدف را دنبال می‌کردیم. در این‌جا هم، از روش‌هایی یاد می‌کنیم، که با روش‌های مربوط به‌رشته‌های متباعد، خیلی شباهت دارند. به‌دو مثال ـ که مشابه روش چه‌زارو و روش پواسون-آبل درمورد رشته‌ها می‌باشند ـ اکتفا می‌کنیم.

I. $f(x)$ را تابعی می‌گیریم که برای $x\geqslant 0$ معین و در هر بازهٔ متناهی $[0, x]$ انتگرال‌پذیر (به‌معنای ویژه)، ولی دربازهٔ $[0, \infty]$ انتگرال‌ناپذیر باشد. تابع

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

معین و مقدار میانگین آن را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$$

اگرحد متناهی برای آن وجود داشته باشد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(u)du=I$$

آن‌وقت، این مقدار را، به‌عنوان «مقدار تعمیم‌یافتهٔ» انتگرال درنظر می‌گیرند.

این روش را، به‌عنوان مثال، درمورد انتگرال متباعد

$$\int_0^\infty \sin\ x dx \qquad (۶)$$

به‌کار می‌بریم [۴۷۲، ۴)]. دراین‌جا $f(x)=\sin x$، $F(x)=1-\cos x$ و

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(u)\,du=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x}=1$$

وهمین عدد، عبارت است از «مقدار تعمیم‌یافتهٔ» انتگرال متباعد.

البته، دراین‌جا هم به طور طبیعی، مسألهٔ منتظم بودن روش مطرح می‌شود. آیا این روش، به‌انتگرال متقارب

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \qquad (۷)$$

مربوط می‌شود که، بنا به‌تعریف شمارهٔ ۴۷۰، دارای مقدار متناهی I است و، برای «مقدار تعمیم‌یافتهٔ» هم، همین‌مقدار I به‌حساب می‌آید؟ ثابت می‌کنیم که وضع به‌همین‌ترتیب‌است.

از روی عدد دلخواه $\varepsilon>0$، با توجه به‌تقارب انتگرال (۷)، چنان $x_0>0$ پیدا می‌شود که، برای $x\geqslant x_0$ داشته باشیم:

$$|F(x)-I|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\left(F(x)=\int_0^x f(t)dt\right)$$

با فرض $x>x_0$ داریم:

$$\frac{1}{x}\int_0^\infty F(u)du-I=\frac{1}{x}\int_0^x[F(u)-I]\,du=$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^{x_0}[F(u)-I]\,du+\left(1-\frac{x_0}{x}\right).\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x[F(u)-I]du$$

به‌نحوی که

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x F(u)du-I\right|<\frac{1}{x}\left|\int_0^{x_0}[F(u)-I]\,du\right|+$$

$$+\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x|F(u)-I|\,du$$

جملهٔ دوم سمت راست (بنابر انتخاب عدد x_0) از $\frac{\varepsilon}{2}$ کوچکتراست؛ جملهٔ اول هم،

برای xهای به‌قدر کافی بزرگ، کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{۲}$ می‌شود و درعین‌حال

$$\left|\frac{۱}{x}\int_{۰}^{x}F(u)du-I\right|<\varepsilon$$

و به‌این‌ترتیب، درواقع داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}\int_{۰}^{x}F(u)du=I$$

II. این‌بار، برای تابع مفروض $f(x)$، که برای آن انتگرال (۷) وجود ندارد، انتگرال دیگری را بررسی می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{\infty}e^{-kx}f(x)dx$$

اگر انتگرال اخیر، برای $k>۰$، متقارب وحد متناهی زیروجود داشته باشد:

$$\lim_{x\to\infty}\int_{۰}^{\infty}e^{-kx}f(x)\,dx=I$$

در آن‌صورت، همین‌حد، به‌عنوان «مقدار تعمیم‌یافتهٔ» انتگرال متباعد (۷)، پذیرفته‌می‌شود.

به‌عنوان مثال، دوباره انتگرال (۶) را درنظر می‌گیریم. چون

$$\int_{۰}^{\infty}e^{-kx}\sin x\,dx=\frac{۱}{k^{۲}+۱}$$

[۴۷۲، ۱)]، به‌ازای $k\to ۰$، به‌سمت ۱ میل می‌کند، بنابراین، دراین‌جا هم، همان عدد ۱، به‌عنوان «مقدار تعمیم‌یافتهٔ» انتگرال (۶) به‌دست می‌آید.

بعداً [در ۵۲۰] به‌مسألهٔ مربوط به‌منتظم بودن این روش برمی‌گردیم.

§۳. ویژگی‌های انتگرال‌های ناویژه و تبدیل آن‌ها

۴۸۶. ویژگی‌های ساده. تابع‌های انتگرال‌پذیر (به‌معنای ویژه یا ناویژه) را در بازهٔ متناهی یا نامتناهی $[a, b)$ بررسی خواهیم کرد. به‌این‌ترتیب، a و b می‌توانند هم عددهایی متناهی وهم $\pm\infty$ باشند. ویژگی‌های سادهٔ انتگرال‌های ناویژه را که کاملاً

شبیه ویژگی‌های انتگرال‌های ویژه هستند [۳۰۲ تا ۳۰۶]ـ تنها نام می‌بریم؛ آن‌ها را می‌توان، با همان شیوه، به‌دست‌آورد. از آن‌جاکه، انتگرال ناویژه‌حد انتگرال ویژه‌است، معمولاکافی است، برای رسیدن به‌ویژگی انتگرال ناویژه، برابری یا نابرابری مربوط به‌انتگرال ویژه را بنویسیم و به‌سمت حد عبورکنیم.

قبل ازهمه، در این‌جا هم می‌توان مفهوم انتگرال را نسبت به‌بازهٔ توجیه شده آورد وثابت‌کرد که

۱°. اگر $f(x)$ دربازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، درآن صورت در بازهٔ $[b, a]$ هم، انتگرال‌پذیر است وضمناً

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

[و می‌توان آن را، به‌طور ساده، برای تعریف حالتی در نظر گرفت که در $\int_a^b$ داشته باشیم: $a>b$].

سپس

۲°. اگر تابع $f(x)$، در بزرگترین بازه* از بازه‌های $[a, b]$، $[a, c]$ و $[c, b]$، انتگرال‌پذیر باشد، در آن صورت، در دو بازهٔ دیگر هم، انتگرال‌پذیر خواهد بود و، ضمناً، داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

۳°. اگر $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر و c عددی ثابت باشد، درآن‌صورت $c.f(x)$ هم، در همان بازه، انتگرال‌پذیر خواهد بود و داریم

$$\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)\,dx$$

۴°. فرض می‌کنیم، هردو تابع $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشند. آن‌وقت، تابع $f(x)\pm g(x)$ هم انتگرال‌پذیر خواهد بود و داریم:

---

*) دقیق‌تر، در بازه‌ای‌که شامل دو بازهٔ دیگر باشد.

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

برای اثبات این ویژگی* (و ویژگی بعدی)، باید یادداشت شمارهٔ **۴۷۹** را در نظر داشت. مثلا اگر فرض کنیم که b تنها نقطهٔ خاص، برای این یا آن تابع از تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ باشد، آن‌وقت، با نوشتن برابری

$$\int_a^{x_0} [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx \pm \int_a^{x_0} g(x)dx \quad (a<x_0<b)$$

می‌توان، با عبور به‌حد به‌ازای $x_0 \to b$، دستور قبلی را به‌دست آورد، چه زمانی که تمامی انتگرال از a تا b، ناویژه وچه زمانی که یکی از آن‌ها ویژه باشد.

۵° اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشند و داشته‌باشیم: $f(x)\leqslant g(x)$، درآن صورت، برای $a<b$ داریم:

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

۶°. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر مطلق باشد، درآن صورت، (برای $a<b$) داریم:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

۷°. اگر تابع $f(x)$، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشد، درآن صورت، برای x دلخواه ازآن بازه، انتگرال زیر وجود دارد:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

و ضمناً، $\Phi(x)$، تابعی پیوسته نسبت به x است.

فرض کنیم $a<x_0\leqslant b$؛ ثابت می‌کنیم که، مثلا، تابع $\Phi(x)$، به‌ازای $x=x_0$، از طرف چپ پیوسته است. اگر c را بین a و x_0 طوری انتخاب کنیم که در بازهٔ $[c, x_0]$،

---

*) ویژگی‌های ۳° و ۴° را، دربارهٔ انتگرال‌های با حد بی‌نهایت، در شمارهٔ **۴۷۳** داشتیم، و حتی ازآن‌ها درشماره‌های بعدی هم استفاده کردیم. در این‌جا، آن‌ها را به‌صورت کلی‌تری آورده‌ایم.

نقطهٔ خاص دیگری، به‌جز x_0، وجود نداشته باشد، برای $c<x\leqslant x_0$ داریم:

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^x f(t)dt \qquad (۲)$$

وکافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{x\to x_0-0}\int_a^x f(t)\,dt=\int_c^{x_0} f(t)dt$$

واین برابری [یادداشت شمارهٔ **۴۷۹** را ببینید] ، چه درحالتی که انتگرال سمت راست ویژه باشد و چه‌درحالتی که ناویژه باشد، برقرار است.

اگر $x_0=b=+\infty$، درآن‌صورت، پیوستگی تابع $\Phi(x)$، به‌ازای $x=+\infty$، به‌آن معناست که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\Phi(+\infty)=\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

۸°. با همان فرض‌ها، اگر تابع $f(x)$، در نقطهٔ $x=x_0$، پیوسته باشد ، مشتق تابع $\Phi(x)$ [(۱) را ببینید]، در این نقطه، وجود دارد:

$$\Phi'(x_0)=f(x_0)$$

برای اثبات، می‌توان از تجزیهٔ (۲)، با استفاده ازویژگی مشابه در انتگرال‌های ویژه، استفاده کرد.

ویژگی‌های ۷° و ۸° را، می‌توان به‌سادگی، برای حالتی هم‌که مرز پایین‌انتگرال متغیر باشد، به‌کاربرد.

۴۸۷. قضیه‌های مربوط به‌مقدارهای میانگین. قضیهٔ اول‌مربوط به‌مقدارهای‌میانگین درشکل اولیهٔ خود [۳۰۴، ۹°]، براین مبناست که تابع $f(x)$ راکران‌دار و بازه را متناهی فرض می‌کند، و به‌همین مناسبت، نمی‌تواند برای حالت انتگرال‌های ناویژه، به‌کار رود. ولی می‌توان، این قضیه را، درشکل تعمیم‌یافته [۳۰۴، ۱۰°] مورد استفاده‌قرارداد.

قضیهٔ اول مربوط به‌مقدارهای میانگین. تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ را، در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر و، ضمناً $f(x)$ را کران‌دار می‌گیریم:

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

و فرض می‌کنیم که $g(x)$ تغییر علامت ندهد؛ در این صورت، تابع $f(x).g(x)$ هم

انتگرال‌پذیر می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$$

که درآن داریم: $m\leqslant\mu\leqslant M$.

وجود انتگرال را می‌توان از قضیهٔ آخر شمارهٔ **۴۷۵** ومشابه آن قضیهٔ **۴۸۲** نتیجه گرفت؛ خود برابری هم، به‌طور صوری، شبیه حالت انتگرال‌های ویژه ثابت می‌شود.

اگر تابع $f(x)$، دربازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، درآن صورت m و M را می‌توان، به‌ترتیب، بزرگترین وکوچکترین مقدار $f(x)$ دربازهٔ $[a, b]$ گرفت وضریب μ، به‌عنوان یکی ازمقدارهای تابع $f(x)$ می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

که در آن، c درون بازهٔ $[a, b]$ واقع است. این برابری، برای حالتی هم، که بازهٔ $[a, b]$ نامتناهی باشد، درست است، زیرا قضیه‌های ویرشتراس و بولزانو-کوشی [۸۵، ۸۲] برای این حالت هم درست‌اند. از خواننده می‌خواهیم، خود به‌این مطلب بپردازد.

قضیهٔ زیرهم درست است [با ۳۰۶، ۱۴° مقایسه کنید].

قضیهٔ دوم دربارهٔ مقدارهای میانگین. فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ یکنوا و کران‌دار در بازهٔ $[a, b]$ و تابع $g(x)$ انتگرال‌پذیر در این بازه باشد؛ آن‌وقت تابع $f(x)\cdot g(x)$ هم انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=f(a)\int_{\substack{a\\(a\leqslant\xi\leqslant b)}}^{\xi} g(x)dx+f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx$$

برای مشخص بودن وضع، حالتی را درنظر می‌گیریم که a متناهی و $b=+\infty$ باشد و برای $g(x)$، نقطهٔ خاص دیگری وجود نداشته باشد. وجود انتگرال را می‌توان از معیار آبل نتیجه گرفت.

بدون این‌که به‌کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد آید، می‌توان تابع $f(x)$ را نزولی به‌حساب آورد. باتوجه به‌کران‌داربودن $f(x)$، حدمتناهی زیروجود دارد:

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

آن‌وقت $f^*(x)=f(x)-f(+\infty)\geqslant 0$. برای بازهٔ متناهی $[a, A]$ داریم [۳۰۶، ۱۳°]:

$$\int_a^A f^*(x)g(x)\,dx = f^*(a)\int_a^\eta g(x)dx \quad (a\leqslant\eta\leqslant A) \qquad (۳)$$

تابع پیوستهٔ $\int_a^A g(x)dx$ (که تابعی نسبت بـه A است)، در بازهٔ $[a, +\infty]$ ، دارای مرزهای محدود m و M است، به‌طوری‌که [(۳) را ببینید]:

$$m\cdot f^*(a)\leqslant\int_a^A f^*(x)g(x)\,dx\leqslant M\cdot f^*(a)$$

ودرحد، به‌ازای $A\to+\infty$

$$m\cdot f^*(a)\leqslant\int_a^{+\infty} f^*(x)g(x)dx\leqslant M\cdot f^*(a)$$

ازآن‌جا

$$\int_a^{+\infty} f^*(x)g(x)dx=\mu\cdot f^*(a),\ m\leqslant\mu\leqslant M \qquad (۴)$$

ولی تابع پیوستهٔ $\int_a^A g(x)dx$ ، به‌مرزهای خود m و M می‌رسد وهرمقدار بین‌آن‌ها را قبول می‌کند، یعنی

$$\mu=\int_a^\xi g(x)dx \quad (a\leqslant\xi\leqslant+\infty)$$

اگر در (۴) فرض کنیم $f^*(x)=f(x)-f(+\infty)$ وعبارتی راکه برای μ در نظر گرفتیم، به‌حساب بیاوریم، به‌اثبات رابطه می‌رسیم.

۴۸۸. انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء درحالت انتگرال‌های ناویژه. تابع‌های $u=u(x)$ و $v=v(x)$ را، همراه با مشتق‌های اول خود، در همهٔ نقطه‌هـای بازهٔ $[a, b]$ ـ به‌جـز نقطهٔ b (که برابر $+\infty$ هم می‌تواند باشد)، معین و پیوسته می‌گیریم. آن‌وقت، برابری

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

برقرار است، به‌شرطی‌که، برای تبدیل دوگانهٔ بالا، تفاضل زیردرنظر گرفته شود:

$$\lim_{x\to b} u(x)v(x)-u(a)v(a)$$

ضمناً، فرض می‌شود که ازسه‌عبارت داده‌شده در برابری (دو انتگرال ویك تبدیل‌مضاعف)، دوتا دارای معنی باشد: وجود سومی، نتیجه‌ای از آن‌ها است.

درواقع، با فرض $a<x_0<b$، دستور معمولی انتگرال گیری جزء به‌جزء را، برای بازهٔ $[a; x_0]$، که در آن‌جا همهٔ انتگرال‌ها ویژه هستند، می‌نویسیم:

$$\int_a^{x_0} udv=[u(x_0)v(x_0)-u(a)v(a)]-\int_a^{x_0} vdu$$

اکنون فرض‌می‌کنیم، دراین‌برابری، x_0 به‌سمت b میل کند. بنا به‌شرط، دوتا ازعبارت‌های واردر آن، دارای حدهای متناهی، به‌ازای $x_0 \leftarrow x$ می‌باشند*، درنتیجه؛ عبارت سوم‌هم دارای حد متناهی است. برای اثبات، باید به‌سمت حد عبور کرد.

۴۸۹. مثال‌ها.

۱) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = x \ln \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tgx}dx$$

دراین‌جا، باانتگرال گیری جزء به‌جزء، انتگرال ناویژه به‌انتگرال ویژه منجر و، درنتیجه، وجود انتگرال ناویژه، ثابت می‌شود [با ۴۸۳، ۲)، (c) مقایسه کنید]. مثال‌های بعدی هم همین خصوصیت را دارند.

۲) (a). $$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1 \ln x\cdot d\operatorname{arc} tgx=$$

$$=(\ln x\cdot \operatorname{arc} tgx)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} tg\, x}{x}dx=-\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} tg\, x}{x}dx$$

(b). و به‌همین ترتیب

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_0^1 \frac{\operatorname{arc}\sin x}{x}dx$$

۳) $$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}dx=-\int_a^\infty \frac{d\cos x}{x}=-\frac{\cos x}{x}\Big|_a^\infty-\int_a^\infty \frac{\cos x}{x}dx \quad (a>0)$$

با توجه به‌این‌که، هردو عبارت سمت راست، دارای معنا هستند، بنابراین، وجود انتگرال

---

*) یادداشت شماره ۴۷۷ را ببینید.

سمت چپ، ثابت می‌شود [با ۴۷۶ و ۴۷۷ مقایسه کنید].

به‌همین ترتیب، می‌توان وجود انتگرال $\int_0^b \frac{f(x)}{x^\lambda}dx$ $(a, \lambda>0)$ را، بـه شرط پیوسته بودن تابع $f(x)$ و کران‌دار بودن انتگرال آن $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ ـ به‌ازای هر $x>a$ ـ ثابت کرد [که از معیار دیریکله هم نتیجه می‌شود].

به‌کمک انتگرال جزء‌به‌جزء، یکبار دیگر به‌دستورهای کاهشی می‌رسیم که، به‌یاری آن‌ها، می‌توان انتگرال‌های مفروض را محاسبه کرد. این مطلب را، با مثال‌های بعد روشن می‌کنیم (n و k عددهای طبیعی‌اند):

۴) $I_n=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^n dt$. داریم:

$$I_n=e^{-t}\cdot t^n\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{n-1}dt=nI_{n-1}$$

و از آن‌جا: $I_n=n!$.

صفر شدن جمله اول سمت راست تساوی در این‌جا (و در مثال‌های بعدی)، امتیازی برای استفاده از انتگرال گیری جزء‌به‌جزء در انتگرال‌های معین (و نه انتگرال‌های نامعین) به‌شمار می‌رود.

۵) $E_n=\int_0^\infty e^{-ax}\sin^n x\,dx$ $(a>0)$.

قبل از همه، با انتگرال گیری جزء‌به‌جزء، پیدا می‌کنیم:

$$E_n=-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin^n x\Big|_0^\infty+\frac{n}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{n-1}x\cos x\,dx$$

وچون جملهٔ اول سمت راست تساوی برابر صفر است، اگر دوباره از انتگرال گیری جزء‌به‌جزء استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$E_n=-\frac{n}{a^2}e^{-ax}\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^\infty+\frac{n(n-1)}{a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx-$$

$$-\frac{n}{a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin^n x\,dx$$

اگر در این‌جا، $\cos^2 x$ را به $1-\sin^2 x$ تبدیل کنیم، به‌آسانی، به‌دستور کاهشی می‌رسیم:

$$E_n=\frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot E_{n-2}$$

چون $E_0\overset{6}{=}\frac{1}{a}$ و $E_1=\frac{1}{1+a^2}$، بالاخره، برای حالت‌های فرد و زوج n، به‌ترتیب، داریم:

$$E_{2k-1}=\frac{(2k-1)!}{(1+a^2)(3^2+a^2)\dots(\overline{2k-1}^2+a^2)},$$

$$E_{2k}=\frac{(2k)!}{a(1+a^2)(4^2+a^2)\dots(\overline{2k}^2+a^2)}$$

۶) دستور تعمیم‌یافتهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء [۳۱۱، (۷)] را، می‌توان در مورد حالت انتگرال‌های ناویژه هم به‌کار برد.

به‌عنوان مثال، این انتگرال را در نظر می‌گیریم:

$$K=\int_0^\infty e^{-(p+1)x}\cdot L_n(x)\,dx$$

که در آن، $p>0$ و $L_n(x)$ به معنای چند جمله‌ای nام چبیشف ـ لاگر (E. Laguerre) است:

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}\quad(n=0,1,2,\dots)$$

اگر از دستور مذکور استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$K=\int_0^\infty e^{-px}\cdot\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}dx=$$

$$=\left\{e^{-px}\cdot\frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}e^{-px}}{dx^{n-1}}\cdot x^n\cdot e^{-x}\right\}\Big|_0^\infty+$$

$$+(-1)^n\int_0^\infty x^n e^{-x}\cdot\frac{d^n e^{-px}}{dx^n}dx = p^n\int_0^\infty x^n e^{-(p+1)x}dx$$

و سرانجام [۴] را ببینید]:

$$K=\frac{p^n}{(p+1)^{n+1}}\cdot n!$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty e^x L_n(x)\cdot L_k(x)dx=\begin{vmatrix}0 & (k\neq n)\\ (n!)^2 & (k=n)\end{vmatrix}$$

۴۹۰. تغییر متغیر در انتگرال‌های ناویژه. فرض کنیم، تابع $f(x)$ در یك بازهٔ متناهی یا نامتناهی $[a, b)$ معین و پیوسته باشد که، در نتیجه، در هر بخشی که شامل b نباشد (b می‌تواند $+\infty$ هم بشود)، به معنای ویژه، انتگرال‌پذیر می‌شود. نقطهٔ b، بنا به‌فرض، تنها نقطهٔ خاص برای تابع $f(x)$ است.

حال، تابع صعودی یکنوای $x=\varphi(t)$ را در نظر می‌گیریم، که همراه با مشتق‌خود $\varphi'(t)$ در بازهٔ $[\alpha, \beta)$ پیوسته باشد و، در آن، β برابر $+\infty$ هم می‌تواند باشد. فرض می‌کنیم $\varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$. در مورد رابطهٔ اخیر، منظور ما این است که: $\lim_{t\to\beta}\varphi(t)=b$.

با توجه به‌این شرط‌ها، این برابری را داریم:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (۵)$$

با این فرض که یکی‌از انتگرال‌ها وجود داشته‌باشد (وجود انتگرال دوم، بلافاصله‌نتیجه می‌شود). انتگرال دوم ــ که ممکن است ویژه باشد یا ناویژه ــ دارای نقطهٔ خاص منحصر به‌فرد β است.

از روی قضیهٔ مربوط به‌تابع‌های معکوس [۸۳]، روشن است که t را هم می‌توان به‌عنوان تابعی صعودی یکنوا و پیوسته از x در $[a, b)$ در نظر گرفت: $t=\theta(x)$، $\lim_{x\to b}\theta(x)=\beta$.

x_0 و t_0 را دلخواه، ولی متناظر یکدیگر از x و t و در بازه‌های (a, b) و (α, β) می‌گیریم. آن‌وقت، به‌کمك تغییر متغیر در انتگرال ویژه، خواهیم داشت:

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = \int_a^{t_0} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

اگر مثلاً، از بین انتگرال‌های (۵)، انتگرال دوم وجود داشته باشد، در آن صورت، به‌ترتیب دلخواهی، x_0 را به b نزدیك می‌کنیم؛ ضمناً $t_0=\theta(x_0)$ به‌سمت β میل می‌کند و رابطهٔ (۵)، همزمان با اثبات وجود انتگرال سمت چپ، مدلل می‌شود.

از همین بحث، برای حالتی که تابع $\varphi(x)$ نزولی یکنوا و $\alpha>\beta$ باشد، نیز می‌توان استفاده کرد. و به‌همین ترتیب، می‌توان همهٔ حالت‌های مختلف استقرار نقطه‌های خاص را، مورد بررسی قرار داد. برای گذاشتن مرزها در انتگرال‌های تبدیل‌یافته، باید همیشه به‌خاطر داشت که مرز پایینی α با مرز پایینی a و مرز بالایی β با مرز بالایی b متناظر باشد، بدون توجه به‌این‌که α کوچکتر است از β یا بزرگتر است از آن.

۴۹۱. مثال‌ها. ۱) انتگرال $\int_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}}$ $(k^2<1<x_0)$ و با تبدیل $x=\frac{1}{t^2}$ و $dx=-\frac{2}{t^3}dt$، به‌این انتگرال منجر می‌شود:

$$-2\int_{\frac{1}{\sqrt{x_0}}}^{0}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x_0}}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

در این‌جا $a=x_0$، $b=\infty$ و $\alpha=\frac{1}{\sqrt{x_0}}$، $\beta=0$ است. انتگرال ناویژه به انتگرال ویژه تبدیل می‌شود.

۲) انتگرال

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

را، با تبدیل $x=a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi$، محاسبه کنید.

راهنمائی. در این‌جا $\alpha=0$ و $\beta=\frac{\pi}{2}$ و انتگرال مفروض به‌انتگرال ویژهٔ زیر منجر می‌شود:

$$۲\int_{۰}^{\pi} d\varphi = \pi$$

۳) برای اثبات تقارب انتگرال $\int_{۰}^{\infty} \sin x^{۲} dx$، تغییر متغیر $x = \sqrt{t}$، $dx = \frac{dt}{۲\sqrt{t}}$، $a = \alpha = ۰$ و $b = \beta = \infty$ را انجام می‌دهیم. به انتگرال آشکارا متقارب $\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ [۴۷۶ یا ۴۸۹، ۳)] می‌رسیم، در نتیجه، انتگرال مفروض هم متقارب است. جالب است توجه کنیم که تابع زیرعلامت انتگرال، به‌ازای $x \to \infty$، با نوسان بین -۱ و $+۱$، به‌سمت هیچ حدی میل نمی‌کند.

به‌همین ترتیب، می‌توان مسالهٔ مربوط به تقارب انتگرال $\int_{۰}^{\infty} \cos x^{۲} dx$ را حل کرد.

در مثال بعدی، به‌نتیجه کلی‌تری می‌رسیم.

۴) ثابت کنید که انتگرال‌های

$$\int_{۰}^{\infty} \sin(f(x))dx, \quad \int_{۰}^{\infty} \cos(f(x))dx$$

در صورتی که $f'(x)$ به‌طور یکنوا صعودی باشد و، به‌ازای $x \to \infty$، به‌سمت ∞ میل کند، متقارب می‌شوند.

به‌ازای مقدارهای به قدر کافی بزرگ x، داریم $f'(x) > ۰$ و، در نتیجه، $f(x)$ صعودی یکنواست؛ فرض می‌کنیم که، با شروع از $x = a$، چنین باشد. به‌کمک دستور نموهای محدود، به‌دست می‌آوریم:

$$f(x+۱) = f(x) + f'(x+\theta) \geqslant f(a) + f'(x)$$

در نتیجه، به‌ازای $x \to \infty$، خود تابع $f(x)$ به‌سمت ∞ میل می‌کند. متغیر جدید $t = f(x)$ را وارد می‌کنیم، به‌نحوی که اگر تابع معکوس f را با g نشان دهیم:

$$x = g(t), \quad dx = g'(t)dt \quad [\alpha = f(a), \beta = \infty]$$

ولی مشتق $g'(t) = \frac{۱}{f'(x)}$ به‌طور یکنوا نزول می‌کند و، به‌ازای $t \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند. به‌این جهت، انتگرال‌های تبدیل شدهٔ

$$\int_{f(a)}^{\infty} \sin t \cdot g'(t)dt, \quad \int_{f(a)}^{\infty} \cos t \cdot g'(t)dt$$

با توجه به‌معیار دیریکله متقارب می‌شوند و، همراه بـا آن‌ها، انتگرال‌هـای مفروض هم متقارب خواهند بود.

۵) برای محاسبهٔ انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^2}$ [کـه تقارب آن را، در ۴۸۳، ۵) (b) ثابت کردیم]، آن‌را به‌دوانتگرال تجزیه‌می‌کنیم: $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$. در موردانتگرال دوم، تبدیل $x = \frac{1}{t}$ $(a=1, b=\infty, \alpha=1, \beta=0)$ را انجام می‌دهیم؛ به‌این‌انتگرال می‌رسیم:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^2} = \int_1^{0} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

از این‌جا نتیجه می‌شودکه مقدار انتگرال مفروض مساله، برابر صفر است.

۶) انتگرال ناویژهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

این انتگرال، بـا تبدیل $x = \sin t$ $\left(a=0, b=1, \alpha=0, \beta=\frac{\pi}{2}\right)$، منجر به‌انتگرال ویژهٔ زیر می‌شود:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin t} dt$$

۷) محاسبهٔ انتگرال

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

[با ۴۷۲، ۲) مقایسه کنید] را، می‌توان با استفاده از یك تبدیل مناسب، ساده‌کرد.

قبل از همه، انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$$

با تبدیل $x=\frac{1}{t}$ $(a=0,\ b=\infty,\ \alpha=\infty,\ \beta=0)$، به‌انتگرال مفروض منجر می‌شود، به‌نحوی که می‌توان نوشت:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

اگر حالا به‌تبدیل $x-\frac{1}{x}=z$ $(a=0,\ b=+\infty,\ \alpha=-\infty,\ \beta=+\infty)$ متوسل شویم، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{z^2+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

۸) برای محاسبهٔ انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{tg\theta}}$، به طور طبیعی $t=\sqrt{tg\theta}$ می‌گذاریم، یعنی $\theta=\operatorname{arc\,tg}t^2$ $\left(a=0,\ b=\frac{\pi}{2},\ \alpha=0,\ \beta=\infty\right)$، به‌انتگرالی می‌رسیم که هم‌اکنون محاسبه کردیم: $2.\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

۹) دستورهای زیر را ثابت کنید:

(a) $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}\quad(\alpha>1)$$

(b) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x^2-\alpha^2)\sqrt{x^2-1}}=\frac{\operatorname{arc\,sin}\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\quad(0<\alpha<1)$$

$$(c)\quad \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}\qquad(\alpha>0)$$

$$(d)\quad \int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{x^2-1}}=\frac{\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}\qquad(\alpha>0)$$

$$(e)\quad \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{x^2+1}}=\frac{\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}\qquad(\alpha>1)$$

$$=1\qquad(\alpha=1)$$

$$=\frac{\arccos\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\qquad(0<\alpha<1)$$

راهنمائی. در همهٔ حالت‌ها، از تبدیل آبل [۲۸۴] استفاده کنید.

۱۰) مسالهٔ مربوط به تقارب انتگرال‌های

$$\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^{\lambda}x},\quad \int_{A}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln^{\lambda}(\ln x)}\qquad(\lambda>0,\ a>1,\ A>e)$$

فوراً قابل حل است. با تبدیل‌های

$$t=\ln x,\quad u=\ln(\ln x)$$

به‌این انتگرال‌ها می‌رسیم:

$$\int_{\ln a}^{\infty}\frac{dt}{t^{\lambda}},\quad \int_{\ln(\ln A)}^{\infty}\frac{du}{u^{\lambda}}$$

که هر دو، به‌ازای $\lambda>1$، متقارب و به‌ازای $\lambda\leqslant 1$ متباعدند.

در تمرین‌های بعد، منظور از $f(u)$، تابع دلخواهی است که، به‌ازای $u\geqslant 0$، پیوسته است.

۱۱) به‌شرط متقارب بودن انتگرال‌ها، ثابت کنید:

$$\int_{0}^{\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\ln x\frac{dx}{x}=\ln a\int_{0}^{\infty}f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}\qquad(a>0)$$

راهنمائی. تبدیل $x=ae^{u}$ ($\alpha=-\infty$، $\beta=+\infty$) را انجام دهید.

۱۲) به‌شرط $p>0$ و تقارب انتگرال‌ها، ثابت کنید:

$$\text{(a)}\quad \int_0^{\infty} f(x^p+x^{-p})\ln x\frac{dx}{x}=0$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^{\infty} f(x^p+x^{-p})\ln x\frac{dx}{1+x^2}=0$$

مثلاً، برای (a) داریم: $\int_0^{\infty}=\int_0^1+\int_1^{\infty}$، ولی $\int_1^{\infty}=-\int_0^1$، که با تبدیل $x=\frac{1}{t}$، می‌توان به‌سادگی به‌آن رسید وغیره.

۱۳) با فرض متقارب‌بودن انتگرال سمت‌راست برابری، این‌دستور را ثابت‌کنید:

$$\int_0^{\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx=\frac{1}{A}\int_0^{\infty} f(y^2)dy \quad (A, B>0)$$

تبدیل $y=Ax-\frac{B}{x}$ $(a=-\infty, b=+\infty, \alpha=0, \beta=+\infty)$ می‌دهد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)dy=\int_0^{\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\cdot\left(A+\frac{B}{x^2}\right)dx=$$

$$=A\int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx+B\int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\cdot\frac{dx}{x^2}$$

ولی، انتگرال‌آخری، با تبدیل $x=-\frac{B}{At}$ $(a=0, b=+\infty, \alpha=-\infty, \beta=0)$، منجر می‌شود به

$$A\int_{-\infty}^{0} f\left[\left(At-\frac{B}{t}\right)^2\right]dt$$

به‌نحوی که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)dy=A\int_{-\infty}^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx$$

که از آن‌جا، با توجه به‌زوج بودن تابع زیر انتگرال، دستور مطلوب به‌دست می‌آید.

۱۴) در پایان، با در اختیار داشتن تغییر متغیر در انتگرال‌های ناویژه، به مساله‌ای

برمی‌گردیم کـه، قبلاً، آن‌را تمام نکرده بودیم. در شمارهٔ ۴۳۹، ۱)، پیوستگی تابع زیر را مورد بررسی قرار دادیم:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^p.x^2.n^q}$$

ولی، رفتار آن‌را در نقطهٔ $x=0$، در حالت $0\leqslant p<1$، $q>1$ و $p+q\leqslant 2$، روشن نکردیم.

با استفاده از رابطهٔ (10a) در شمارهٔ ۳۷۳ (در پاورقی)، می‌توان مجموع رشته را، از طرف پایین، به‌کمك انتگرال

$$f(x)\geqslant\frac{xdt}{t^p+t^q.x^2}$$

برآورد کرد. در این‌جا، با فرض $t=x^{-\frac{2}{q-p}}$، نابرابری را این‌طور می‌نویسیم:

$$f(x)\geqslant x^{\frac{p+q-2}{q-p}}\int_{x^{\frac{2}{q-p}}}^{+\infty}\frac{dv}{v^p+v^q}$$

انتگرال، به‌ازای $x\longrightarrow +0$، به‌سمت حد متناهی و مثبت زیر میل می‌کند:

$$\int_0^{\infty}\frac{v^p+v^q}{dv}$$

و ضریب انتگرال، یا برابر ۱ می‌شود (اگر $p+q=2$) و یا، به‌ازای $x\longrightarrow +0$، به‌سمت ∞ میل می‌کند (اگر $p+q<2$). چون داریم $f(0)=0$، پس در سمت راست برابری، در نقطهٔ $x=0$، در همهٔ حالت‌ها، ناپیوستگی وجود دارد؛ و همین‌طور، برای سمت چپ.

یادداشت. هر انتگرال با حد بی‌نهایت $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ را همیشه می‌توان با تبدیل مناسبی، به‌انتگرال با حدهای متناهی (ویژه یا ناویژه) درآورد. مثلاً، در حالت $a>0$، می‌توان $x=\frac{1}{t}$، فرض کرد:

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{a}}f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$$

برعکس، انتگرال ناویژهٔ $\int_a^b f(x)dx$، با یك نقطهٔ ویژهٔ b، همیشه می‌تواند بـه‌انتگرال با حد نامتناهی (و بدون نقطهٔ ویژه) درآید. مثلاً، با فرض $x=b-\frac{1}{t}$، به‌دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty}\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$$

§۴. روش‌های خاص محاسبهٔ انتگرال‌های ناویژه

۴۹۲. بعضی از انتگرال‌های مهم. ازمحاسبهٔ چندانتگرال مهم، که به‌کمك‌روش‌های نامتعارف انجام می‌گیرند، آغاز می‌کنیم.

۱°. انتگرال اولر (L. Euler):

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$$

به‌وجود این انتگرال، قبلاً قانع شده‌ایم. محاسبهٔ انتگرال اولر، براساس استفاده از تغییر متغیر، پایه‌گذاری شده است. با فرض $x=2t$ داریم:

$$J=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt$$

انتگرال آخری را، بـا گذاشتن $t=\frac{\pi}{2}-u$، به‌صورت $2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,du$ در می‌آوریم، به‌طوری‌که، سرانجام، برای تعیین J، معادلهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$J=\frac{\pi}{2}\ln 2+2J\ \Rightarrow\ J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

انتگرال‌هـای ناویژهٔ زیر [۴۸۹،۱) و ۲) ـ (b) را ببینید] هم، با تقریب علامت، به‌همین انتگرال تبدیل می‌شوند:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tgx}dx \quad \text{و} \quad \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx$$

۲°. به‌انتگرال اولر - پواسون می‌پردازیم:

$$K=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

که به‌خصوص، در نظریهٔ احتمال، کاربرد فراوان‌دارد. قبلاً، یك‌نابرابری‌را ثابت‌می‌کنیم.

با روش‌های معمول محاسبهٔ دیفرانسیلی، بدون اشکال، ثابت می‌شودکه تابع $(1+t).e^{-t}$، در نقطهٔ $t=0$، به‌بزرگترین مقدار خود، یعنی ۱، می‌رسد. در نتیجه، برای $t\geqslant 0$ داریم:

$$(1+t).e^{-t}<1$$

اگر در این‌جا، $t=\pm x^2$ بگیریم. به‌دست می‌آید:

$$(1-x^2).e^{x^2}<1, \quad (1+x^2).e^{-x^2}<1$$

و از آن‌جا

$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1-x^2} \quad (x>0)$$

با اکتفا به x در بازهٔ $(0, 1)$ (زیرا $1-x^2>0$) در نابرابری اول، و با در نظرگرفتن x غیرمشخص درنابرابری دوم، این‌عبارت‌ها را به‌توان‌نمای طبیعی دلخواه nمی‌رسانیم*، به دست می‌آید:

$$(1-x^2)^n<e^{-nx^2} \quad \text{و} \quad e^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n}$$
$$(0<x<1) \qquad (x>0)$$

با انتگرال‌گیری از نابرابری اول از ۰ تا ۱ و از دومی از ۰ تا $+\infty$، نتیجه می‌گیریم:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx<\int_0^1 e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

---

*) وقتی که هر دو طرف یك نابرابری مثبت باشد، می‌توان دو طرف آن را به توان طبیعی رسانید.

ولی

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot K \quad (\text{تبدیل } u=\sqrt{n}x)$$

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \quad (\text{تبدیل } x=\cos t)$$

و بالاخره

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t\,dt=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \quad (\text{تبدیل } x=\cot gt)$$

[در این‌جا، از عبارت معلوم برای انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx$ (۳۱۲، (۸)) استفاده کردیم].

بنابراین، مقدار مجهول K، محصور بین این‌دو عبارت می‌شود:

$$\sqrt{n}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<K<\sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

به‌نحوی که، با رساندن به‌توان دوم و تبدیل‌های لازم، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}<$$

$$<K^2<\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{[(2n-3)!!]^2(2n-1)}{[(2n-2)!!]^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

ازرابطهٔ والیس [۳۱۷]:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}$$

اکنون به‌سادگی دیده می‌شود که هردو عبارت دوطرف نابرابری، به‌ازای $n\to\infty$، به‌سمت حد $\frac{\pi}{4}$ میل می‌کنند، درنتیجه

$$K^2=\frac{\pi^2}{4}\text{ و }K=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ (K>0 \text{ زیرا})$$

۳°. بالاخره، به‌این انتگرال می‌پردازیم:

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

ازقبل می‌دانیم که این انتگرال متقارب است [۴۷۶، ۴۷۷، ۴۸۹ـ۳)]. انتگرال را به‌صورت مجموع رشته نشان می‌دهیم:

$$I=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\nu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{2}}$$

با فرض $\nu=2\mu$ یا $2\mu-1$ و، انتگرال‌گیری، به ترتیب با تبدیل $x=\mu\pi+t$ یا $x=\mu\pi-t$، خواهیم داشت:

$$\int_{2\mu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2\mu+1)\frac{\pi}{2}}=(-1)^{\mu}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\mu\pi+t}dt$$

و

$$\int_{(2\mu-1)\cdot\frac{\pi}{2}}^{2\mu\cdot\frac{\pi}{2}}=(-1)^{\mu-1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\mu\pi-t}dt$$

ازآن‌جا

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt+\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\sin t\,dt$$

چون رشتهٔ

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\sin t$$

در بازهٔ $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$، به‌طور یکنواخت، متقارب می‌شود، زیرا به‌وسیلهٔ رشتهٔ متقارب $\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\mu^{2}-\frac{1}{4}}$، محدود می‌شود، بنابراین، می‌توان آن را جمله به‌جمله انتگرال‌گیری کرد.

این، به‌ما حق می‌دهد تا عبارت I را به‌این صورت بنویسیم:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot\left[\frac{1}{t}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\right]dt$$

ولی عبارت داخل کروشه، همان بسط $\frac{1}{\sin t}$ به‌کسرهای ساده است [۴۴۱، ۹)]. به‌این ترتیب، سرانجام

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi}{2}$$

این نتیجه‌گیری ظریف، متعلق به‌لباچوسکی است که، برای نخستین‌بار، به‌دقیق‌نبودن روش‌هایی که قبلاً، برای محاسبهٔ این انتگرال به‌کار می‌رفت، توجه کرد.

۴۹۳. محاسبهٔ انتگرال‌های ناویژه، به‌کمک مجموع‌های انتگرالی. حالت انتگرال‌های با مرزهای متناهی. اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ کران‌دار نباشد، در آن صورت، روشن است که نمی‌توان محاسبهٔ انتگرال آن را، در این بازه، به‌کمک مجموع‌های دلخواه انتگرالی (ریمانی) انجام داد. ولی، همیشه می‌توان این مجموع‌ها را طوری انتخاب کرد که این گونه انتگرال‌ها، در بازه‌های جزئی که از خرد کردن بازهٔ اصلی به‌دست آمده‌اند، به‌سمت مقدار انتگرال‌های ناویژه میل کنند، این حکم را، برای حالت سادهٔ تابع یکنوا، ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, ۰)$ $(a>۰)$، مثبت و به‌طور یکنوا نزولی باشد، به‌ازای $x \to ۰$، به‌سمت $+\infty$ میل کند. ضمناً، فرض می‌کنیم، برای آن، انتگرال ناویژه از ۰ تا a وجود داشته باشد. اگر بازهٔ $[a, ۰)$ را به n بخش برابر تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{\frac{\nu}{n}a}^{\frac{\nu+1}{n}a} f(x)\,dx<\int_{0}^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx+\sum_{\nu=1}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\cdot\frac{a}{n}$$

و به‌خصوص

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx<\int_{0}^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx+\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\cdot\frac{a}{n}$$

درعین‌حال، روشن است که

$$\int_0^a f(x)\,dx > \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\cdot\frac{a}{n}$$

ودرنتیجه، درمجموع، داریم:

$$0 < \int_0^a f(x)\,dx - \frac{a}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right) < \int_0^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx$$

وچون انتگرال آخری، به‌ازای $n \to \infty$، به سمت صفرمیل می‌کند*، سرانجام، خواهیم داشت:

$$\int_0^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\cdot\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)$$

درحالتی هم که $f(x)$، تابعی مثبت و صعودی باشد و، به‌ازای $x \to a$، به‌سمت $+\infty$ میل کند، به‌ترتیب مشابهی، خواهیم داشت:

$$\int_0^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\cdot\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}a\right)$$

بالاخره، با تعویض‌علامت f، می‌توان برای تابع منفی یکنوا هم، دستور موردنظر را به‌دست آورد.

به‌چند مثال می‌پردازیم: ۱) برای محاسبهٔ انتگرال $\int_0^1 \ln x\,dx$ (با نقطهٔ خاص ۰)

داریم:

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\ln\frac{\nu}{n} = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

---

*) این انتگرال عبارت است از تفاضل بین انتگرال ناویژهٔ $\int_0^a$ و انتگرال $\int_{\frac{a}{n}}^a$، که به سمت آن میل می‌کند.

وچون $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$ [۷۷، ۴)]، بنابراین، حد قبلی برابر ۱ — می‌شود و، درواقع، مقدار انتگرال مفروض هم، همین مقدار است.

۲) به‌عنوان مثال دوم، به انتگرال بغرنج‌تری می‌پردازیم: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$. در این حالت

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\ln\sin\frac{\nu\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\ln\prod_{\nu=0}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{2n}$$

اگر بخواهیم عبارت ساده‌ای برای حاصل‌ضرب آخری به‌دست‌آوریم، چندجمله‌ای صحیح حاصل از تقسیم $z^{2n}-1$ بر z^2-1 را درنظر می‌گیریم و آن را به‌عامل‌های خطی تجزیه می‌کنیم و، سپس، عامل‌های متناظر با ریشه‌های مزدوج را به‌صورت یک عامل درمی‌آوریم؛ به‌دست می‌آید (با فرض z حقیقی دلخواه و مخالف ± 1):

$$\frac{z^{2n}-1}{z-1}=\prod_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(z-\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{\nu\pi}{n}\right]^*$$

ازاین‌جا، وقتی $z\to 1$، خواهیم داشت:

$$n=\prod_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\cos\frac{\nu\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{\nu\pi}{n}\right]=4^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin^2\frac{\nu\pi}{2n}$$

به‌نحوی که سرانجام

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

به‌این‌ترتیب، انتگرال مجهول، چنین می‌شود:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\ln n-(n-1)\ln 2}{n}=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

[با ۴۹۲، ۱° مقایسه کنید].

---

*) پاورقی انتهای شمارهٔ ۳۰۷ را ببینید.

۴۹۴. حالت انتگرال‌های با مرزهای بی‌نهایت. فرض می‌کنیم که تابع، در بازهٔ از ۰ تا $+\infty$، معین و انتگرال‌پذیر باشد. این بازه را، به‌مجموعه‌ای نامتناهی از بازه‌های به طول $h>0$ تجزیه می‌کنیم و مجموع $\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h).h$ را، که از نظر ساختار خود مجموع ریمانی را به‌یاد می‌آورد، تشکیل می‌دهیم. آیا این رشته متقارب است؟ آیا مجموع آن، به‌ازای $h \to 0$، به‌سمت انتگرال ناویژهٔ $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ میل می‌کند؟ این همان مساله‌ای است که، با بعضی فرض‌های خاص دربارهٔ $f(x)$، به‌آن می‌پردازیم.

ابتدا فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$ مثبت و به‌طور یکنوا نزولی باشد و، وقتی $x \to \infty$، به‌سمت ۰ میل کند؛ آن‌وقت

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\nu h}^{(\nu+1)h} f(x)\,dx < h.\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h)$$

ازطرف دیگر، روشن است که

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx > h.\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu h) = h\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) - h.f(0)$$

به‌نحوی که

$$0 < h.\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) - \int_0^{\infty} f(x)dx < h.f(0)$$

و

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{h\to 0} h.\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) \qquad (۱)$$

مثال‌ها. ۱) $f(x)=e^{-x}$ می‌گیریم. آن‌وقت

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{h\to 0} h.\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{1-e^{-h}} = 1$$

۲) با معلوم بودن مقدار انتگرال

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

می‌توانیم، با استفاده از آن، به‌دست آوریم:

$$\lim_{h\to 0} h\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu^2h^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

اگر فرض کنیم $t=e^{-h^2}$، در آن صورت، وقتی $t\to 1$، داریم: $h=\sqrt{\ln\frac{1}{t}}\sim\sqrt{1-t}$.

از آن‌جا، به‌رابطهٔ جالب زیر می‌رسیم:

$$\lim_{t\to 1-0}\sqrt{1-t}\cdot(1+t+t^4+t^9+t^{16}+\dots)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ممکن است پیش آید که شرط یکنوا و نزولی بودن تابع $f(x)$، تنها به‌ازای $x\geqslant A>0$ برقرار باشد. این وضع، مانع به‌کاربردن روش مذکور برای تابع‌های یکنوا، نمی‌شود. تنها باید مراقب بود که نسبت $\frac{A}{h}$، عددی درست باشد. آن‌وقت، بنا بر تعریف انتگرال ویژه

$$\lim_{h\to 0}\sum_{\nu=0}^{\frac{A}{h}-1} f(\nu h)\cdot h=\int_0^A f(x)dx \qquad (۲)$$

و بنا بر آن‌چه در بالا ثابت شد:

$$\lim_{h\to 0}\sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h)\cdot h=\int_A^{\infty} f(x)\,dx$$

در این مورد، مثالی می‌آوریم.

۳) فرض کنیم $f(x)=x\cdot e^{-x}$. این تابع، با آغاز از $x=1$، به‌طور یکنوا نزولی است. با وجود این

$$\int_0^{\infty} x\cdot e^{-x}dx=\lim_{h\to 0}h^2(e^{-h}+2e^{-2h}+3e^{-3h}+\dots)=$$

$$=\lim_{h\to 0}h^2e^{-h}(1-e^{-h})^{-2}=\lim_{h\to 0}e^h\left(\frac{h}{e^h-1}\right)^2=1$$

که به‌سادگی، و به کمک انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، قابل تحقیق است.

به‌حالت کلی‌تر می‌پردازیم، وقتی‌که از $f(x)$، جز انتگرال‌پذیری آن، چیز دیگری خواسته نشود داریم:

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^A f(x)dx+\int_A^\infty f(x)dx$$

که اگر A را به‌قدر کافی بزرگ بگیریم، انتگرال آخری، از لحاظ قدرمطلق، به‌قدر کافی کوچک می‌شود*. A هرچه باشد، در این‌جا هم، h را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{A}{h}$ صحیح باشد. آن‌وقت، به‌ازای $A=\text{const}.$، شبیه آن‌چه هم‌اکنون دیدیم، (۲) برقرار می‌شود. اکنون روشن است که برابری درستی برای (۱)، کافی است شرط زیر هم برقرار باشد:

$$\lim_{\substack{A\to\infty\\ h\to 0}} \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h).h=0 \qquad (۳)$$

درواقع، در این صورت، همهٔ جمله‌های سمت راست برابری

$$\int_0^\infty -\sum_{\nu=0}^{\infty}=\left[\int_0^A -\sum_{\nu=0}^{\frac{A}{h}-1}\right]+\int_A^\infty -\sum_{A=\frac{A}{h}}^{\infty}$$

اگر A به‌قدر کافی بزرگ و h به‌قدر کافی کوچک باشد، به‌دلخواه کوچک می‌شوند.

شرط (۳)، به‌خودی خود، با توجه به‌فرض‌هایی که قبلاً در بازهٔ $f(x)$ داشتیم، برقرار است، زیرا

$$0<\sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h).h<\int_A^\infty f(x)dx$$

این شرط، همچنین، برآورده می‌شود، اگر داشته باشیم: $f(x)=\varphi(x).\psi(x)$، که در آن؛ $\varphi(x)$ (ولو برای $x\geqslant x_0>0$) با شرط‌هایی که قبلاً برای $f(x)$ داشتیم سازگار و $\psi(x)$ کران‌دار باشد: $|\psi(x)|\leqslant L$. در این حالت

---

*) این انتگرال، عبارت است از تفاضل بین انتگرال ناویژه $\int_0^\infty$ و انتگرال ویژهٔ $\int_0^A$ که، به‌ازای $A\to\infty$، به‌سمت اولی میل می‌کند.

$$\left|\sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty}\varphi(\nu h)\cdot\psi(\nu h)\right|\leqslant L_{\circ}\sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty}\varphi(\nu h)\cdot h<L_{\circ}\int_{A}^{\infty}\varphi(x)dx$$

وغیره.

۴) به‌عنوان مثال، انتگرال $\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin^{۲}x}{x^{۲}}dx$ را در نظر می‌گیریم؛ در این‌جا $\varphi(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ و $\psi(x)=\sin^{۲}x$. داریم:

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin^{۲}x}{x^{۲}}dx=\lim_{h\to\circ}h\cdot\sum_{\nu=۱}^{\infty}\frac{\sin^{۲}(\nu h)}{(\nu h)^{۲}}=\lim_{h\to\circ}\frac{۱}{h}\sum_{\nu=۱}^{\infty}\frac{\sin^{۲}(\nu h)}{\nu^{۲}}$$

برای محاسبهٔ مجموع آخری، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$\left\{\sum_{\nu=۱}^{\infty}\frac{\sin^{۲}(\nu h)}{\nu^{۲}}\right\}'_{h}=\sum_{\nu=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲\nu h}{\nu}=\frac{\pi-۲h}{۲}=\frac{\pi}{۲}-h$$

[۶۴۱، ۶)، (b)]. مشتق‌گیری جمله به‌جمله، برای $h\neq\circ$، بنا برقضیهٔ ۷ شمارهٔ ۴۳۵ و با توجه به تقارب یکنواخت رشتهٔ تشکیل شده ازمشتق‌ها [ازروی معیار دیریکله، ۴۳۰]، مجاز است. با انتگرال‌گیری، عبارت $h.\frac{\pi-h}{۲}$ را، برای مجموع موردنظر، پیدا می‌کنیم. ازاین‌جا، بالاخره

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin^{۲}x}{x^{۲}}dx=\lim_{h\to\circ}\frac{\pi-h}{۲}=\frac{\pi}{۲}$$

درحالت‌های دیگر، باید برقراری شرط (۳) را مستقیماً مورد تحقیق قراردهیم.

۵) انتگرال $\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ را در نظر می‌گیریم. به مقدارهای $h=\frac{\pi}{k}$ و $A=m\pi$، که در آن‌ها، k و m عددهایی طبیعی هستند، اکتفا می‌کنیم (روشن است که، دراین مورد، حق داریم).

مجموع مورد علاقهٔ خود را، به‌این صورت نشان می‌دهیم:

$$\sum_{n=km}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h=\sum_{n=km}^{k(m+۱)-۱}+\sum_{n=k(m+۱)}^{k(m+۲)-۱}+\cdots$$

به‌سادگی می‌توان روشن کرد که جمله‌های سمت‌راست، هرکدام علامتی دارند که با عبور به‌جملهٔ بعدی، این علامت عوض می‌شود. درکل، رشتهٔ سمت راست، از نوع لایب‌نیتسی

است. به‌همین مناسبت، مجموع آن از لحاظ قدرمطلق، کمتر ازقدرمطلق جملهٔ اول‌می‌شود. ازطرف دیگر، چون داریم: $kmh = m\pi = A$، بنابراین

$$\left|\sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{\sin nh}{nh}\cdot h\right| = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{|\sin nh|}{nh}\cdot h <$$

$$< \frac{1}{A}\sum_{n=km}^{k(m+1)-1} |\sin nh|\cdot h = \frac{1}{A}\sum_{i=0}^{k-1} \sin ih\cdot h$$

مجموع آخری هم، به‌عنوان مجموع انتگرالی برای انتگرال $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$، به‌ازای h به‌قدر کافی کوچك، کمتر از عدد دلخواه $C > 2$ می‌شود، و آن‌وقت

$$\left|\sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh}\cdot h\right| < \frac{C}{A}$$

که از آن‌جا، برقراری شرط (۳) نتیجه می‌شود.

خود محاسبهٔ انتگرال مفروض، با توجه به‌ملاحظه‌های فوق، به‌طور کاملاً ساده‌ای، منجرمی‌شود به [۴۶۱، ۶)، b) را ببینید]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} = \lim_{h\to 0}\frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2}$$

که قبلاً هم [۴۹۲، ۳°] ازراه دیگری آن را به‌دست آورده بودیم.

۴۹۵. انتگرال‌های فرولانی. مسألهٔ مربوط به‌وجود و محاسبهٔ حالت خاصی از انتگرال‌های ناویژه را درنظر می‌گیریم که، معمولاً، به‌انتگرال‌های فرولانی (G.Froullani) معروف‌اند:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx \quad (a, b > 0)$$

I. دربارهٔ تابع $f(x)$، این فرض‌ها را درنظر می‌گیریم: ۱°. $f(x)$ معین و برای $x \geqslant 0$ پیوسته است، ۲°. حد متناهی زیروجود داشته باشد:

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

از ۱° روشن است که (به‌ازای $0 < \delta < \Delta < +\infty$)، انتگرال

$$\int_0^{\Delta} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_0^{\Delta}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_0^{\Delta}\frac{f(bx)}{x}dx=$$

$$=\int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz$$

وجود دارد. انتگرال مفروض هم، با برابری

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\lim_{\Delta\to 0}\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz$$

معین می‌شود. اگر قضیهٔ تعمیم‌یافته درمورد مقدارهای میانگین را، به‌طور جداگانه، دربارهٔ دو انتگرال آخری به‌کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z}=f(\xi)\cdot\ln\frac{b}{a}\quad(a\delta\leqslant\xi\leqslant b\delta)$$

و به‌همین ترتیب

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\eta)\cdot\ln\frac{b}{a}\quad(a\Delta\leqslant\eta\leqslant b\Delta)$$

وچون به‌روشنی $\xi\to 0$ (به‌ازای $\delta\to 0$) و $\eta\to+\infty$ (به‌ازای $\Delta\to+\infty$)، بنابراین

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}\qquad(۴)$$

مثال‌ها. ۱) درحالت انتگرال

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$$

داریم:

$$f(x)=e^{-x},\ f(0)=1,\ f(+\infty)=0$$

به‌طوری‌که، مقدار انتگرال، برابر $\ln\frac{b}{a}$ می‌شود.

۲) این انتگرال را در نظر می‌گیریم:

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{p+q\cdot e^{-ax}}{p+q\cdot e^{-bx}} \cdot \frac{dx}{x} \quad (p, q>0)$$

با تبدیل لگاریتم خارج‌قسمت، به‌تفاضل لگاریتم‌ها، می‌توان فرض کرد:

$$f(x)=\ln(p+q\cdot e^{-x}),\ f(0)=\ln(p+q),\ f(+\infty)=\ln p$$

پاسخ: $\ln\left(1+\frac{q}{p}\right)\cdot \ln\frac{b}{a}$.

۳) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc}\,tgax-\operatorname{arc}\,tgbx}{x}dx$$

در این حالت داریم: $f(x)=\operatorname{arc}\,tgx$، $f(0)=0$، $f(+\infty)=\frac{\pi}{2}$.

پاسخ: $\frac{\pi}{2}\cdot\ln\frac{a}{b}$.

II. گاهی تابع $f(x)$، به ازای $x \to +\infty$، دارای حد متناهی نیست؛ ولی در عوض، انتگرال

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(z)}{z}dz$$

وجود دارد. اگر در بحثی که داشتیم، Δ را یکباره به $+\infty$ تبدیل کنیم، به‌جای (۴)؛ به‌این نتیجه می‌رسیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\cdot\ln\frac{b}{a} \qquad (4a)$$

مثال ۴) $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\ln\frac{b}{a}$ (زیرا، همان‌طور که می‌دانیم، انتگرال $\int_a^{\infty}\frac{\cos z}{z}dz$ وجود دارد).

III. به‌همین ترتیب، اگر پیوستگی تابع $f(x)$، به‌ازای $x=0$، از بین برود، ولی انتگرال

$$\int_0^A \frac{f(z)}{z}dz \quad (A<+\infty)$$

وجود داشته باشد، در آن‌صورت

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(+\infty)\cdot\ln\frac{a}{b} \qquad (4b)$$

ضمناً، این حالت، با تبدیل

$$x=\frac{1}{t}$$

به‌حالت قبل منجر می‌شود.

۴۹۶. انتگرال‌های تابع‌های گویا بین مرزهای بی‌نهایت. در پایان، به‌نوع خاص دیگری از انتگرال‌ها، با مرزهای بی‌نهایت، می‌پردازیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

که در آن، $P(x)$ و $Q(x)$، چندجمله‌ای‌های صحیح‌اند. فرض می‌کنیم، چندجمله‌ای $Q(x)$، ریشهٔ حقیقی نداشته باشد و درجهٔ $P(x)$، دست‌کم دو واحد، از درجهٔ $Q(x)$ کمتر باشد. با این شرط‌ها، انتگرال وجود دارد [۴۷۴، ۲)] و مساله، تنها به محاسبهٔ آن مربوط می‌شود.

اگر $x_\lambda=\alpha_\lambda+i\beta_\lambda$ $(\beta_\lambda\neq 0;\ \lambda=1, 2, \dots)$، ریشه‌های مختلف چند جمله‌ای $Q(x)$ باشند، در آن‌صورت، کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$، به‌ترتیب زیر، به‌کسرهای ساده، تجزیه می‌شود:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_\lambda\left[\frac{A_\lambda}{x-x_\lambda}+\frac{A_\lambda}{(x-x_\lambda)^2}+\dots\right] \qquad (5)$$

ضمناً، تعداد کسرها در هر کروشه، برابر است با نمای مرتبهٔ تکرار ریشهٔ نظیر*.

---

*) در فصل هشتم [۲۷۴]، شبیه این بسط را داشتیم، ولی در آن‌جا کوشیدیم، از موهومی بودن احتزار کنیم و در حالت ریشه‌های موهومی، کسرهایی را در نظر گرفتیم که، مخرج آن‌ها، سه‌جمله‌ای‌های درجه دوم با ضریب‌های حقیقی بودند. در این‌جا، با ریشه‌های موهومی، به‌همان ترتیب عمل می‌کنیم که، در آن‌جا، با ریشه‌های حقیقی عمل می‌کردیم.

اگر از روش‌های مقدماتی محاسبهٔ انتگرال‌ها در حالت تابع‌های مختلط ازمتغیرهای حقیقی، استفاده کنیم، بلافاصله می‌بینیم که به‌ازای $m>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-x_\lambda)^{m+1}}=-\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(x-x_\lambda)^m}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=0$$

بنا بر این

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_\lambda\frac{A_\lambda}{x-x_\lambda}dx=\lim_{h\to\infty}\int_{-h}^{h}\sum_\lambda\frac{A_\lambda}{x-x_\lambda}dx$$

از طرف دیگر

$$\frac{1}{x-x_\lambda}=\frac{1}{x-\alpha_\lambda-\beta_\lambda i}=\frac{x-\alpha_\lambda}{(x-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2}+i\frac{\beta_\lambda}{(x-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2}$$

و

$$\int_{-h}^{h}\frac{dx}{x-x_\lambda}=\left\{\frac{1}{2}\ln[(x-x_\lambda)^2+\beta_\lambda^2]+i\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}\right\}\Bigg|_{-h}^{h}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(h-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2}{(h-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2}+i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{h-\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}+\operatorname{arc\,tg}\frac{h+\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}\right]$$

وقتی $h\to+\infty$، در عبارت اخیر، جملهٔ اول به‌سمت ۰ و جملهٔ دوم (بسته به‌این‌که $\beta_\lambda>0$ یا $\beta_\lambda<0$ باشد) به‌سمت $+\pi i$ یا $-\pi i$ میل می‌کند.

به‌این ترتیب، به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\pi i\cdot\sum_\lambda\pm A_\lambda$$

که در آن، علامت A_λ، همراه با علامت β_λ، مثبت یا منفی است. این دستور را، می‌توان براساس ملاحظه‌های زیر، کمی تغییر شکل داد. در اتحاد (۵)، دو طرف را در x ضرب می‌کنیم. وقتی $x\to\infty$، سمت چپ به‌سمت صفر میل خواهد کرد، زیرا درجهٔ $x\cdot P(x)$، هنوز از درجهٔ $Q(x)$ کمتر است. در سمت راست، در حد، همهٔ جمله‌های با مخرج‌های غیرخطی صفرمی‌شوند، به‌نحوی که حد مجموع بقیهٔ جمله‌ها نیز برابرصفر است. ازاین‌جا $\sum_\lambda A_\lambda=0$، به نحوی که $\sum^{(+)}A_\lambda=-\sum^{(-)}A_\lambda$، که در آن، علامت‌های $(+)$ و

$(-)$، معرف مجموعی است که در آن A_λ را نظیر $\beta_\lambda > 0$ یا $\beta_\lambda < 0$ گرفته‌ایم. اکنون، دستور حاصل را، می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \cdot \sum^{(+)} A_\lambda \qquad (۶)$$

دربارهٔ محاسبهٔ ضریب‌های A_λ، تنها به‌حالتی اشاره می‌کنیم که، در آن، x_λ ریشه‌ای ساده است، یعنی برای آن $Q(x) = 0$ و $Q'(x) \neq 0$ باشد؛ در این حالت، در بسط (۵)، تنها یك جملهٔ $\frac{A_\lambda}{x - x_\lambda}$ به‌آن نظیر است. اگر دو طرف برابری (۵) را، $x - x_\lambda$ ضرب کنیم، در آن‌صورت، این برابری به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{P(x)}{\frac{Q(x) - Q(x_\lambda)}{x - x_\lambda}} = A_\lambda + (x - x_\lambda) \cdot R(x)$$

که در آن، $R(x)$ به‌معنای گروه‌جمله‌هایی است که با نزدیك‌شدن x به x_λ، متناهی می‌مانند. با عبور به‌حد، به‌ازای $x \to x_\lambda$، به‌دست می‌آید:

$$A_\lambda = \frac{P(x_\lambda)}{Q'(x_\lambda)} \qquad (۷)$$

اکنون، به‌مثال‌هایی می‌پردازیم که به‌استفاده از دستورهای (۶) و (۷)، مربوط می‌شوند.

۱) ابتدا، به‌این انتگرال می‌پردازیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx$$

که در آن، m و n عددهایی طبیعی هستند و، ضمناً، $m < n$. در این‌جا، همهٔ شرط‌ها، برای به‌کاربردن دستورهایی که ثابت کرده‌ایم، برقرارند.

ریشه‌های مخرج، عبارت‌اند از

$$x_\lambda = \cos\frac{(2\lambda + 1)\pi}{2n} + i \sin\frac{(2\lambda + 1)\pi}{2n}$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n, \ldots, 2n-1)$$

ولی تنها n ریشهٔ نخست، از این ریشه‌ها، دارای بخش موهومی مثبت هستند. روشن است که

$x_\lambda = x_0^{2\lambda+1}$، که در آن

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{2n} + i.\sin\frac{\pi}{2n}$$

از روی دستور (۷)، به‌ازای $\lambda = 0, 1, \ldots, n-1$، داریم:

$$A_\lambda = \frac{x_\lambda^{2m}}{2n.x_\lambda^{2n-1}} = -\frac{1}{2n}x_\lambda^{2m+1} = -\frac{1}{2n}x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)}$$

(با در نظر گرفتن این‌که $x_\lambda^{2n} = -1$). اگر مجموع جمله‌های تصاعد را به‌دست آوریم، داریم:

$$\sum{}^{(+)}A_\lambda = -\frac{1}{2n}\sum_{\lambda=0}^{n-1} x^{(2m+1)(2\lambda+1)} = -\frac{1}{2n}.\frac{x_0^{2m+1} - x_0^{(2m+1)(2n+1)}}{1 - x_0^{2(2m+1)}}$$

و یا، چون $x_0^{2m} = -1$،

$$\sum{}^{(+)}A_\lambda = -\frac{1}{n}.\frac{x_0^{2m+1}}{1 - x_0^{2(2m+1)}} = \frac{1}{n}.\frac{1}{x_0^{2m+1} - x_0^{-(2m+1)}}$$

که اگر قرار دهیم:

$$x_0^{\pm(2m+1)} = \cos\frac{2m+1}{2n}\pi \mp i.\sin\frac{2m+1}{2n}\pi$$

سرانجام، مجموع موردنظر خود را، به‌این‌صورت، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2ni}.\frac{1}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}$$

و از آن‌جا، با توجه به‌دستور (۶)، داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{n}.\frac{1}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi} \qquad (m<n)$$

۲) مثال تا اندازه‌ای کلی‌تر

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m} - x^{2m'}}{1-x^{2n}}dx$$

که در آن، m، m' و n عددهایی طبیعی‌اند و، ضمناً، $m'<n$، m.

همهٔ شرط‌ها برقرارند، به‌جز این که، مخرج دارای ریشه‌های حقیقی ± 1 است. ولی این وضع، در این‌جا، مشکلی ایجاد نمی‌کند، زیرا، همین عددها، ریشهٔ صورت کسر هم هستند، به‌نحوی که می‌توان کسر را به x^2-1 ساده کرد. از این به‌بعد، این ریشه‌ها را در نظر نخواهیم گرفت.

بقیهٔ ریشه‌های مخرج، عبارتند از

$$x_\lambda = cos\frac{\lambda\pi}{n}+i\cdot sin\frac{\lambda\pi}{n}=x_1^\lambda$$

$$(\lambda=1, 2, \dots, n-1, n+1, \dots, 2n-1)$$

که از آن‌ها، $n-1$ ریشهٔ نخست، دارای بخش موهومی مثبت هستند. با توجه به‌دستور (۷)

$$A_\lambda=\frac{x_\lambda^{2m}-x_\lambda^{2m'}}{-2n\cdot x_\lambda^{2n-1}}=\frac{1}{2n}(x_\lambda^{2m'+1}-x_\lambda^{2m+1})$$

به‌نحوی که

$$\sum{}^{(+)}A_\lambda=\frac{1}{2n}\sum_{\lambda=1}^{n-1}(x_\lambda^{2m'+1}-x_\lambda^{2m+1})=\frac{1}{2n}\sum_{\lambda=1}^{n-1}(x_1^{\lambda(2m'+1)}-x_1^{\lambda(2m+1)})$$

این عبارت را، به‌ترتیب، به‌صورت‌های زیر تبدیل می‌کنیم*:

$$\sum{}^{(+)}A_\lambda=\frac{1}{2n}\left[\frac{x_1^{n(2m'+1)}-x_1^{2m'+1}}{x_1^{2m'+1}-1}-\frac{x_1^{n(2m+1)}-x_1^{2m+1}}{x_1^{2m+1}-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\frac{1+x_1^{2m'+1}}{1-x_1^{2m'+1}}-\frac{1+x_1^{2m+1}}{1-x_1^{2m+1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\frac{x_1^{\frac{2m+1}{2}}+x_1^{-\frac{2m+1}{2}}}{x_1^{\frac{2m+1}{2}}-x_1^{-\frac{2m+1}{2}}}-\frac{x_1^{\frac{2m'+1}{2}}+x_1^{-\frac{2m'+1}{2}}}{x_1^{\frac{2m'+1}{2}}-x_1^{-\frac{2m'+1}{2}}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n}\left[cotg\frac{2m+1}{2n}\pi-cotg\frac{2m'+1}{2n}\pi\right]$$

و سرانجام

---

*) با در نظر گرفتن $x_1^n=-1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}-x^{2m'}}{1-x^{2n}}dx=\frac{\pi}{n}\left[\cot g\frac{2m+1}{2n}\pi-\cot g\frac{2m'+1}{2n}\pi\right]$$

$$(m, m'<n)$$

یادآوری می‌کنیم که، اگر n را به $2n$ تبدیل کنیم و $m'=m+n$ $(m<n)$ قرار دهیم، می‌توان از این دستور، به‌سادگی، دستور قبلی را نتیجه گرفت.

۳) در پایان، به‌این انتگرال می‌پردازیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n}+2x^{2n}\cdot\cos\theta+1}dx$$

که در آن $m<n$ و $-\pi<\theta<\pi$.

با واردکردن $\theta'=\pi-\theta$ و $0<\theta'<2\pi$، انتگرال را این‌طور می‌نویسیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n}-2x^{2n}\cdot\cos\theta'+1}dx$$

برای محاسبهٔ ریشه‌های مخرج، فرض می‌کنیم: $z=x^{2n}$. آن‌وقت، z را می‌توان ازمعادلهٔ $z^2-2z\cos\theta'+1=0$ تعیین کرد که می‌شود: $z=\cos\theta'\pm i\sin\theta'$. برای x، دو رشته مقدار به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_0=\cos\dfrac{\theta'}{2n}+i\sin\dfrac{\theta'}{2n} \\ \varepsilon=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n} \end{cases} \quad x_\nu=x_0\cdot\varepsilon^\nu \quad (\nu=0, 1, \dots, n-1)$$

$$\begin{cases} \bar{x}_0=\cos\dfrac{\theta'}{2n}-i\sin\dfrac{\theta'}{2n} \\ \bar{\varepsilon}=\cos\dfrac{\pi}{n}-i\sin\dfrac{\pi}{n} \end{cases} \quad \bar{x}_\nu=\bar{x}_0\cdot\bar{\varepsilon} \quad (\nu=n, \dots, 2n-1)$$

که در آن:

ضمناً، nتای‌اولی از رشتهٔ اول و nتای‌آخری از رشتهٔ دوم، بخش‌موهومی مثبت راتشکیل می‌دهند.

ضریب‌های A_ν، نظیر ریشه‌های x_ν $(\nu=0, 1, \dots, n-1)$، از روی دستور (۷) محاسبهٔ می‌شوند:

$$A_\nu=\frac{x_\nu^{2m}}{4n(x_\nu^{4n-1}-x_\nu^{2n-1}\cdot\cos\theta')}=\frac{1}{4n}\cdot\frac{x_\nu^{2m+1}}{x_\nu^{2n}(x_\nu^{2n}-\cos\theta')}=$$

$$=\frac{1}{4n}\cdot\frac{x_0^{2m+1}\cdot\varepsilon^{(2m+1)\nu}}{(\cos\theta'+i\sin\theta')\cdot i\sin\theta'}$$

که اگر این ضریب‌ها را جمع، و در $2\pi i$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید*:

$$\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\cos\left(\frac{2m+1}{2n}-1\right)\theta'+i\cdot\sin\left(\frac{2m+1}{2n}-1\right)\theta'}{\sin\theta'}\cdot\frac{1-(\varepsilon^n)^{2m+1}}{1-\varepsilon^{2m+1}}=$$

$$=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\cos\left(1-\frac{2m+1}{2n}\right)\theta'-i\sin\left(1-\frac{2m+1}{2n}\right)\theta'}{\sin\theta'}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(1-\cos\frac{2m+1}{n}\pi\right)-i\cdot\sin\frac{2m+1}{n}\pi}$$

برای گروه دوم ریشه‌های $\bar{x}_\nu$ $(\nu=n,\ n+1,\ \dots,\ 2n-1)$، به ترتیب مشابهی، مزدوج همین عبارت به‌دست می‌آید و مجموع آن‌ها، دو برابر بخش حقیقی را به‌دست می‌دهد. این مجموع، بعد از تبدیل‌های مقدماتی، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\left[\left(1-\frac{2m+1}{2n}\right)\theta'-\frac{2m+1}{2n}\pi\right]}{\sin\theta'\cdot\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

که اگر، دوباره، $\theta=\pi-\theta'$ به‌حساب آوریم، به‌دست می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{4n}+2x^{2n}\cdot\cos\theta+1}dx=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\left(1-\frac{2m+1}{2n}\right)\theta}{\sin\theta\cdot\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

$$(m<n;\ -\pi<\theta<\pi)$$

۴۹۷. مثال‌ها و تمرین‌های مختلف. وجود این انتگرال را ثابت کنید:

---

*) $\varepsilon^n=-1$.

$$I=\int_{\pi}^{\infty}\frac{dx}{x^{۲}\cdot(\sin x)^{\frac{۲}{۳}}}$$

نقطه‌های خاص، عبارتند از مجموعهٔ نامتناهی $x=n\pi$ $(n=۱, ۲, \dots)$. درهر بازهٔ متناهی، تعداد آن‌ها متناهی است و انتگرال هم، متقارب می‌شود. مساله، تنها مربوط به‌این می‌شود که تقارب انتگرال را، در بازهٔ نامتناهی، بررسی کنیم داریم:

$$I=\sum_{n=۱}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+۱)\pi}=$$

$$=\sum_{n=۱}^{\infty}\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{(x+n\pi)^{۲}\cdot(\sin x)^{\frac{۲}{۳}}}<\int_{۰}^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^{\frac{۲}{۳}}}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}\pi^{۲}}<+\infty$$

۲) اگر در انتگرال متقارب [۴۷۸، ۵)، (c)]

$$\int_{۰}^{\infty}|\log t|^{\lambda}\cdot\frac{\sin t}{t}dt\quad(\lambda>۰)$$

قرار دهیم: $t=e^{x}$، $x=\ln t$، به‌این انتگرال می‌رسیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{\lambda}\cdot\sin e^{x}dx$$

به‌این ترتیب، انتگرال اخیر. بدون توجه به‌آن‌که تابع زیر انتگرال، با ترقی نامحدود $|x|$، بین $-\infty$ و $+\infty$ نوسان می‌کند، متقارب می‌شود.

۳) هم‌اکنون دیدیم که برای تقارب انتگرال

$$\int_{a}^{\infty}f(x)dx \qquad (۸)$$

به‌هیچ‌وجه لازم نیست که داشته باشیم:

$$f(x)=o(x)\quad(x\to\infty) \qquad (۹)$$

با وجود این، ثابت کنید که

(a) اگر حد

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

وجود داشته باشد، در آن‌صورت ــ در حالت تقارب انتگرال (۸) ــ این حد الزاماً برابر ۰ است، و علاوه بر آن

(b) اگر حد

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot f(x)$$

وجود داشته باشد، این حد هم الزاماً برابر صفر است، یعنی

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (۱۰)$$

(c) اگر تابع انتگرال‌پذیر در بازهٔ $[a, \infty)$، به‌طوریکنوا نزولی باشد، آن‌وقت، شرط (۱۰) الزاماً برقرار است.

اثبات [برای (b) و (c)]، شبیه اثبات گزارهٔ مشابه برای رشته‌های مثبت است [**۳۷۵**، ۳] را ببینید].

به‌این‌نکته‌هم توجه کنیم (بازهم، از روی شباهت با رشته‌ها) که، برای تابع یکنوای نزولی $f(x)$، برقراربودن شرط (۱۰)، تقارب انتگرال (۸) را تضمین نمی‌کند، به‌عنوان نمونه، می‌توان از این انتگرال متباعد نام برد:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x\cdot\ln x} \quad (a>۱)$$

۴) حکمی را که در **۴۷۸**، ۶) ثابت کردیم، به‌حالتی گسترش می‌دهیم که، در آن، تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a, a+\omega)$، به‌مفهوم ناویژه، انتگرال‌پذیر باشد (با حفظ سایر شرط‌ها). به‌کمك این گزاره، ثابت کنید که، با فرض این‌که $g(x)$ به‌ازای $x \to \infty$ به‌طور یکنوا به‌سمت ۰ میل کند، انتگرال

$$\int_0^\infty \ln|\sin x|\cdot g(x)dx$$

به‌طور هم‌زمان، با انتگرال

$$\int_0^\infty g(x)dx$$

متقارب یا متباعد می‌شود، درحالی‌که انتگرال

$$\int_0^{\infty} \ln 2|\sin x| \cdot g(x)dx$$

همیشه متقارب است.

۵) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$\text{(a)} \int_0^{\pi} x \cdot \ln \sin x dx, \quad \text{(b)} \int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \text{(c)} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

راهنمائی. (a). با تبدیل $x = \pi - t$ معلوم می‌شود که انتگرال منجر می‌شود به

$$\int_0^{\pi} \ln \sin x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$$

(b) و (c). با تبدیل $x = \sin t$ به $x = \ln \frac{1}{\sin t}$ و منجر می‌شوند. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$

۶) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$J = \int_0^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot \ln \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx$$

با فرض $x = \sin\theta$، داریم:

$$J = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot \ln \operatorname{cotg}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \cdot \ln \operatorname{cotg}\theta d\theta$$

و سپس، با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، به‌دست می‌آید:

$$J = \frac{1}{2}\sin 2\theta \cdot \ln \operatorname{cotg}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cdot \frac{1}{\operatorname{cotg}\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

۷) این انتگرال را پیدا کنید:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin^2\theta - a^2| d\theta \quad (a^2 \leqslant 1)$$

با گذاشتن $a=\sin\omega$ و با استفاده از اتحاد

$$\sin^2\theta-\sin^2\omega=\sin(\theta-\omega)\sin(\theta+\omega)$$

نتیجه می‌شود:

$$K=\int_{\omega-\frac{\pi}{2}}^{\omega+\frac{\pi}{2}}\ln|\sin\theta|\,d\theta=\int_0^{\pi}\ln\sin\theta\,d\theta=-\pi\ln 2$$

۸) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$L=\int_0^{\infty}e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx\quad(a,b>0)$$

حل. با استفاده از دستور [۴۹۱، ۱۳)]، داریم:

$$L=e^{-2\sqrt{ab}}\int_0^{\infty}e^{-\left(\sqrt{a}x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-2\sqrt{ab}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-2\sqrt{ab}}.$$

[با ۴۹۲، ۲° مقایسه کنید].

۹) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید:

$$J_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}d\varphi,\quad J_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\frac{3}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}d\varphi$$

حل. $\cos\theta$ را با x نشان می‌دهیم و $z=\cos\varphi$ می‌گیریم، آن‌وقت

$$\cos\frac{1}{2}\varphi=\sqrt{\frac{1+z}{2}},\quad\cos\frac{3}{2}\varphi=\sqrt{\frac{1+z}{2}}\cdot(2z-1)$$

و

$$J_0=\frac{1}{\pi}\int_x^1\frac{dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}},\quad J_1=\frac{1}{\pi}\int_x^1\frac{(2z-1)dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}$$

با وارد کردن متغیر جدید t، از روی دستور $\sqrt{(z-x)(1-z)}=t(1-z)$، به‌دست می‌آوریم:

$$J_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1}=1;$$

$$J_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^2+2x-1}{(t^2+1)^2}dt=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1}+2(x-1)\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2}\right\}=x$$

به‌این ترتیب: $J_0=1$ و $J_1=\cos\theta$. بعداً [در ۵۱۱، ۳)]، نتیجه‌های کلی‌تری را ثابت خواهیم کرد.

۱۰) نتیجه‌گیری‌های زیر را، با روش انتگرال گیری‌جزء به‌جزء، ثابت کنید:

$$\text{(a)}\quad \int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(b-a)$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx=\sqrt{\pi}(b-a)$$

$$\text{(c)}\quad \int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)-\ln(1+b^2x^2)}{x^2}dx=\pi(a-b)$$

۱۱) به‌سادگی دیده می‌شود [۴۹۲، ۳°؛ ۴۹۴، ۵)]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & (\alpha>0)\\ 0 & (\alpha=0)\\ -\frac{\pi}{2} & (\alpha<0)\end{cases}$$

از این‌جا، چون داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}dx+\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx\right\}$$

روشن است (اگر محض سادگی، $\alpha>0$، $\beta>0$ بگیریم):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (\beta < \alpha) \\ \frac{\pi}{4} & (\beta = \alpha) \\ 0 & (\beta > \alpha) \end{cases}$$

این انتگرال را، بارها، دیریکله به‌کار برده است و به‌نام عامل ناپیوستهٔ دیریکله معروف است.

انتگرال‌های بسیار دیگری، منجر به‌این انتگرال می‌شوند. مثلا، اگر $\alpha, \beta, \gamma > 0$ و α بزرگترین آن‌ها باشد:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x \cdot \sin \gamma x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & (\alpha < \beta + \gamma) \\ \frac{\pi}{8} & (\alpha = \beta + \gamma) \\ 0 & (\alpha > \beta + \gamma) \end{cases}$$

(با عوض کردن حاصل‌ضرب دوسینوس به‌تفاضل دوکسینوس)، ویا (دوباره $\alpha, \beta > 0$):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\beta & (\beta \leqslant \alpha) \\ \frac{\pi}{2}\alpha & (\beta \geqslant \alpha) \end{cases}$$

(انتگرال گیری جزء به‌جزء).

نتیجهٔ اخیررا، به‌ترتیب زیر، می‌توان تعمیم داد:

اگر $a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ و $a > \sum_1^n \alpha_i$ باشد، آن‌وقت

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cdot \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdots \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \alpha_1 \alpha_2 \cdots$$

اثبات را می‌توان با روش استقرای ریاضی انجام داد (انتگرال گیری جزء به‌جزء).

۱۲) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$\int_0^{\infty} (\sin ax - \sin bx)^2 \frac{dx}{x^2}$$

راهنمائی. از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء واز ضریب ناپیوستهٔ دیریکله استفاده کنید.

پاسخ: $\frac{\pi}{۲}|a-b|$.

۱۳) مطلوب است محاسبهٔ مقدار اصلی این انتگرال

$$\mathrm{V.p.}\int_{۰}^{\infty}\frac{۲x\cdot\sin\alpha x}{x^{۲}-r^{۲}}dx \quad (\alpha, r>۰)$$

حل. نقطهٔ خاص عبارت است از $x=r$. با استفاده از اتحاد

$$\frac{۲x}{x^{۲}-r^{۲}}=\frac{۱}{x+r}+\frac{۱}{x-r}$$

بلافاصله، این انتگرال متقارب را جدا می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x+r}dx=\cos\alpha r\cdot\int_{r}^{\infty}\frac{\sin\alpha y}{y}dy-\sin\alpha r\cdot\int_{r}^{\infty}\frac{\sin\alpha y}{y}dy$$

سپس، به‌کمك تبدیل‌های ساده، پیدا می‌کنیم:

$$\left(\int_{۰}^{r-\varepsilon}+\int_{r+\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\sin\alpha x}{x-r}dx=$$

$$=\cos\alpha r\cdot\int_{r}^{\infty}\frac{\sin\alpha y}{y}dy+\sin\alpha r\cdot\int_{r}^{\infty}\frac{\cos\alpha y}{y}dy+۲\cos\alpha r\cdot\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin\alpha y}{y}dy$$

به‌طوری‌که، اگر درانتگرال اخیر، به‌طور ساده، $\varepsilon=۰$ بگیریم:

$$\mathrm{V.p.}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x-r}dx$$

به‌دست می‌آید، بالاخره، خواهیم داشت:

$$\mathrm{V.p.}\int_{۰}^{\infty}\frac{۲x\sin\alpha x}{x^{۲}-r^{۲}}dx=۲\cos\alpha r\cdot\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin\alpha y}{y}dy=\pi\cdot\cos\alpha r$$

۱۴) فرض کنیم، تابع $f(x)$، درشرط‌های زیر صدق کند $(۰\leqslant x<+\infty)$:

$$f(x+\pi)=f(x),\ f(\pi-x)=f(x)$$

به‌فرض این‌که انتگرال سمت‌چپ وجود داشته باشد، ثابت کنید:

$$\int_{۰}^{\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}f(x)dx$$

[این رابطه، به‌لباچوسکی تعلق دارد و به‌کمك بسط $\frac{1}{\sin x}$ به کسرهای ساده، مثل حالت خاص $f(x)\equiv 1$ ثابت می‌شود؛ ۴۹۲، ۳° را ببینید].

ازاین رابطه، برای محاسبهٔ انتگرال‌های زیر استفاده کنید:

$$\text{(a)}\quad \int_0^{\infty}\frac{\sin^{2\nu+1}x}{x}dx=\int_0^{\infty}\sin^{2\nu}x\frac{\sin x}{x}dx\quad(\nu=1,2,\dots)$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^{\infty}\operatorname{arctg}(a\cdot\sin x)\frac{dx}{x}=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(a\cdot\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}dx\qquad(a>0)$$

انتگرال (a)، به‌انتگرال معلوم [۳۱۲، (۸)]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\nu}x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}$$

منجرمی‌شود و انتگرال (b)، به‌انتگرال

$$\int_0^{1}\frac{\operatorname{arctg} at}{t\sqrt{1-t^2}}dt$$

(با تبدیل $t=\sin x$)، که مقدار آن

$$\frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$$

را بعداً [در ۵۱۱، ۹)] معین خواهیم کرد.

۱۵) با توجه به‌همان شرطها، برای تابع $f(x)$ (و با فرض وجود انتگرال سمت چپ)، ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty}f(x)\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$$

راهنمائی. دراین‌جا هم، ازروش لباچوسکی، تنها با استناد به‌بسط تابع $\frac{1}{\sin^2 x}$ به‌کسرهای ساده [۴۴۱، ۹)] استفاده می‌کنیم.

دراین‌جا هم، اگر $f(x)\equiv 1$ بگیریم، به‌انتگرال معلوم

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

[با ۴۹۴، ۴) مقایسه کنید]، می‌رسیم.

۱۶) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید ($a, b > 0$):

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{\sin ax \cdot \sin bx}{x}dx, \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x}\cdot \cos bx\,dx$$

$$\text{(c)} \int_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}dx$$

راهنمائی. همگی به‌انتگرال فرولانی منجر می‌شوند. دو انتگرال اول، به‌ازای $a=b$، متباعدند.

پاسخ: (a) $\ln\sqrt{\frac{a+b}{|a-b|}}$؛ (b) $\ln\sqrt{\frac{|a^2-b^2|}{b}}$؛ (c) $\ln\frac{a}{b}$

۱۷) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید ($a, b > 0$):

$$\text{(a)} \int_0^\infty \frac{b\cdot\sin ax - a\cdot\sin bx}{x^2}dx$$

$$\text{(b)} \int_0^\infty \frac{b\ln(1+ax)-a\ln(1+bx)}{x^2}dx$$

$$\text{(c)} \int_0^\infty (e^{-ax}-e^{-bx})^2\frac{dx}{x^2}$$

راهنمائی. هرسه، با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، به‌انتگرال فرولانی منجر می‌شوند.

۱۸) این انتگرال را محاسبه کنید ($a > 0$):

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}$$

حل. این اتحاد را داریم:

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2x}(e^{-x}-e^{-2x})+$$

$$+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$

انتگرال‌های جمله‌های دوم وسوم، متقابلا حذف می‌شوند (به‌طور ساده، با تغییرمتغیر. می‌توان به‌این مطلب قانع شد) ودرنتیجه، تمامی انتگرال، به‌انتگرال فرولانی منجر می‌شود. پاسخ: $-\frac{1}{2}\ln 2$.

۱۹) این انتگرال را پیداکنید ($a, b>0$):

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx$$

حل. داریم (برای $\eta>0$):

$$\int_\eta^\infty = \int_\eta^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}dx+(a-b)\int_\eta^\infty \frac{e^{-bx}}{x}dx^*$$

اولین انتگرال سمت راست را، با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، تبدیل می‌کنیم:

$$\int_\eta^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}dx=-\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\Big|_\eta^\infty+\int_\eta^\infty \frac{be^{-bx}-ae^{-ax}}{x}dx$$

به‌طوری‌که سرانجام

$$\int_\eta^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx=\frac{e^{-a\eta}-e^{-b\eta}}{\eta}+$$

$$+a\int_\eta^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx$$

به‌ازای $\eta\to 0$، عبارت اول سمت راست برابری، به‌سمت $a-b$ وعبارت دوم به‌سمت انتگرال فرولانی میل می‌کند:

$$a\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx=a\cdot\log\frac{a}{b}$$

---

*) این انتگرال‌ها، به‌ازای $\eta=0$، متقارب نیستند.

۲۰) ثابت کنید:

$$\int_0^\infty \frac{A\cos ax+B\cos bx+\dots K\cos kx}{x}dx=$$

$$=-(A\ln a+B\ln b+\dots+1<\ln k)$$

به‌شرطی که داشته باشیم: $k>0$ ،b ،a و $A+B+\dots+K=0$ (روشن است که شرط اخیر، برای وجود انتگرال، لازم است).

راهنمائی. با گذاشتن $K=-A-B-\dots$، از رابطه‌های نظیر رابطهٔ زیر استفاده کنید:

$$\int\frac{A\cos ax-A\cos kx}{x}dx=-A\ln a+A\ln k$$

به‌سادگی می‌توان این رابطه را، برای حالت تابع دلخواه $f(x)$، با توجهٔ به‌شرط‌های شمارهٔ ۴۹۵، II، تعمیم داد.

۲۱) مقدار این انتگرال را پیدا کنید:

$$\int_0^\infty\frac{\sin^n x}{x^m}dx$$

که در آن: m و n عددهایی طبیعی هستند وضمناً $n\geqslant m\geqslant 2$.

حل. اگر دستور تعمیم‌یافتهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء را [۳۱۱]، درمورد حالت بازهٔ نامتناهی، گسترش دهیم، فوراً به‌دست می‌آید (زیرا، تبدیل دوگانه، دراین‌جا حذف می‌شود):

$$\int_0^\infty\frac{\sin^n x}{x^m}dx=\frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\sin^n x.\frac{dx}{x}\qquad(11)$$

برای محاسبهٔ انتگرال آخری، بهتر است از بسط مغلوم $\sin^n x$ برحسب سینوس یا کسینوس کمان‌های مضرب استفاده کنیم (۴۶۱، ۳)، (a) و (b)].

حالت‌های مختلفی را، که ممکن است پیش‌آید، بررسی می‌کنیم.

(a) $n=2\nu+1$ ،$m=2\mu+1$. آن‌وقت

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}}\sin^{2\nu+1}x=\frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}}\Big[(2\nu+1)^{2\mu}\sin(2\nu+1)x-$$

$$-(2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu}\sin(2\nu-1)x+$$

$$+\frac{(2\nu+1)2\nu}{1\times 2}(2\nu-3)^{2\mu}\sin(2\nu-3)x-\dots\Big]$$

و از روی دستور (۱۱):

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1}x}{x^{2\mu+1}}dx=\frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}\cdot(2\mu)!}\cdot\frac{\pi}{2}\Big[(2\nu+1)^{2\mu}-(2\mu+1)(2\nu-1)^{2\mu}+$$

$$+\frac{(2\nu+1)2\nu}{1\times 2}(2\nu-3)^{2\mu}-\dots\Big]$$

(b) $n=2\nu$، $m=2\mu+1$. دراین حالت

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}}\sin^{2\nu}x=\frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu-1}}\Big[(2\nu)^{2\mu}\cos 2\nu x-2\nu.(2\nu-2)^{2\mu}\cos(2\nu-2)x+$$

$$+\frac{2\nu(2\nu-1)}{1\times 2}(2\nu-4)^{2\mu}\cos(2\nu-4)x-\dots\Big]$$

به‌سادگی دیده می‌شود که سمت‌چپ (به‌دلیل $\mu>\nu$)، به‌ازای $x=0$، برابرصفر می‌شود، به‌طوری‌که مجموع ضریب‌های کسینوس‌ها برابرصفراست ومی‌توانیم، از تمرین ۲۰) استفاده کنیم. ازآن‌جا

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu}x}{x^{2\mu+1}}dx=\frac{(-1)^{\nu+\mu+1}}{2^{2\nu-1}(2\mu)!}\Big[(2\nu)^{2\mu}\ln 2\nu-2\nu(2\nu-2)^{2\mu}\ln(2\nu-2)+$$

$$+\frac{2\nu(2\nu-1)}{1\times 2}(2\nu-4)^{2\mu}\ln(2\nu-4)-\dots\Big]$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توان رابطه‌های‌مربوط به‌حالت‌های (c) $n=2\nu+1$، $m=2\mu$ و (d) $n=2\nu$ و $m=2\mu$ را به‌دست آورد. یادآوری می کنیم که، به‌خصوص برای $n\geqslant 2$ دلخواه،

$$\int_0^\infty\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^n dx=$$

$$=\frac{\pi}{2^n(n-1)!}\Big[n^{n-1}-n(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}(n-4)^{n-1}-\dots\Big]$$

۲۲) به‌کمك بسط ۴۶۱، ۳)، (b)، به‌سادگی (به‌ازای $p>0$) به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} px}{x}dx=\frac{(-1)^\nu\pi}{2^{2\nu+1}}\left[1-(2\nu+1)+\frac{(2\nu+1)2\nu}{1\times 2}-\cdots+\right.$$

$$\left.+(-1)^\nu\frac{(2\nu+1)2\nu\cdots(\nu+2)}{1\times 2\times\cdots\times\nu}\right]$$

ضمناً، به‌کمك تبدیل‌های مقدماتی، این عبارت، به‌عبارت ساده‌تر زیرمنجر می‌شود:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}$$

انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px}{x}dx$ متباعد است. انتگرال فرولانی

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px-\sin^{2\nu} qx}{x}dx \quad (p, q>0)$$

با شرط‌های شمارهٔ ۴۹۵ سازگار نیستند، ولی به‌کمك بسط ۴۶۱، ۳)، (a)، به سادگی ثابت می‌شود که می‌توان آن را به‌حالت II انتگرال فرولانی منجر کرد، به‌شرطی که به‌جای $\sin^{2\nu} x$ قرار دهیم:

$$\sin^{2\nu} x-\frac{1}{2^{2\nu}}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)\cdots(\nu+1)}{1\times 2\times\cdots\times\nu}$$

بالاخره، ازروی رابطهٔ 4a) داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu} px-\sin^{2\nu} qx}{x}dx=\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\ln\frac{q}{p}$$

انتگرال $\int_0^\infty \frac{\cos^n x}{x}dx$، به‌ازای هیچ عدد طبیعی n، متقارب نمی‌شود، ولی $\int_A^\infty$،

برای $n=2\nu+1$، متقارب است و ازروی دستور فرولانی 4a) خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty \frac{\cos^{2\nu+1} px-\cos^{2\nu+1} qx}{x}dx=\ln\frac{q}{p}$$

به‌ازای $n=2\nu$، با استفاده از بسط ۴۶۱، ۳)، (c)، مثل حالت قبل درمورد سینوس‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\cos^{2\nu} px - \cos^{2\nu} qx}{x}dx = \left(1 - \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right) \ln\frac{q}{p}$$

۲۳) این رابطه‌ها را ثابت کنید:*

$$\text{(a)} \int_0^\infty \cos\gamma x dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2\gamma} & (|\gamma|>1) \\ \frac{\pi}{4} & (\gamma=1) \\ 0 & (\gamma<1) \end{cases}$$

$$\text{(b)} \int_0^\infty \sin\gamma x dx \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2\gamma} & (|\gamma|>1) \\ \frac{\pi}{4} & (|\gamma|=1) \\ 0 & (|\gamma|<1) \end{cases}$$

$$\text{(c)} \int_0^\infty \cos\gamma x dx \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{1}{2\gamma}\ln\left|\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right| \quad (\gamma\neq 0, \pm 1)$$

$$= 1 \quad (\gamma = 0)$$

و به‌ازای $\gamma = \pm 1$، انتگرال متباعد است.

$$\text{(d)} \int_0^\infty \sin\gamma x dx \int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{1}{\gamma}\ln|1-\gamma^2| \quad (\gamma\neq 0, \pm 1)$$

$$= 0 \quad (\gamma = 0)$$

و برای $\gamma = \pm 1$، انتگرال متباعد است.

---

*) انتگرال‌های

$$-\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt \quad \text{و} \quad -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt$$

معرف تابع‌های $\mathrm{si}\,x$ و $\mathrm{ci}\,x$ هستند («سینوس انتگرالی» و «کسینوس انتگرالی»)، که دربارهٔ آن‌ها، در شمارهٔ ۲۸۹ صحبت کرده‌ایم.

$$\text{(e)}\quad \int_0^\infty e^{-\gamma x}dx\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt=\frac{1}{\gamma}\ln(1+\gamma)\quad(\gamma>0)$$

$$=1\quad(\gamma=0)$$

اثبات. (a) با فرض $\gamma\neq 0$، از انتگرال گیری جزء به‌جزء استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^\infty \cos\gamma x dx\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt=\frac{1}{\gamma}\sin\gamma x\cdot\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\Big|_0^\infty+\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \frac{\sin\gamma x}{x}\cos x dx$$

از آن‌جا که

$$\left|\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right|\leqslant\left|\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right|+\left|\int_x^1 \frac{dx}{x}\right|=c+|\ln x|$$

پس، تبدیل مضاعف، برابرصفرمی‌شود و انتگرال به‌عامل ناپیوستهٔ دیریکله [(۱۱)]، منجر می‌شود.

به‌حالت‌خاص $\gamma=0$ می‌پردازیم. به‌ازای $A>0$ دلخواه، مجدداً با انتگرال گیری جزء به‌جزء، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^A dx\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt=x\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\Big|_0^A+\int_0^A \cos x dx=A\int_A^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt+\sin A=$$

$$=A\frac{\sin t}{t}\Big|_A^\infty+A\int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt+\sin A=A\int_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

با توجه به‌قضیهٔ دوم مربوط به‌مقدارهای میانگین [۴۸۷]، مقدار اخیر به صورت $A\int_A^{\bar{A}} \frac{\sin t}{t}\,dt$ $(\bar{A}>A)$ درمی‌آید؛ ولی به‌ازای $A\to\infty$، اگر شرط بولزانو-کوشی [۴۷۵] را درمورد انتگرال متقارب $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ به‌کار بریم، این انتگرال به‌سمت صفر میل می‌کند. بنابراین

$$\int_0^\infty dx\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt=0$$

اثبات درسایر حالت‌ها هم، به‌همین ترتیب، انجام می‌گیرد.

۲۴) رابطه‌های زیر را ثابت کنید ($\alpha, \beta > 0$):

$$\text{(a)}\quad \int_0^\infty dx\left\{\int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}dt\right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha} & (\alpha \geqslant \beta) \\ \frac{\pi}{2\beta} & (\alpha \leqslant \beta) \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^\infty dx\left\{\int_{\alpha x}^\infty \frac{\sin t}{t}dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t}dt\right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha} & (\alpha \geqslant \beta) \\ \frac{\pi}{2\beta} & (\alpha \leqslant \beta) \end{cases}$$

$$\text{(c)}\quad \int_0^\infty dx\left\{\int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t}dt\right\} = \frac{1}{2\alpha}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right| + \frac{1}{2\beta}\ln\left|\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\right| \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$= \frac{1}{\alpha}\ln 2 \quad (\alpha = \beta)$$

$$\text{(d)}\quad \int_0^\infty dx\left\{\int_{\alpha x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt\right\} \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt = \ln\frac{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}\beta^{\frac{1}{\alpha}}}$$

اثبات. (a). با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، انتگرال مفروض، به‌انتگرال از گونهٔ بررسی‌شده ۲۳)، (a) منجر می‌شود:

$$\int_0^\infty dx\left\{\int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}dt\right\} x \cdot \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}dt \cdot \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}dt\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} +$$

$$+ \int_0^\infty \cos\alpha x\,dx \int_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}dt + \int_0^\infty \cos\beta x\,dx \int_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \cos\frac{\alpha}{\beta}x\,dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \cos\frac{\beta}{\alpha}x\,dx \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt = \frac{\pi}{2\alpha} \text{ یا } \frac{\pi}{2\beta}$$

بسته به‌این‌که $\alpha \geqslant \beta$ یا $\alpha < \beta$ باشد.

دربارهٔ صفرشدن تبدیل مضاعف هم، توضیحی بدهیم. از این برآورد، که برای ما

معلوم است:

$$\left|\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt\right| < C + |\ln x|$$

روشن می‌شود که عبارت زیر علامت تبدیل باید، همراه با x، به‌سمت صفر میل کند. از طرف دیگر

$$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt = \frac{\sin t}{t}\Big|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^2}dt, \quad \left|\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt\right| < \frac{2}{x}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که عبارت مذکور، به‌ازای $x \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند.

اثبات بقیهٔ رابطه‌ها، به‌ترتیب مشابهی و با استناد به‌رابطه‌هایی که در ۲۳)، (b)، (c)، (d) و (e) وجود داشتند، انجام می‌گیرد.

§۵. محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های ناویژه

۴۹۸. انتگرال‌های با حدهای متناهی؛ جداکردن خصوصیت‌ها. قبلاً* در شماره‌های ۳۲۲ تا ۳۲۸، با طریقه‌های گوناگونی برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های معین، به‌معنای ویژه، آشنا شدیم. از این طریقه‌ها و راهنمایی‌ها، نمی‌توان مستقیماً برای برآورد خطای انتگرال‌های ناویژه، استفاده کرد. گاهی پیش می‌آید که، از راه تغییرمتغیر یا انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، بتوان انتگرال ناویژه را به‌انتگرال ویژه تبدیل کرد. درچنین صورتی، محاسبهٔ تقریبی انتگرال ناویژه، به‌مسأله‌ای تبدیل می‌شود که از قبل آن‌را می‌شناسیم.

در بیشتر حالت‌ها، محاسبهٔ تقریبی انتگرال ناویژهٔ $\int_a^b f(x)dx$ (با مرزهای متناهی)، از طریق جدا کردن خصوصیت‌ها ساده‌تر می‌شود*. این روش، عبارت است از پیدا کردن تابع ساده‌ای مثل $g(x)$ که، مثل این‌که، همهٔ خصوصیت‌های تابع $f(x)$ را به‌خود جذب می‌کند، به‌نحوی که تفاضل $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ دیگر این خصوصیت‌ها را ندارد و، به‌معنای ویژه، انتگرال‌پذیر است. ضمناً، انتخاب تابع $g(x)$ باید چنان‌باشد که انتگرال از $g(x)$، به‌صورت متناهی، قابل بیان و تابع $\varphi(x)$ دارای مشتق‌های‌متوالی، به‌تعداد لازم، باشد، تا برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال، بتوان از رابطه‌های موجود، برای

---

*) این روش را ل. ب. کانتوروویچ ارائه داده است.

برآورد خطا، استفاده کرد.

$g(x)$ را، برحسب موردهایی که پیش می‌آید، می‌توان به ترتیب‌های مختلفی انتخاب کرد. ما به‌عنوان نمونه، قاعدهٔ کلی این تابع را، در مورد طبقه‌ای از تابع‌ها که بسیار با آن‌ها برخورد می‌کنیم، نشان می‌دهیم.

فرض کنیم، تابع زیر علامت انتگرال، به‌این‌صورت باشد:

$$f(x)=(x-x_0)^{-\alpha}\cdot h(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b,\ 0<\alpha<1)$$

که در آن $h(x)$ را بتوان به ازای $a\leqslant x\leqslant b$، به رشتهٔ توانی بسط داد:

$$h(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n+\cdots$$

آن‌وقت، فرض می‌کنیم:

$$g(x)=(x-x_0)^{-\alpha}\cdot[c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n]$$

و

$$\varphi(x)=(x-x_0)^{-\alpha}[c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+\cdots]=(x-x_0)^{n+(1-\alpha)}[c_{n+1}+\cdots]$$

از $g(x)$ می‌توان به‌سادگی انتگرال گرفت. از طرف دیگر، روشن است که $\varphi(x)$، در بازهٔ $[a, b]$ و منجمله در نقطهٔ x_0، دارای n مشتق پیوسته است.

۴۹۹. مثال‌ها. ۱) می‌خواهیم، این انتگرال را محاسبه کنیم:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

در انتگرال اخیر، تنها نقطهٔ خاص، عبارت است از ۰.

$(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ را، برحسب توان‌های x، بسط می‌دهیم و در جملهٔ x^4 توقف می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$g(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}x^2+\frac{9}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4\right),$$

$$\varphi(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+\cdots+\frac{35}{128}x^4\right)\right]=\frac{63}{256}x^{\frac{9}{2}}+\cdots$$

آن‌وقت

$$I=\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}g(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\varphi(x)dx=I_1+I_2$$

مقدار I_1 به‌آسانی مجاسبه می‌شود:

$$I_1=\frac{7158\,01}{64512\,0}\sqrt{2}=1/5691585\ldots$$

I_2 را از روی‌دستور سیمپسون پیدا می‌کنیم. با تقسیم بازهٔ $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ به $2n=10$ بخش، محاسبه‌ها را تا ۶ رقم بعد از ممیز انجام می‌دهیم:

$$y_0=y_{\frac{1}{2}}=0 \qquad 2y_1=0/000018$$

$$4y_{\frac{3}{2}}=0/000225$$

$$2y_2=0/000431 \qquad I_1\doteq 1/5691585$$

$$4y_{\frac{5}{2}}=0/002496 \qquad I_2\doteq 0/0016385$$

$$2y_3=0/003017 \qquad I\doteq 1/5707970$$

$$4y_{\frac{7}{2}}=0/012901$$

$$2y_4=0/012632$$

$$4y_{\frac{9}{2}}=0/046350$$

$$y_5=0/020239$$

$$0/098309 \mid 60$$

$$0/0016385$$

مقدار واقعی I [همان‌طور که از نظریهٔ تابع‌های «بتا» در ۵۲۹، (5a) خواهیم دید] برابر است با

$$\frac{\pi}{2}=1/5707963\ldots$$

میزان خطارا برآورد می‌کنیم (معلوم است که دراین‌جا، ازملاحظه‌هایی که، به‌کمك آن‌ها، می‌توان مقدار درست انتگرال را به‌دست آورد، استفاده نمی‌کنیم). داریم:

$$\varphi^{IV}(x)=\frac{۶۳}{۲۵۶}\cdot\frac{۹}{۲}\cdot\frac{۷}{۲}\cdot\frac{۵}{۲}\cdot\frac{۳}{۲}\cdot x^{\frac{۱}{۲}}+\cdots>۰$$

و φ^{IV}، همراه با x، صعودی است، به‌طوری که به‌بزرگترین مقدار خود به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ می‌رسد. از این‌جا، به‌سادگی به‌دست می‌آید: $\max\varphi^{IV}=۲۸۸$.

خطای دستور سیمپسون، از روی رابطهٔ معلوم زیر [۳۲۷]، به‌دست می‌آید:

$$R=-\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}}{۱۰^{۴}}\cdot\frac{\varphi^{IV}(\xi)}{۱۸۰}$$

و بنابراین

$$R<۰;\ |R|<\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}}{۱۰^{۴}}\cdot\frac{۲۸۸}{۱۸۰}=\frac{۵}{۱۰^{۶}}$$

از طرف دیگر، خطای ناشی از گرد کردن، برای $I_۲$، از لحاظ قدر مطلق، از $\frac{۵\times۱۰^{-۶}}{۶۰}<۱۰^{-۷}$ کمتر است؛ به‌همین ترتیب هم، خطای مطلق مقدار $I_۱$. خطای کلی، بین $-\frac{۵/۲}{۱۰^{۶}}$ و $\frac{۵/۲}{۱۰^{۶}}$ قرار دارد، به‌نحوی که

$$۱/۵۷۰۷۹۱<I<۱/۵۷۰۷۹۸ \quad \text{یا} \quad ۱/۵۷۰۷۹۱۸<I<۱/۵۷۰۷۹۷۲$$

و بالاخره

$$I=۱/۵۷۰۷۹_{\pm ۰/۰۰۰۰۱}$$

۲) برای انتگرال $I=\int_{۰}^{۱}x^{-\frac{۱}{۲}}(۱-x)^{\frac{۳}{۴}}dx$، هر دو نقطهٔ ۰ و ۱، نقطه‌های خاص هستند. به‌این مناسبت، آن‌را این‌طور تقسیم می‌کنیم:

$$I=\int_{0}^{1}=\int_{0}^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}=I_1+I_2$$

برای محاسبهٔ I_1 فرض می‌کنیم:

$$g(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{4}x+\frac{31}{32}x^2+\frac{77}{128}x^3+\frac{1155}{2048}x^4\right)$$

$$\varphi(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{3}{4}}-\left(1+\cdots+\frac{1155}{2048}x^4\right)\right]$$

به‌نحوی که

$$I_1=\int_{0}^{\frac{1}{2}}g(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\varphi(x)dx=I_{11}+I_{12}$$

فوراً به‌دست می‌آید:

$$I_{11}=\frac{576293}{491520}\sqrt{2}\doteq 1/6581248$$

انتگرال I_{12} را هم، از روی دستور سیمپسون، $2n=10$، تا شش رقم بعد از ممیز حساب می‌کنیم:

$$I_{12}\doteq 0/003813$$

از آن‌جا: $I_1\doteq 1/6619381$. با برآورد خطا، شبیه مورد، قبل، پیدا می‌کنیم:

$$I_1=1/661938_{+0/000001}$$

به‌همین ترتیب

$$I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{4}}dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{4}}\left(1+\frac{1}{2}x+\cdots+\frac{35}{128}x^4\right)dx+$$

$$+\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{4}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1+\dots)\right]dx=I_{21}+I_{22}$$

به‌دست می‌آوریم:

$$I_{21}\doteq 3/5802991,\quad I_{22}\doteq 0/0020333,\quad I_2\doteq 3/5823324$$

اگر خطا را، مثل قبل، برآورد کنیم، در آن‌صورت خواهیم داشت:

$$I_2=3/582332_{+0/000005}$$

به‌این ترتیب

$$I=5/24425_{+0/000015}\quad \text{یا}\quad I=5/24426_{\pm 0/00001}$$

۳) انتگرال $I=\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ را، با نقطهٔ خاص $x=0$، در نظر می‌گیریم. شبیه مثال قبل، عمل می‌کنیم:

$$I=\int_0^1 (1+x+x^2+x^3+x^4)\ln x\,dx+\int_0^1 \frac{x^5\ln x}{1-x}dx=I_1+I_2$$

به‌سادگی، و به‌کمك انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، پیدا می‌شود: $I_1=-1/46361\dots$. انتگرال I_2 را هم، از روی دستور سیمپسون ($2n=10$، تا پنج رقم) حساب می‌کنیم. به‌دست می‌آید: $I_2\doteq 0/18135$. بنابراین، $I\doteq -1/64496$. مقدار واقعی این انتگرال [۵۱۹، ۱)، (b)] را ببینید] برابر است با

$$-\frac{\pi^2}{6}=-1/644934\dots$$

برای برآورد خطا، باید مشتق $\varphi^{IV}(x)$ را از روی دستور لایب‌نیتس، محاسبه کرد. [۱۱۷]. ضمناً، بهتر است، برای اثبات رابطهٔ موردنظر، از دستور زیر استفاده شود:

$$\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]^{(k)}=\frac{1}{k+1}f^{(k+1)}(c)$$

(که در آن، c مقداری است بین a و x)، $f(x)=\ln x$ و $a=1$. برآورد تخمینی می‌دهد: $\varphi^{IV}(x)<200$؛ از آن‌جا

$$|R|<\frac{1}{10^4}\cdot\frac{200}{180}\doteq 0/000011$$

خطای کلی $\pm 0/000013$ است. بالاخره

$$|I|=1/6485_{\pm 0/0002}$$

۴) در خاتمه، نمونه‌ای متفاوت را در نظر می‌گیریم:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx$$

با نقطهٔ خاص ۰.

طبیعی است که تابع زیر انتگرال را با تابع $g(x)=\log x$ مقایسه کنیم که، برای آن، انتگرال به‌آسانی محاسبه می‌شود:*

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log x\,dx=M\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\,dx=Mx(\ln x-1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\log\frac{\pi}{2}-M\right)\doteq -0/374123$$

انتگرال I_2 را هم، از تابع $\varphi(x)=\log\frac{\sin x}{x}$، از روی دستور سیمپسون، به‌ازای $2n=18$ با شش رقم، محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$I_2=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log x-\log\sin x)\,dx\doteq -0/098733$$

بنابراین

$$I=I_1+I_2\doteq -0/472856$$

در عمل، انتگرال I، تنها در ضریب M با انتگرال معلوم [۴۹۲، ۱°]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$$

---

*) حرف M، در برابری‌ها، به‌معنای مدول عبور از لگاریتم طبیعی به‌لگاریتم دهدهی است.

تفاوت دارد، در نتیجه:

$$I=-\frac{\pi}{۲}\cdot log_{۲}=-۰/۴۷۲۸۵۶۸\ldots$$

می‌بینیم، با مقداری که قبلاً به‌دست آوردیم، هر شش رقم تطبیق می‌کنند.

ولی وقتی که مقدار واقعی را نداشته باشیم، ناچاریم، برای برآورد خطا، ازدستور سیمپسون استفاده کنیم. این‌جا

$$\varphi(x)=M(\ln x-\ln \sin x),\quad \varphi^{IV}(x)=M\frac{۶(x^{۴}-\sin^{۴}x)-۴x^{۴}\sin^{۲}x}{x^{۴}\sin^{۴}x}$$

می‌توان روشن کرد که $۰<\varphi^{IV}(x)<\frac{\pi^{۴}}{۱۲}M<۳/۶$، و از آن‌جا $R<۰$ و $|R|<۰/۰۰۰۰۰۲$. با به‌حساب آوردن خطای مربوط به گردکردن، می‌توان نوشت:

$$|I|\doteq ۰/۴۷۲۸۵_{+۰/۰۰۰۰۱}$$

۵۰۰. ملاحظه‌هایی دربارهٔ محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های ویژه. روش جدا کردن خصوصیت‌ها، می‌تواند برای محاسبهٔ انتگرال‌های ویژه هم سودمند باشد، به‌خصوص، اگر تابع زیر انتگرال، ولو این‌که خود پیوسته باشد، مشتق‌های پیوسته به‌تعداد لازم نداشته باشد (که همین موضوع، برآورد خطا را، مواجه با اشکال می‌کند). این مطلب را، ضمن مثالی، روشن می‌کنیم.

این انتگرال را در نظر می‌گیریم:

$$I=\int_{۰}^{۱}\ln x\cdot\ln(۱+x)dx$$

به‌سادگی دیده می‌شود که، به‌ازای $x\to ۰$، تابع زیر انتگرال به‌سمت ۰ میل می‌کند، به‌طوری که این تابع را می‌توان، در تمامی بازهٔ انتگرال‌گیری، پیوسته به‌حساب آورد. ولی مشتق اول تابع زیر انتگرال، به‌ازای $x=۰$، بی‌نهایت می‌شود. با استفاده از بسط لگاریتم، تابع را به‌صورت مجموع دو تابع درمی‌آوریم:

$$g(x)=\ln x\cdot\left(x-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۴}}{۴}\right)$$

$$\varphi(x)=\ln x\cdot\left[\ln(۱+x)-\left(x-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۴}}{۴}\right)\right]$$

از تابع اول می‌توان، به سادگی، انتگرال گرفت و مقدار آن برابر است با ۰/۲۰۵۲۸... —. انتگرال تابع دوم را هم (که‌چهار مشتق‌متوالی‌پیوسته دارد)، می‌توان از روی دستور سیمپسون ($2n=10$، با پنج رقم بعد از ممیز) محاسبه کرد، که به‌عدد ۰/۰۰۳۴۸ — می‌رسیم؛ به‌طوری که، نتیجهٔ کلی، برابر ۰/۲۰۸۷۶ — می‌شود.

چون $|\varphi^{IV}(x)|<36$، پس $|R|<0/00002$ و بالاخره

$$|I|=0/20876_{\pm 0/00003}=0/2087_{+0/0001}$$

(همهٔ این رقم‌ها، با مقدار واقعی منطبق هستند، زیرا مقدار واقعی I برابر است با ۰/۲۰۸۷۶۱۸... —).

توجه به‌این نکته جالب است که، اگردستور سیمپسون را (به‌ازای همان $2n=10$ و باهمان پنج‌رقم دهدهی) درمورد تابع زیرانتگرال — و بدون جداکردن خصوصیت‌ها — به‌کار می‌بردیم، به‌عدد ۰/۲۰۸۰ — $\doteq I$ می‌رسیدیم، یعنی تنها سه‌رقم اول آن مطمئن‌بود.

به‌این ترتیب، اگر از روش جدا کردن خصوصیت‌ها استفاده نکنیم، نه‌تنها در برآورد خطا، دچار اشکال می‌شویم، بلکه غالباً، با دقت‌کمتری درنتیجهٔ محاسبه هم، مواجه‌خواهیم بود.

۵۰۱. محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌های ناویژه با مرزهای بی‌نهایت. در حالت‌های نادری، می‌توان انتگرال $\int_a^{\infty} f(x)dx$ را، بنابر تعریف آن، به‌عنوان حد انتگرال ویژهٔ $\int_a^{A} f(x)dx$ در نظر گرفت و (به‌ازای مقدار به‌قدر کافی بزرگ A) از رابطهٔ تقریبی $\int_a^{\infty} \doteq \int_a^{A}$ استفاده کرد که البته، در این‌صورت، با روش‌هائی که می‌شناسیم، قابل محاسبه است. از این روش، تنها در مواردی می‌توان استفاده کرد که تابع‌های زیر علامت انتگرال، با ترقی x، با سرعت نزول کنند، به‌نحوی که، حتی برای مقدارهای نسبتاً کوچك A هم، برابری تقریبی فوق، کم و بیش، دارای ارزش باشد.

۱) مثلاً در حالت انتگرال $I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$، وضع از این قرار است.

از نابرابری $x^2 \geqslant 2Ax-A^2$ نتیجه می‌شود:

$$e^{-x^2}<e^{A^2}.e^{-2Ax}$$

و

$$\int_A^\infty e^{-x^2}dx \leqslant e^{A^2}\cdot\int_A^\infty e^{-2Ax}dx = \frac{1}{2A}e^{-A^2}$$

و به‌ازای $A=3$ داریم:

$$\int_3^\infty e^{-x^2}dx < 0/00002$$

ولی انتگرال $\int_0^3 e^{-x^2}dx$ را می‌توان از روی دستور سیمپسون، به‌ازای $n=30$ و تا پنج رقم، محاسبه کرد و به‌نتیجهٔ ۰/۸۸۶۲۱ رسید. جواب را می‌توان به‌سادگی برآورد کرد: $|(e^{-x^2})^{IV}| \leqslant 12$، $|R| < 2\times 10^{-5} <$ خطای کلی، بین ۰/۰۰۰۰۴ — و ۰/۰۰۰۰۶ واقع است. بنابراین

$$0/88617 < I < 0/88627,\quad I \doteq 0/88622 \pm 0/00001$$

مقدار واقعی I، به‌طوری که می‌دانیم [۴۹۲، ۲°] برابر است با:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0/8862269.$$

اغلب بهتر است که یا خود انتگرال $\int_a^\infty$ را به‌انتگرالی با مرزهای متناهی تبدیل کنیم و یا ابتدا آن‌را به‌دو انتگرال $\int_a^A + \int_A^\infty$ تجزیه و، سپس، دومی را به انتگرالی با مرزهای متناهی تبدیل کنیم.

۲) دوباره، همان انتگرال $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ را درنظر می‌گیریم و آن‌را به‌صورت مجموع

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty = I_1 + I_2$$

در می‌آوریم. I_1 را از روی دستور سیمپسون ($2n=10$، با پنج رقم اعشار) حساب

می‌کنیم: $|R|<۰/۰۰۰۰۱$، $I_۱=۰/۷۴۶۸۳_{\pm ۰/۰۰۰۰۲}$؛ $I_۲$ را با انتخاب $x=\frac{۱}{t}$ تبدیل می‌کنیم:

$$I\doteq\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{t^{۲}}e^{-\frac{۱}{t^{۲}}}dt$$

و با روش عادی به‌دست می‌آید: $I_۲\doteq ۰/۱۳۹۴۵$، به طوری که $I\doteq ۰/۸۸۶۲۸$. به‌برآورد خطا، نمی‌پردازیم.

اگر انتگرال با مرزهای بی‌نهایت، در بازهٔ متناهی هم، دارای نقطهٔ خاص باشد، در آن‌صورت، باید انتگرال را به‌دو بخش تقسیم کرد، به‌نحوی‌که هر بخش تنها شامل یك خصوصیت باشد.

۳) این انتگرال را در نظر می‌گیریم ($۰<a<۱$):

$$I=\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{a-۱}}{x+۱}dx=\int_{۰}^{۱}\frac{x^{a-۱}}{x+۱}dx+\int_{۱}^{\infty}\frac{a^{a-۱}}{x+۱}dx=I_۱+I_۲$$

انتگرال $I_۱$، با جدا کردن خصوصیت، پیدا می‌شود:

$$I_۱=\int_{۰}^{۱}(x^{a-۱}-x^{a}+x^{a+۱}-x^{a+۲}+x^{a+۳})dx-\int_{۰}^{۱}\frac{a^{a+۴}}{۱+x}dx=I_{۱۱}+I_{۱۲}$$

$I_{۱۱}=\frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+۱}+\frac{۱}{a+۲}-\frac{۱}{a+۳}+\frac{۱}{a+۴}$ و $I_{۱۲}$ از روی دستور سیمپسون محاسبه می‌شود.

مثلاً، فرض کنید: $a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰/۷۰۷۱۰۶۸\ldots$، آن‌وقت: $I_{۱۱}=۱/۱۴۰۵۲\ldots$.

برای $I_{۱۲}$ ($۲n=۱۰$ با پنج رقم)، عدد $۰/۰۹۵۱۸$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین، $I_۱\doteq ۱/۰۴۵۳۴$.

انتگرال $I_۲$، با تبدیل $x=\frac{۱}{t}$، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$I_۲=\int_{۰}^{۱}\frac{t^{b-۱}}{۱+t}dt$$

که در آن داریم: ... ۰/۲۹۲۸۹۳۱ = $a - 1 = b$. شبیه قبل، به‌دست می‌آید: ۲/۹۰۲۸۹ ≐ I_2. وبالاخره: ۳/۹۴۸۲۳ ≐ I. بعداً [در ۵۲۲، ۱°] خواهیم دید که مقدار واقعی I برابر است با: ... ۳/۹۴۸۲۴۶ = $\frac{\pi}{\sin \pi a}$.

وقتی که انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ «به‌کندی» متقارب می‌شود، گاهی بهتر است جمله‌هایی را که به سادگی قابل محاسبه‌اند، از آن جدا کنیم (مثلاً، با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء متوالی)، تا آن‌جا که، آن‌چه باقی می‌ماند، مقداری کوچك باشد.

۴) این انتگرال را در نظر می‌گیریم:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

آن‌را، به‌صورت مجموع دو انتگرال $\int_0^A + \int_A^\infty$ می‌نویسیم؛ بدون توجه به این که انتگرال دوم، ممکن است کوچك باشد. با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء داریم:

$$\int_A^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \left\{ -\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + 6\frac{\sin x}{x^4} - \right.$$

$$\left. - 24\frac{\cos x}{x^5} - 120\frac{\sin x}{x^6} \right\}\Big|_A^\infty + 720 \int_A^\infty \frac{\sin x}{x^7} dx$$

مثلاً $A = 2\pi$ می‌گیریم، داریم:

$$\int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{(2\pi)^3} + \frac{24}{(2\pi)^5} + 720 \int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x^7} dx$$

مجموع جمله‌های انتگرال‌گیری شده، برابر است با ... ۰/۱۵۳۵۴. ضمناً

$$0 < 720 \int_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x^7} dx < 720 \int_{2\pi}^\infty \frac{dx}{x^7} = \frac{720}{(2\pi)^6} < 0/002$$

با محاسبهٔ $\int_0^{2\pi}$ از روی دستور سیمپسون ($2n = 40$، باچهار رقم)، پیدا می‌کنیم:

۰/۴۱۸۲.۱

برآورد خطا

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!},\quad f^{IV}(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!(2m+5)}$$

$$|f^{IV}(x)|<\frac{1}{5}\operatorname{ch} 2\pi<54,\quad |R|<0/0012$$

از این‌جا، با در نظرگرفتن حساب کلی خطا

$$1/5702<I<1/5752,\quad I=1/57_{+0/01}$$

همان‌طورکه می‌دانیم [۴۹۲، ۳°]، در عمل: ... $I=\frac{\pi}{2}=1/5707$.

۵۰۲. استفاده از بسط مجانبی. در محاسبه‌های تقریبی انتگرال‌های به‌صورت

$$\int_{x}^{\infty} f(t)\,dt$$

اغلب، استفاده از بسط مجانبی، می‌تواند مفید باشد. این مطلب را، ضمن چند مثال، روشن می‌کنیم:

۱°. لگاریتم انتگرالی. با شرط $a<1>0$، لگاریتم انتگرالی $\operatorname{li} a$، این‌طور تعریف می‌شود:

$$\operatorname{li} a=\int_{0}^{a}\frac{du}{\ln u} \qquad (12)$$

در حالت $a>1$، این انتگرال متباعد می‌شود و، در این‌صورت، آن‌را به‌مفهوم مقدار اصلی می‌فهمند:

$$\operatorname{li} a=\text{V.p.}\int_{0}^{a}\frac{du}{\ln u}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{0}^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{a}\right)\frac{du}{\ln u} \qquad (12^*)$$

[۴۸۴ را ببینید].

ابتدا فرض می‌کنیم $a=e^{-x}<1$؛ می‌گیریم (به‌ازای $x>0$)، و در انتگرال (۱۲)، تبدیل $u=e^{-t}$ را انجام می‌دهیم:

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt \qquad (۱۳)$$

با فرض $t = x+v$، به‌انتگرال

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = -e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-v}dv}{x+v} \qquad (۱۴)$$

می‌رسیم. چون داریم:

$$\frac{۱}{x+v} = \frac{۱}{x} - \frac{v}{x^۲} + \frac{v^۲}{x^۳} - \cdots + (-۱)^{n-۱}\frac{v^{n-۱}}{x^n} + (-۱)^n \frac{v^n}{x^n(x+v)}$$

پس از آن‌جا [۴۸۹، ۴)]:

$$\mathrm{li}(e^{-x}) = -e^{-x}\left\{\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۲} + \frac{۲!}{x^۳} - \frac{۳!}{x^۴} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-۱)^{n-۱}\frac{(n-۱)!}{x^n} + r_n(x)\right\} \qquad (۱۵)$$

که در آن، جملهٔ متمم، با انتگرال زیر بیان می‌شود:

$$r_n(x) = (-۱)^n \int_0^\infty \frac{v^n . e^{-v}dv}{x^n(x+v)} \qquad (۱۵a)$$

که اگر آن‌را حذف کنیم و بسط را تا بی‌نهایت ادامه دهیم.

$$\mathrm{li}(e^{-x}) \sim e^{-x}\left\{\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۲} + \frac{۲!}{x^۳} - \cdots + (-۱)^{n-۱}\frac{(n-۱)!}{x^n} + \cdots\right\} \qquad (۱۶)$$

آن‌وقت، رشتهٔ حاصل، به‌روشنی متباعد خواهد شد، زیرا نسبت جملهٔ آخر بر جملهٔ قبل از خود

$$\frac{n}{x} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

ولی، از عبارت (۱۵a) دیده می‌شود که جملهٔ متمم، علامت نخستین جملهٔ حذف شده را دارد و، از لحاظ قدرمطلق، از آن کمتر است.

$$|r_n(x)|<\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^\infty e^{-v}\cdot v^n dv=\frac{n!}{x^{n+1}}$$

به‌این ترتیب، رشتهٔ (۱۶) تابع $\mathrm{li}(e^{-x})$ را می‌پوشاند و، درعین حال، نمایش مجانبی آن است [۴۶۳]. از §۶ فصل قبل می‌دانیم که چگونه می‌توان از چنین رشته‌ای برای محاسبهٔ تقریبی استفاده کرد: اگر $n=E(x)$ بگیریم، نتیجهٔ بهتر به‌دست می‌آید.

اگر $a>1$ و $x<0$ باشد، موقعیت عمل‌ها به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای بغرنج‌تر می‌شود. در این حالت هم، دستورهای (۱۳) تا (۱۶) را می‌توان ثابت کرد، ولی همهٔ انتگرال‌ها، در این‌جا، به‌معنای مقدار اصلی فهمیده می‌شود. در این حالت، بسط (۱۶)، علامت ثابتی دارد (زیرا $x<0$)؛ و برآورد جملهٔ متمم زحمت بیشتری ایجاد می‌کند. ستیلتیس (Th. Stieltjes)، با بررسی‌های مفصل و ظریفی، موفق شد ثابت کند که برای $x<0$ مفروض هم، برای این‌که تقریب بهتری ازعدد $\mathrm{li}(e^{-x})$ به‌دست آوریم، باید $n=E(x)$ گرفت. ضمناً، مرتبهٔ تقریب، با عبارت $\sqrt{\frac{2\pi}{|x|}}$ برآورد می‌شود.

برای $\mathrm{li}(e^{-x})$، می‌توان بسط برحسب توان‌های درست و صعودی x را، در واقع برای همهٔ مقدارهای x، به‌دست آورد. برای این منظور، دستور (۱۳) را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\mathrm{li}(e^{-x})=\int_0^1(1-e^{-t})\frac{dt}{t}-\int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}+\int_1^x\frac{dt}{t}+\int_0^x(1-e^{-t})\frac{dt}{t}$$

در حالت $x<0$، انتگرال $\int_1^x\frac{dt}{t}$ متباعد می‌شود و باید مقدار اصلی آن‌را در نظر گرفت که برابر است با

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_1^\varepsilon+\int_{-\varepsilon}^x\right)\frac{dt}{t}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\varepsilon+\ln\frac{-x}{\varepsilon}\right]=\ln(-x)=\ln|x|$$

مجموع دو انتگرال اولی، مقدار ثابت C**، و مستقل از x است. تنها این‌می‌ماند که انتگرال

---

*) در حالت مورد نظر $a>1$، می‌توان بسط مجانبی (۱۶) و عبارت جملهٔ متمم را، با به‌کار بردن متوالی انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، از انتگرال (۱۳)، به‌دست آورد. ولی، از این‌راه، برای حالت $a>1$، نمی‌توان استفاده کرد.

**) به‌طوری که بعداً [در ۵۳۸، ۳)] خواهیم دید، این‌مقدار ثابت، در عمل متحد با ثابت اولر است.

آخری را، برحسب توان‌های x بسط دهیم تا نتیجهٔ مطلوب به‌دست آید:

$$\mathrm{li}(e^{-x})=C+\ln|x|-x-\frac{x^2}{2!2}-\frac{x^3}{3!3}-\frac{x^4}{4!4}-\dots-\frac{x^n}{n!n}-\dots \qquad (۱۷)$$

ولی، استفاده از این بسط، برای مقدارهای بزرگ $|x|$ مناسب نیست و، در این حالت، بسط متباعد (۱۶)، در برابر آن، امتیاز اساسی دارد. به‌این ترتیب، ستیلتیس، با انتخاب ۲۳ جمله از رشتهٔ (۱۶)، پیدا کرد:

$$\mathrm{li}\,10^{10}=455055614/586$$

درحالی‌که، در رشتهٔ (۱۷)، به‌بیش از 10^{10} جمله نیاز داریم تا به‌همین تقریب برسیم.

۲°. کسینوس و سینوس انتگرالی:

$$P=\mathrm{ci}\,x=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}dt,\quad Q=\mathrm{si}\,x=-\int_x^\infty\frac{\sin t}{t}dt$$

برای ساده‌کردن محاسبه‌ها، ازانتگرال تابع‌های‌مختلط بامتغیرهای‌حقیقی، استفاده‌می‌کنیم.

$$P+Qi=-\int_x^\infty\frac{e^{it}}{t}dt=i\int_x^\infty\frac{de^{it}}{t}$$

با انتگرال‌گیری‌های متوالی جزءبه‌جزء، این دستور حاصل می‌شود:

$$P+Qi=\frac{e^{ix}}{ix}+\frac{e^{ix}}{(ix)^2}+2!\frac{e^{ix}}{(ix)^3}+3!\frac{e^{ix}}{(ix)^4}+\dots$$

$$\dots+(n-1)!\frac{e^{ix}}{(ix)^n}+r_n(x)$$

که در آن داریم:

$$r_n(x)=(-1)^{n-1}.i^n.n!.\int_x^\infty\frac{e^{it}}{i^{n+1}}dt$$

اگر این‌رابطه را، جمله‌به‌جمله، بر e^{ix} — تقسیم‌کنیم، مقدارهای حقیقی و موهومی را در دو طرف برابری، به‌طور جداگانه، برابر قرار دهیم، رابطه‌ای به‌دست می‌آید که، برای محاسبه، راحت‌تر است:

$$\int_x^\infty\frac{\cos(t-x)}{t}dt=-P\cos x-Q\sin x=$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x}-\frac{3!}{x^3}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)!}{x^{2m-1}}\right\}+r'_{2m-1}(x) \qquad (18)$$

و

$$\int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}dt = P\sin x - Q\cos x =$$

$$=\frac{1}{x}\left\{1-\frac{2!}{x^2}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{(2m+2)!}{x^{2m-2}}\right\}+r''_{2m-2}(x)^* \qquad (19)$$

که در آن‌ها، به‌ترتیب، داریم:

$$r'_{2m-1}(x)=(-1)^m(2m+1)!\int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+2}}dt,$$

$$r''_{2m-2}(x)=(-1)^m(2m)!\int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+1}}dt$$

به‌سادگی ثابت می‌شود [مثلاً، به‌کمك رابطهٔ بونه، ۳۰۶، (۳)] که

$$\left|\int_x^X \frac{\sin(t-x)}{t^n}dt\right|\leqslant\frac{2}{x^n}$$

با گذر به‌حد، به‌ازای $X\longrightarrow\infty$، نتیجه می‌گیریم که، جملهٔ متمم در دستورهای (۱۸) و (۱۹)، از لحاظ قدرمطلق، هرکدام از دوبرابر جمله‌ای‌که باید به‌دنبال جمله‌ای‌های‌نوشته شده بیاید، تجاوز نمی‌کند. از این‌جا، روشن می‌شود که با ادامهٔ بسطهای (۱۸) و (۱۹) تا بی‌نهایت، به‌نمایش مجانبی انتگرال‌های سمت چپ می‌رسیم.

مثلاً، اگر در (۱۹) فرض کنیم: $x=k\pi$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$، به‌دست می‌آید:

$$\rho_k=\mathrm{si}(k\pi)=$$

$$=-\int_{k\pi}^\infty \frac{\sin t}{t}dt\simeq(-1)^{k+1}\left\{\frac{1}{k\pi}-\frac{2!}{(k\pi)^3}+\frac{4!}{(k\pi)^5}-\frac{6!}{(k\pi)^7}+\cdots\right\}$$

که از این‌جا، می‌توان مقدارهای ρ_k را، به‌ازای $k>2$، پیدا کرد:

---

*) جالب است به‌این نکته توجه کنیم که جمله‌های واقع در $\{\ldots\}$، عکس مقدارهایی هستند، که در رشته‌های توانی سینوس و کسینوس، به‌دست می‌آید [۴۰۴، (۱۲) و (۱۳)].

$\rho_3 = ۰/۱۰۴۰$، $\rho_4 = -۰/۰۷۸۶$، $\rho_5 = ۰/۰۶۳۱$، $\rho_6 = -۰/۰۵۲۸$، ...

مثلاً، برای محاسبهٔ ρ_4، سه جمله از داخل آکولاد کافی است:

$$۰/۰۷۹۵۸ - ۰/۰۰۱۰۱ + ۰/۰۰۰۰۸ = ۰/۰۷۸۶۵$$

از آن‌جاکه خطای مطلق، کمتر از $۰/۰۰۰۰۳ = ۲ \times ۰/۰۰۰۰۱۵$ می‌باشد، بنابراین ρ_4 بین ۰/۰۷۸۶۲ و ۰/۰۷۸۶۸ واقع می‌شود و سرانجام

$$\rho_4 = ۰/۰۷۸۶ \ldots$$

MATH75.IR

فصل چهاردهم

انتگرال‌های وابسته به پارامتر

§۱. نظریه‌های مقدماتی

۵۰۳. طرح مسأله. تابع دو متغیرهٔ $f(x, y)$ را درنظر می‌گیریم که برای همهٔ مقدارهای x، دریك بازهٔ $[a, b]$، و برای همهٔ مقدارهای y، درمجموعهٔ $Y = \{y\}$، معین باشد. فرض کنیم، به ازای هر مقدار ثابت y از Y، $f(x, y)$، در بازهٔ $[a, b]$، به‌معنای ویژه یا ناویژه، انتگرال‌پذیر باشد. آن‌وقت، انتگرال

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx \qquad (۱)$$

تابعی از متغیر کمکی یا پارامتر y می‌شود.

در ۴۳۶، درصحبت از رشته تابع‌های $\{f_n(x)\}$، با انتگرال‌های

$$I_n = \int_a^b f_n(x)dx$$

سروکار داشتیم، که حالت خاصی از انتگرال‌های (۱) می‌شوند: در این‌جا، اندیس طبیعی n، نقش پارامتر را به‌عهده دارد.

دربارهٔ تابع $f(x)$، به‌طور طبیعی، یك رشته پرسش‌ها پیش می‌آید: وجود ومقدار حد آن، ضمن گذر حدی معین؛ به ویژه، پیوستگی آن نسبت به y؛ مشتق‌پذیری آن ومقدار مشتق آن؛ وبالاخره، انتگرال آن. دراین فصل، به‌این پرسش‌ها می‌پردازیم.

خود بررسی ویژگی‌های تابعی که به‌وسیلهٔ انتگرال (۱) بیان شده است، در رابطه با پارامتر آن، به‌خودی خود، جالب است (در این باره، مثلاً §۵ را ببینید)؛ ولی، علاوه بر آن، این ویژگی‌ها، همان‌طور که خواهید دید، کاربردهای گوناگونی، به‌خصوص، در مسألهٔ مربوط به‌محاسبهٔ انتگرال‌های ناویژه دارند.

۵۰۴. میل یکنواخت به‌سمت تابع حدی. مفهومی که در این عنوان آورده‌ایم، نقشی قطعی در بررسی‌های آیندهٔ ما خواهد داشت. فرض کنیم، تابع $f(x, y)$، در حالت کلی، در مجموعهٔ دوبعدی $\mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ معین است که، در آن $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$، به‌ترتیب، مجموعهٔ مقدارهایی باشند که x و y اختیار می‌کنند. ضمناً، $\mathcal{Y}$ دارای نقطهٔ تجمع، مثلاً عددمتناهی y_0، باشد.

اگر ۱) برای تابع $f(x, y)$، به‌ازای $y \to y_0$ حد متناهی وجود داشته باشد

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \quad (\mathcal{X} \text{ از } x) \tag{۲}$$

و ۲) برای عدد دلخواه $\varepsilon > 0$، چنان عدد $\delta > 0$ مستقل از x، پیدا شود که، برای همهٔ مقدارهای x از $\mathcal{X}$، داشته باشیم:

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \text{ آن‌وقت } |y - y_0| < \delta \text{ وقتی} \tag{۳}$$

در آن صورت گویند، تابع $f(x, y)$، نسبت به x از حوزهٔ $\mathcal{X}$، به‌سمت تابع حدی $\varphi(x)$، به‌طور یکنواخت میل می‌کند.

به‌آسانی می‌توان همین تعریف را، برای حالتی هم که y_0 عددی ناویژه، و مثلاً $+\infty$ باشد، به‌کار برد؛ در این حالت، تنها به‌جای نابرابری $|y - y_0| < \delta$، باید از نابرابری $y > \Delta$ استفاده کرد. در فصل دوازدهم [۴۲۸]، با حالت خاصی ازاین‌گونه میل یکنواخت به‌سمت تابع حدی، سروکار داشتیم؛ در آن‌جا، صحبت از تابع $f_n(x)$ بود، که با اندیس طبیعی n، به‌عنوان پارامتر، برخورد کردیم.

در ۴۲۹، که بادنبالهٔ تابع‌ها سروکار داشتیم، روشن کردیم که، برای تقارب یکنواخت، لازم و کافی است که یکنواختی اصل تقارب برقرار باشد. درحالت کلی هم، به‌همین ترتیب، می‌توان عمل کرد. اگر به‌فرض متناهی بودن y_0 اکتفا کنیم، آن‌وقت:

۱°. برای آن‌که تابع $f(x, y)$، به‌ازای $y \to y_0$، دارای تابع حدی باشد و به‌طور یکنواخت، نسبت به x از حوزهٔ $\mathcal{X}$، به‌سمت آن میل کند، لازم و کافی است که برای هرعدد $\varepsilon > 0$، چنان عدد $\delta > 0$، مستقل از x، وجود داشته باشد که نابرابری

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon \tag{۴}$$

برای همهٔ مقدارهای x از $\mathcal{X}$ برقرار باشد، وقتی که تنها داشته باشیم:

$$|y - y_0| < \delta, |y' - y_0| < \delta \quad (y \text{ و } y' \text{ از } \mathcal{Y}) \tag{۵}$$

[درحالت $y_0 = +\infty$ باید، به‌جای نابرابری‌های آخر، نابرابری‌های $y > \Delta$ و

$\Delta<y'$ را قرارداد].

شرط لازم است. فرض کنیم تقارب یکنواخت برقرار باشد. با عوض کردن ε به $\frac{\varepsilon}{2}$ در تعریف، و با انتخاب δ نظیر، دومقدار y و y' از $\mathcal{Y}$ را طوری اختیارمی کنیم که شرط‌های (۵) برقرار باشند، آن‌وقت، هرچه باشد x، خواهیم داشت:

$$|f(x, y')-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad |\varphi(x)-f(x, y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

واز آن‌جا، (۴) نتیجه می‌شود.

شرط کافی است. اگرشرط مذکور برقرار باشد، آن‌وقت قبل ازهمه، روشن‌است که تابع حدی (۲) وجود دارد. سپس، اگردرنابرابری (۴)، به‌ازای $y' \to y$، به‌سمت‌حد عبورکنیم (ضمناً y راطوری تثبیت‌کنیم که داشته باشیم: $|y-y_0|<\delta$)؛ به‌دست می‌آید:

$$|\varphi(x)-f(x, y)|<\varepsilon$$

که ازآن‌جا، میل یکنواخت تابع $f(x, y)$، به‌سمت تابع حدی $\varphi(x)$، ثابت می‌شود.

اکنون می‌توانیم به‌مسألهٔ تقارب یکنواخت دنبالهٔ تابع‌ها بپردازیم.

۲°. برای آن‌که تابع $f(x, y)$، به‌ازای $y \to y_0$، به‌طور یکنواخت (نسبت به x از حوزهٔ $\mathcal{X}$) به‌سمت تابع $\varphi(x)$ میل کند، لازم وکافی است که ــ با هرقانونی که واریانت y_n (از $\mathcal{Y}$) به‌سمت y_0 میل کند ــ هردنبالهٔ $\{f(x, y_n)\}$ به‌طور یکنواخت به‌سمت $\varphi(x)$ میل کند.

برای اثبات، تنها به‌حالت y_0 متناهی، اکتفا می‌کنیم.

شرط لازم است. با فرض میل یکنواخت $f(x, y)$ به‌سمت $\varphi(x)$، از روی $\varepsilon>0$ دلخواه، عدد نظیر $\delta>0$ را، طبق تعریف، پیدامی‌کنیم [(۳) را ببینید]. واریانت $y_n \to y_0$ هرچه باشد، می‌توان چنان شمارهٔ N را پیداکرد که، تنها به‌ازای $n>N$، داشته باشیم: $|y_n-y_0|<\delta$. ولی دراین صورت، برای همان مقدارهای n (وضمناً، برای همهٔ xها) بنابر (۳)، نابرابری زیر برقرار خواهد بود:

$$|f(x, y_n)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

و به‌این‌ترتیب، تقارب یکنواخت دنبالهٔ $\{f(x, y_n)\}$ ثابت می‌شود.

شرط کافی است. اکنون فرض‌می‌کنیم که هردنباله‌ای ازاین‌گونه، به‌طور یکنواخت به‌سمت $\varphi(x)$ میل کند.

برای اثبات این‌که، تابع $f(x, y)$ به‌طور یکنواخت به سمت $\varphi(x)$ میل می‌کند، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، برای یك $\varepsilon > 0$، $\delta = \delta' > 0$ هرچه‌ور انتخاب شود، چنان مقدار $y = y'$ از $\mathcal{Y}$ پیدا شود که با وجود $|y' - y| < \delta'$، دست‌کم برای یك مقدار $x = x'$ از $\mathcal{X}$، نابرابری $|f(x', y') - \varphi(x')| \geqslant \varepsilon$ برقرار باشد.

اکنون، دنبالهٔ عددهای مثبت $\{\delta_n\}$ را، که به‌سمت صفر متقارب است، انتخاب می‌کنیم. بنابر آن‌چه گفته شد، هر δ_n می‌تواند با دو مقدار y_n و x_n مقایسه شود، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$|y_n - y_0| < \delta, \text{ ولی } |f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geqslant \varepsilon \qquad (۶)$$

روشن است که $y_n \to y_0$ (زیرا $\delta_n \to 0$)، ولی تقارب یکنواخت دنبالهٔ $\{f(x, y_n)\}$ به‌سمت $\varphi(x)$، با توجه به (۶)، ممکن نیست. به‌این ترتیب، به‌نتیجه‌ای رسیدیم که با فرض متناقض است.

اکنون؛ مجموعهٔ $\mathcal{X}$ را، بازهٔ متناهی $[a, b]$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم [۴۳۶]، اگر رشتهٔ $\{f_n(x)\}$ از تابع‌های پیوسته (یا انتگرال‌پذیر به‌معنای ویژه)، به طور یکنواخت، به‌سمت یك تابع‌حدی متقارب باشد، آن‌وقت، تابع اخیر هم الزاماً پیوسته (یا انتگرال‌پذیر) خواهد بود. و با توجه به ۲°، واضح است که همهٔ این‌ها، درمورد حالت کلی هم درست است.

۳°. اگر تابع $f(x, y)$، به‌ازای y دلخواه از $\mathcal{Y}$، نسبت به x در بازهٔ $\mathcal{X} = [a, b]$؛ پیوسته (انتگرال‌پذیر) باشد، و به‌ازای $y \to y_0$ به طور یکنواخت به‌سمت تابع حدی $\varphi(x)$ میل کند، آن‌وقت- تابع اخیر هم پیوسته (انتگرال‌پذیر) خواهد بود.

با توجه به‌نیازی که بعداً خواهیم داشت، گزارهٔ زیر را هم، که تعمیم قضیهٔ دینی شمارهٔ ۴۳۱ است؛ ثابت می‌کنیم. ضمناً، همه‌جا $y < y_0$ به‌حساب خواهیم آورد.

۴°. فرض کنیم تابع $f(x, y)$، به ازای y دلخواه از $\mathcal{Y}$، و نسبت به x از بازهٔ $\mathcal{X} = [a, b]$ پیوسته باشد و وقتی y ترقی کند، به‌طور صعودی یکنوا، به‌سمت تابع‌حدی پیوستهٔ $\varphi(x)$ میل کند، آن‌وقت، این میل، نسبت به x در بازهٔ $\mathcal{X}$، الزاماً یکنواخت خواهد بود.

از $\mathcal{Y}$، دنبالهٔ صعودی و یکنوای $\{y_n\}$ از مقدارهای y را، که به سمت y_0 میل می‌کند، جدا می‌کنیم و دنبالهٔ نظیر تابع‌های $\{f(x, y_n)\}$ را، که به‌روشنی وهمراه با n، صعودی یکنواست، در نظر می‌گیریم، چون رشتهٔ

$$f(x, y_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})] = \varphi(x)$$

ازجمله‌های مثبت تشکیل شده است، (احتمالاً، به‌استثنای جملهٔ اول)، در آن صورت، با توجه به‌قضیهٔ دینی، می‌توان گفت که، این رشته، نسبت به x در بازهٔ $\mathscr{D}$، به‌طور یکنواخت متقارب است. درنتیجه، ازروی $\varepsilon>0$ مفروض، چنان شمارهٔ n_0 پیدا می‌شود که نابرابری

$$|\varphi(x)-f(x, y_n)|<\varepsilon$$

برای همهٔ xها از $\mathscr{D}$ برقرار باشد. با توجه به‌این‌که تابع f، همراه با y، صعودی یکنواست، آن‌وقت، مسلماً نابرابری

$$|\varphi(x)-f(x, y)|<\varepsilon$$

تنها به‌شرط $y>y_0$ برقرار می‌شود. و با این شرط، حکم ما ثابت می‌شود.

اگرچه این معیار درمورد میل یکنواخت، به‌نظر خیلی محدود می‌آید، ولی اغلب سودمند است وما را ازضرورت توسل به‌روش‌های دیگرمیل یکنواخت، آزاد می‌کند.

۵۰۵. جابه‌جائی دو عبورحدی. در این فصل، هرجا با مسألهٔ جابه‌جایی دو روند حدی روبه‌رو می‌شدیم، احتیاط لازم را رعایت می‌کردیم. ابتدا، درشمارهٔ **۱۶۸**، باشکل ساده‌ای ازاین‌مسأله برخورد داشتیم، درآن‌جاصحبت برسروجود و برابری حدهای‌مضاعف

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to 0} f(x, y) \qquad (۷)$$

به‌شرط وجود حد دوگانهٔ زیربود:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$$

سپس، درشمارهٔ **۴۳۶** دیدیم که قضیهٔ مربوط به‌عبورحدی جمله به‌جمله، دررشته‌های تابعی متقارب یکنواخت هم، می‌تواند به‌صورت مشابهی بیان شود:

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

که با شرط تقارب یکنواخت تابع $f_n(x)$ به‌سمت تابع حدی خودش به‌ازای $n\to\infty$، اعتبار داشت.

اکنون، با استفاده ازمفهومی که درشمارهٔ پیش آوردیم، قضیه‌ای‌کلی ازاین‌گونه‌را می‌آوریم. فرض می‌کنیم، تابع $f(x, y)$، در بازهٔ دوبعدی $\mathscr{M}=\mathscr{D}\times\mathscr{Y}$ پیوسته باشد و، ضمناً، مجموعه‌های $\mathscr{D}=\{x\}$ و $\mathscr{Y}=\{y\}$، به‌طور جداگانه، دارای نقطه‌های تجمع x_0 و y_0 (متناهی یا نامتناهی) باشند.

فرض‌کنیم، به‌ازای هر x از $\mathscr{D}$، حد سادهٔ

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$$

و به‌ازای هر y از $\mathcal{Y}$ حد ساده

$$\lim_{x\to x} f(x,y)=\psi(y)$$

وجود داشته باشد.

اگر به‌ازای $y=y_0$، تابع $f(x,y)$ به‌طور یکنواخت نسبت به x در حوزهٔ $\mathcal{X}$، به‌سمت تابع حدی $\varphi(x)$ میل کند، در آن صورت، هردو حد مضاعف (۷) وجود دارد و با هم برابرند.

این قضیه را می‌توان به‌سادگی و با منجر کردن آن به‌حالت خاص بالا، ثابت کرد، ولی، برای روشنی بیشتر، ترجیح می‌دهیم، اثبات مستقلی برای آن بیاوریم (و برای مشخص‌بودن وضع، هردو عدد x_0 و y_0 را متناهی فرض می‌کنیم).

با درنظر گرفتن عدد دلخواه $\varepsilon>0$، طبق قضیهٔ ۱° از ۵۰۴، عدد متناظر آن $\delta>0$ را چنان پیدا می‌کنیم که نابرابری‌های (۵)، برای هر x از $\mathcal{X}$، منجر به‌نابرابری (۴) شود. با تثبیت مقدارهای y و y' صادق در (۵) و با فرض این‌که x به‌سمت x_0 میل کند، ضمن عبور به‌حد در (۴)، به‌دست می‌آید:

$$|\psi(y')-\psi(y)|\leqslant\varepsilon \qquad (۸)$$

به‌این ترتیب، برای تابع $\psi(y)$، با عبور حدی $y\to y_0$، شرط بولزانو-کوشی [۵۸] برقرار است و از آن‌جا، وجود حد متناهی زیر ثابت می‌شود:

$$\lim_{y\to y_0}\psi(y)=A$$

اکنون روشن است که تنها وقتی $|y-y_0|<\delta$ باشد، خواهیم داشت (برای هر x از $\mathcal{X}$):

$$|\varphi(x)-f(x,y)|\leqslant\varepsilon,\ |\psi(x)-A|\leqslant\varepsilon$$

اگر در نابرابری‌های (۴) و (۸)، به‌ازای $y\to y'$ و x و y تثبیت شده، به سمت حد برویم، این مطلب روشن می‌شود. باحفظ مقداری که برای y انتخاب کرده‌ایم، $\delta'>0$ را طوری پیدا می‌کنیم که، به‌ازای $|x-x_0|<\delta'$، داشته باشیم:

$$|f(x,y)-\psi(y)|<\varepsilon$$

آن‌وقت، ازهمهٔ این نابرابری‌ها، نتیجه می‌شود که، برای این مقدارهای x، نابرابری

$$|\varphi(x)-A|<\varepsilon$$

یعنی

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A$$

برقرار است. قضیه ثابت شد.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد که عدد A ـ که در این‌جا دربارهٔ آن صحبت می‌کردیم ـ درعین‌حال عبارت است ازحد مضاعف تابع $f(x, y)$، وقتی که $x\to x_0$ و $y\to y_0$. این کیفیت، قضیه‌ای را که ثابت کردیم، به‌قضیهٔ شمارهٔ **۱۶۸** نزدیك می‌کند.

۵۰۶. عبور حدی زیرعلامت انتگرال. اکنون، به‌بررسی انتگرال (۱)، که به‌پارامتر y بستگی دارد، می‌پردازیم و، درابتدا، به‌حالتی که بازهٔ $[a, b]$ متناهی وتابع، به‌معنای ویژه، انتگرال‌پذیر باشد، اکتفا می‌کنیم.

بااین فرض که حوزهٔ $\mathcal{Y}$ تغییر پارامتر، دارای نقطهٔ تجمع y_0 باشد، مسالهٔ مربوط به‌حد تابع (۱) را، به‌ازای $y\to y_0$، مطرح می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. اگر تابع $f(x, y)$، به‌ازای y ثابت، نسبت به x در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر باشد، و به‌ازای $y\to y_0$، نسبت به x، به‌طور یکنواخت به سمت تابع حدی (۲) میل کند، در آن صورت داریم:

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b \varphi(x)dx \qquad (۹)$$

اثبات.* انتگرال‌پذیری تابع حدی $\varphi(x)$، از پیش، معلوم است [۵۰۴، ۳°]. با اختیارعدد دلخواه $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ را چنان پیدامی کنیم که (۳) برقرار باشد. آن‌وقت، برای $|y-y_0|<\delta$، خواهیم داشت:

$$\left|\int_a^b f(x, y)dx-\int_a^b \varphi(x)dx\right|=\left|\int_a^b [f(x, y)-\varphi(x)]dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x, y)-\varphi(x)|dx<\varepsilon(b-a)$$

که رابطهٔ (۹) را هم ثابت می‌کند.

رابطهٔ (۹) را می‌توان این‌طور نوشت:

---

*) برای مشخص‌بودن وضع، y_0 را متناهی می‌گیریم.

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx$$

گویند: عبور حدی نسبت به‌پارامتر، در زیر علامت انتگرال مجاز است.

با فرض $y<y_0$ داریم:

نتیجه. اگر تابع $f(x,y)$، به‌ازای y ثابت، در بازهٔ $[a,b]$ نسبت به x پیوسته باشد و با ترقی y به‌صورتی یکنوا و صعودی، به‌سمت تابع حدی پیوسته میل کند، درآن صورت، دستور (۹) درست است.

به‌قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ دینی [۵۰۴، ۴°] استناد کنید.

درخاتمه، با این فرض‌که حوزهٔ $\mathcal{Y}$ عبارت ازبازهٔ متناهی $[c,d]$ باشد، مسألهٔ مربوط به‌پیوستگی تابع (۱) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیهٔ ۲. اگر تابع $f(x,y)$، در مستطیل $[a,b;\ c,d]$، تابعی معین و پیوسته از دو متغیر باشد، آن‌وقت، انتگرال (۱)، در بازهٔ $[c,d]$، نسبت به‌پارامتر y تابعی پیوسته خواهد بود.

اثبات. با توجه به‌پیوستگی یکنواخت تابع $f(x,y)$ [۱۷۴]، اررروی $\varepsilon>0$ دلخواه، می‌توان $\delta>0$ راچنان پیداکردکه ازنابرابری‌های

$$|x''-x'|<\delta \quad و \quad |y''-y'|<\delta$$

نابرابری زیررا نتیجه گرفت:

$$|f(x'',y'')-f(x',y')|<\varepsilon$$

اگر در حالت خاص فرض کنیم: $x''=x$، $x'=y$، $y''=y$، $y'=y_0$، آن‌وقت به‌ازای $|y-y_0|<\delta$، برای هرمقدار دلخواه x، خواهیم داشت:

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$$

به‌این ترتیب، تابع $f(x,y)$، وقتی y به‌سمت مقدار خاص دلخواه y_0 میل کند، به‌طور یکنواخت‌نسبت به x، به‌سمت $f(x,y_0)$ میل می‌کند. در این حالت، با توجه به‌قضیهٔ ۱:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b f(x,y_0)dx$$

یا

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=I(y_0)$$

که حکم ما را ثابت می‌کند.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx \quad \text{و} \quad \int_0^1 \ln(x^2+y^2)dx$$

بلافاصله می‌بینیم که آن‌ها، تابع‌های پیوسته‌ای از پارامتر y، برای مقدارهای مثبت دلخواه آن، هستند.

۵۰۷. مشتق‌گیری زیرعلامت انتگرال. ضمن مطالعهٔ ویژگی‌های تابع (۱)، که به‌وسیلهٔ انتگرالی شامل پارامتر y داده شده است، مسألهٔ مربوط به‌محاسبهٔ مشتق آن نسبت به‌پارامتر، اهمیت زیادی دارد.

به فرض وجود مشتق جزئی $f'_y(x, y)$، لایب‌نیتس برای محاسبهٔ مشتق $I'(y)$، قاعده‌ای داده است که، با علامت‌های لاگرانژ، این‌طور نوشته می‌شود:

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x, y)dx \qquad (10)$$

ویا، اگر از علامت‌های روشن‌تر کوشی استفاده کنیم:

$$D_y\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b D_y f(x, y)dx$$

اگرچنین جابه‌جائی علامت‌های مشتق (نسبت به y) و انتگرال (نسبت به x) مجاز باشد، درآن صورت گویند: از تابع (۱) می‌توان در زیرعلامت انتگرال، نسبت به‌پارامتر، مشتق گرفت.

خود محاسبهٔ مشتق، ازروی دستوری که آوردیم، نام «قاعدهٔ لایب‌نیتس» را به‌خود گرفته است.

قضیهٔ زیر، شرط‌های کافی وساده‌ای را، برای امکان به‌کاربردن این قضیه، دراختیار ما می‌گذارد.

قضیهٔ ۳. $f(x, y)$ را در مستطیل $[a, b; c, d]$ معین و نسبت به x در بازهٔ $[a, b]$ ــ به ازای مقدار ثابت دلخواه y از $[c, d]$ ــ پیوسته می‌گیریم. علاوه برآن، فرض می‌کنیم که در تمامی حوزه، مشتق جزئی $f'_y(x, y)$ پیوسته و به‌عنوان تابعی از دو متغیروجود داشته باشد*. دراین‌صورت، برای yدلخواه از $[c, d]$، دستور (۱۰) برقراراست.

---

*) ازاین شرط‌ها، به‌خصوص، پیوستگی تابع $f(x, y)$، نسبت به‌هردو آوند (آرگومان) نتیجه می‌شود، ولی ما، ازاین‌جا، از آن استفاده نخواهیم کرد.

پیوستگی تابع $f(x, y)$ نسبت به x، وجود انتگرال (۱) را ثابت می‌کند. با تثبیت مقدار $y=y_0$ دلخواه، نمو $\Delta y=k$ را به آن می‌دهیم. آن‌وقت

$$I(y_0)=\int_a^b f(x, y_0)dx, I(y_0+k)=\int_a^b f(x, y_0+k)dx$$

به‌نحوی که

$$\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}=\int_a^b \frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}dx \qquad (11)$$

انتگرال سمت راست، به‌پارامتر k بستگی دارد. باید ثابت کنیم که، به‌ازای $k \to 0$؛ عبورحدی زیرعلامت انتگرال مجاز است. با این اثبات، هم وجود مشتق

$$I'(y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}$$

وهم برابری موردنظر

$$I'(y_0)=\lim_{k\to 0}\int_a^b \frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}dx=$$

$$=\int_a^b \lim_{k\to 0}\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}=\int_a^b f'_y(x, y_0)dx$$

ثابت خواهد شد. برای این منظور، ابتدا وبا توجه به‌دستور لاگرانژ، می‌نویسیم:

$$\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}=f'_y(x, y_0+\theta k) \quad (0<\theta<1) \qquad (12)$$

با توجه به‌تقارب یکنواخت تابع $f'_y(x, y)$، از روی $\varepsilon>0$ دلخواه، $\delta>0$ را چنان پیدا می‌کنیم که به‌ازای

$$|x''-x'|<\delta \text{ و } |y''-y'|<\delta$$

داشته باشیم:

$$|f'_y(x'', y'')-f'_y(x', y')|<\varepsilon$$

دراین‌جا: بافرض $x=x''=x'$، $y'=y_0$، $y''=y_0+\theta k$ وبادرنظرگرفتن $|k|<\delta$ و (۱۲)، برای همهٔ xها به‌دست می‌آید:

$$\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}-f'_y(x, y_0)<\varepsilon$$

ازاین‌جا روشن می‌شود که تابع زیر انتگرال (۱۲)، به‌ازای $k \to 0$، به‌طور یکنواخت (نسبت به x)، به‌سمت تابع حدی $f_y(x, y)$ میل می‌کند. و ازهمین‌جا، واز روی قضیهٔ ۱، عبور حدی زیرعلامت انتگرال هم، تأیید می‌شود.

به‌عنوان مثال، دوباره انتگرال‌هایی را درنظرمی‌گیریم که، دربارهٔ آن‌ها، درشمارهٔ پیش صحبت کرده بودیم. روشن‌است برای $y>0$:

$$D_y\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx=\int_0^1 D_y\operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx=-\int_0^1\frac{xdx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2},$$

$$D_y\int_0^1\ln(x^2+y^2)dx=\int_0^1 D_y\ln(x^2+y^2)dx=$$

$$=\int_0^1\frac{2y}{x^2+y^2}dx=2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$$

درستی این نتیجه‌ها را، با محاسبهٔ مستقیم این انتگرال‌ها به‌صورت متناهی

$$I_1(y)=\int_0^1\operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx=\operatorname{arctg}\frac{1}{y}+\frac{1}{2}y\ln\frac{y^2}{1+y^2},$$

$$I_2(y)=\int_0^1\ln(x^2+y^2)dx=\ln(1+y^2)-2+2y\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$$

وسپس، مشتق‌گیری نسبت به y، می‌توان تحقیق کرد.

برای $y=0$، شرط‌های قضیهٔ (۴) ازبین‌می‌روند؛ ببینیم، درمورد تابع‌های‌دلخواه $I_1(y)$ و $I_2(y)$، به‌ازای $y=0$، وضع ازچه‌قرار است. اگردر انتگرال اول، عبارت زیرانتگرال را، به‌ازای $y=0$ و $x>0$، به‌خاطرحفظ پیوستگی آن، برابر $\frac{\pi}{2}$ بگیریم، آن وقت $I_1(0)=\frac{\pi}{2}$، به‌نحوی که تابع $I_1(y)$، به‌ازای $y=0$ هم، نسبت به y پیوسته می‌شود. ولی، وقتی $y \to 0$:

$$\frac{I_1(y)-I_1(0)}{y}=\frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}-\frac{\operatorname{arctg} y}{y}\to-\infty$$

به‌طوری‌که، به‌ازای $y=0$، مشتق متناهی وجود ندارد. برای تابع $I_2(y)$، به‌ازای $y=0$، داریم:

$$I_2(0)=-2,\quad \frac{I_2(y)-I_2(0)}{y}=\frac{\ln(1+y^2)}{y}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\to\pi$$

دراین‌جا $I_2'(0)=\pi$. ضمناً، چون مشتق تابع زیر انتگرال نسبت به y، به‌ازای $y=0$، برابر صفر است، به‌نحوی که انتگرال آن‌هم برابر صفر می‌شود، قاعدهٔ لایب‌نیتس قابل‌کاربرد نیست.

۵۰۸. انتگرال‌گیری زیر علامت انتگرال. بالاخره، مسألهٔ مربوط به انتگرال تابع (۱) را، نسبت به y، مثلا در بازهٔ $[c, d]$ مطرح می‌کنیم.

ما به‌خصوص، به‌حالتی علاقه‌مندیم که این انتگرال به‌صورت

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x, y)dx\right\}dy=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x, y)dy\right\}dx$$

نوشته می‌شود ویا: آن‌طورکه معمول است، بدون آکولاد و به‌صورت

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)dy \qquad (۱۳)$$

اگراین رابطه وجود داشته باشد، می‌گویند: ازتابع (۱) می‌توان نسبت به‌پارامتر y در زیر علامت انتگرال (که نسبت به‌متغیر x انتخاب شده است)، انتگرال گرفت.

ساده‌ترین شرطهایی که، برای برابری انتگرال‌های دوگانهٔ (۱۳) کافی است، چنین‌اند:

قضیهٔ ۴. اگر تابع $f(x, y)$ درمستطیل $[a, b; c, d]$، نسبت به‌هردومتغیر پیوسته باشد، درآن صورت، دستور (۱۳) برقرار خواهد بود.

برابری کلی‌تر زیررا ــ که در آن $c\leqslant\eta\leqslant d$ ــ ثابت می‌کنیم:

$$\int_c^\eta dy\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^\eta f(x, y)dy \qquad (۱۳^*)$$

در دوطرف برابری، دوتابع از پارامتر η وجود دارد، مشتق آن‌ها را نسبت به η محاسبه می‌کنیم.

درسمت چپ، انتگرال بیرونی، دارای تابع زیر انتگرال (۱) می‌باشد، که بنابه‌

قضیهٔ ۲، نسبت به y پیوسته است. بنابراین، مشتق آن، نسبت به‌مرز بالایی، برابراست با تابع زیرانتگرال که به‌ازای $y=\eta$ محاسبه شده باشد، یعنی انتگرال

$$I(\eta)=\int_a^b f(x,\eta)dx$$

و درسمت راست (*۱۳)، انتگرال

$$\int_a^b \varphi(x,\eta)dx \qquad \left[\varphi(x,\eta)=\int_c^{\eta} f(x,y)\,dy\right]$$

تابع $\varphi(x,\eta)$ با شرطهای قضیهٔ ۳ سازگار است. درواقع، $\varphi(x,\eta)$، بنابر قضیهٔ ۲: نسبت به x* پیوسته است. ضمناً، مشتق

$$\varphi'_\eta(x,\eta)=f(x,\eta)$$

به‌عنوان یك تابع با دو متغیر، پیوسته است. بنابراین، می‌توان از قاعدهٔ لایب‌نیتس، برای انتگرال مزبور، استفاده کرد:

$$D_\eta\int_a^b \varphi(x,\eta)\,dx=\int_a^b \varphi'_\eta(x,\eta)dx=\int_a^b f(x,\eta)dx=I(\eta)$$

به‌این‌ترتیب، دوطرف راست وچپ برابری (*۱۳)، به‌عنوان تابعی از η، مشتق‌هایی برابردارند. در نتیجه، می‌توانند تنها درمقدار ثابتی با هم فرق داشته باشند. ولی هردو عبارت حاصل، به‌ازای $\eta=c$، به‌روشنی برابرصفر می‌شوند، یعنی به‌ازای همهٔ مقدارهای η متحدند و، درنتیجه، برابری (*۱۳) ثابت می‌شود.

اگر در برابری (*۱۳) قراردهیم $\eta=d$، درستی برابری (۱۳)، به‌عنوان حالت خاصی ازآن، به‌دست می‌آید.

به‌چند مثال می‌پردازیم. ۱) $f(x,y)=x^y$ را درمستطیل $[0,1;a,b]$ درنظر می‌گیریم، که در آن، $0<a<b$. شرطهای قضیه‌ها رعایت شده است. داریم:

$$\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy$$

ازسمت چپ، به‌سادگی، نتیجه نهائی به‌دست می‌آید:

---

*) که دراین‌جا، نقش پارامتر را بازی می‌کند.

$$\int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln\frac{1+b}{1+a}$$

در سمت راست هم، به‌انتگرال $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ می‌رسیم. به‌این ترتیب، به برکت جابه‌جائی انتگرال‌گیری، می‌توانیم مقدار انتگرال اخیر را پیدا کنیم [با ۴۹۷، ۱۶ (c) مقایسه کنید].

۲) در حالت تابع $f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$، درمستطیل $[0, 1; 0, 1]$، شرط‌های قضیه‌ها برقرار نیستند، درنقطهٔ $(0, 0)$ ناپیوستگی وجود دارد. داریم:

$$\int_0^1 f\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2} \quad (y>0);$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f\,dx = \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

ودرعین‌حال

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f\,dy = -\frac{\pi}{4}$$

۵۰۹. حالتی‌که مرزهای انتگرال، وابسته به‌پارامتر هستند. به‌حالتی بغرنج‌تر می‌پردازیم، وقتی‌که نه‌تنها عبارت زیر انتگرال، بلکه مرزهای انتگرال هم، شامل پارامتر باشند.

دراین حالت، انتگرال به‌این صورت است:

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx \qquad (14)$$

به‌بررسی مربوط به‌پیوستگی و مشتق‌پذیری این‌گونه انتگرال‌ها، نسبت به‌پارامتر، اکتفا می‌کنیم.

قضیهٔ ۵. فرض می‌کنیم، تابع $f(x, y)$، درمستطیل $[a, b; c, d]$، معین وپیوسته و، ضمناً منحنی‌های

$$x = \alpha(y),\ x = \beta(y) \quad [c \leqslant y \leqslant d]$$

پیوسته باشند و از حدود آن تجاوز نکنند. آن‌وقت، انتگرال (۱۴)، تابعی پیوسته از y در $[c, d]$ خواهد بود.

اگر y_0، مقدار خاص دلخواهی از y باشد، درآن صورت، انتگرال (۱۴) را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$I(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)dx-\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)dx \quad (۱۵)$$

انگرال اول، که مرزهای آن مقدارهایی ثابت هستند، به‌ازای $y \to y_0$، ازروی قضیهٔ ۲، به‌سمت انتگرال زیرمیل می‌کند:

$$I(y_0)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)dx$$

دو انتگرال بقیه را هم، می‌توان به‌ترتیب زیر، برآورد کرد:

$$\left|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)dx\right| \leqslant M\cdot|\beta(y)-\beta(y_0)|,$$

$$\left|\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)dx\right| \leqslant M\cdot|\alpha(y)-\alpha(y_0)|$$

که در آن‌ها، $M=\max|f(x, y)|$ و، بنابر پیوستگی، تابع‌های $\alpha(y)$ و $\beta(y)$، به‌ازای $y \to y_0$، به‌سمت صفرمیل می‌کنند.

به‌این‌ترتیب، سرانجام، داریم:

$$\lim_{y \to y_0} I(y)=I(y_0)$$

که قضیه را ثابت می‌کند.

قضیهٔ ۶. اگر تابع $f(x, y)$ مذکور در فوق، در مستطیل $[a, b; c, d]$، دارای مشتق پیوستهٔ $f'_y(x, y)$ باشد و، همچنین، مشتق‌های $\alpha'(y)$ و $\beta'(y)$ وجود داشته‌باشند، درآن صورت، انتگرال (۱۴)، نسبت به‌پارامتر، دارای مشتق است و، این مشتق، بادستور زیر بیان می‌شود:

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)dx+\beta'(y)\cdot f(\beta(y), y)-\alpha'(y)\cdot f(\alpha(y), y) \quad (۱۶)$$

دراین‌جا هم، از برابری (۱۵) آغاز می‌کنیم. انتگرال اول، به‌ازای $y=y_0$، بنا برقضیهٔ ۳، مشتقی دارد که به‌وسیلهٔ انتگرال ازمشتق نشان داده می‌شود:

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0)dx$$

برای انتگرال‌دوم (که‌مقدار آن، برای $y=y_0$، صفراست)، بنا برقضیهٔ مربوط به‌میانگین‌ها، داریم:

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx = \frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0}\cdot f(\bar{x}, y)$$

که در آن، $\bar{x}$ بین $\beta(y_0)$ و $\beta(y)$ واقع است. از این‌جا، مشتق انتگرال دوم، به‌ازای $y=y_0$، که برحد عبارت قبلی به‌ازای $y\to y_0$ منطبق می‌شود، خواهد بود:

$$\beta'(y_0)\cdot f(\beta(y_0), y_0)$$

به‌همین‌ترتیب، برای مشتق انتگرال سوم، به‌ازای $y=y_0$، به‌دست می‌آید:

$$-\alpha'(y_0)\cdot f(\alpha(y_0), y_0)$$

اگرهمهٔ این نتیجه‌ها را به‌هم پیوند دهیم، اطمینان حاصل می‌کنیم که مشتق $I'(y_0)$ وجود دارد و با دستور فوق به‌دست می‌آید.

یادداشت. نتیجهٔ هردو قضیه، با این فرض‌که تابع $f(x, y)$ تنها درحوزهٔ بین منحنی‌های

$$x=\alpha(y),\ x=\beta(y)$$

مفروض باشد (ویژگی‌های نامبرده راهم داشته باشد)، به‌قوت خود باقی خواهند ماند. امکان بررسی تابع در بیرون حوزه، برای ساده‌کردن بحث مورد استفاده قرار گرفته‌است.

نگاه‌کردن به‌این نتیجه‌ها، ازچنین دیدگاهی هم آموزنده است. انتگرال $I(y)$ از انتگرال

$$I(y, u, v)=\int_u^v f(x, y)dx$$

وابسته به سه پارامتر y، u و v، با جایگزین $u=\alpha(y)$ و $v=\beta(y)$ به‌دست می‌آید. مسأله، با استفاده ازقضیهٔ کلی مربوط به‌پیوستگی ومربوط به‌مشتق‌پذیری تابع مرکب، پایان می‌پذیرد. درحالت خاص، دستور (۱۶)، ازروی طرح کلاسیك، نوشته می‌شود:

$$\frac{dI}{dy}=\frac{\partial I}{\partial y}+\frac{\partial I}{\partial u}\cdot\alpha'(y)+\frac{\partial I}{\partial v}\cdot\beta'(y)$$

۵۱۰. ورود ضریبی که تنها به x بستگی دارد. از نتیجه‌هایی که به‌دست آوردیم، می‌توان به‌سادگی و، ضمناً، بدون استفاده از اندیشه‌های تازه، به‌نوعی تعمیم رسید. مثلاً، اگر به‌جای (۱)، انتگرال

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\cdot g(x)dx \qquad (1)$$

درنظر بگیریم، که در آن، $g(x)$ تابعی است از x که در بازهٔ $[a, b]$ به‌طور مطلق (و یا احتمالاً به‌مفهوم ناویژه) انتگرال‌پذیر است. از این راه می‌توان، در بعضی موردها، نظریهٔ مقدماتی نامبرده را، برای انتگرال‌های ناویژه هم گسترش داد. گزاره‌های شبیه قضیه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را می‌آوریم.

قضیهٔ ۱*. با همان فرض‌های قضیهٔ ۱، دستور زیر برقرار است:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\cdot g(x)\,dx=\int_a^b \varphi(x)g(x)dx$$

قبل از هر چیز توجه کنیم که همهٔ انتگرال‌های موجود در این دستورها، وجود دارند. انتگرال‌پذیری تابع حدی $\varphi(x)$ قبلاً ثابت شده است؛ و وجود انتگرال‌های $f\cdot g$ و $\varphi\cdot g$ (در حالت کلی، ناویژه)، از شمارهٔ ۴۸۲ نتیجه می‌شود.

اکنون، با اختیار عدد $\varepsilon>0$، و با توجه به‌میل یکنواخت $f(x, y)$ به $\varphi(x)$، عدد $\delta>0$ را طوری پیدا می‌کنیم که (۳) برقرار باشد*. آن‌وقت، به‌ازای $|y-y_0|<\delta$ خواهیم داشت:

$$\left|\int_a^b f(x, y)\cdot g(x)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\cdot g(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x, y)-\varphi(x)|\cdot g(x)\,dx<\varepsilon\cdot\int_a^b |g(x)|dx$$

که دستور موردنظرما را هم ثابت می‌کند، زیرا درسمت راست، حاصل‌ضرب عدد به‌قدر

---

*) دراین‌جا هم، مثل همیشه، حالت y_0 متناهی را درنظر می‌گیریم؛ بررسی حالت $y_0=+\infty$ به‌اشکالی برخورد نمی‌کند.

دلخواه کوچك ε، درعدد متناهی و ثابت $\int_{\varepsilon}^{b}|g(x)|dx$ قرار دارد.

قضیه‌ای شبیهٔ این قضیه را، بـرای دنبالهٔ تابعی $\{f_n(x)\}$، کـه در آن n در نقش پارامتر است، می‌توان ثابت کرد. ما این نتیجه را «به‌زبان رشته‌های نامتناهی» بیان‌می‌کنیم، چراکه مورد استفادهٔ آن، اغلب، به‌این صورت است.

نتیجه. اگر ۱) جمله‌های رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

درباز‌هٔ $[a, b]$، تابع‌هایی انتگرال‌پذیر (به‌معنای ویژه) وخود رشته به‌طوریکنواخت‌متقارب باشد، ۲) $g(x)$، تابعی مطلقاً انتگرال‌پذیر در بازهٔ $[a, b]$ باشد (ولـو به‌معنای ناویژه)، درآن صورت از رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\cdot g(x)$$

می‌توان جمله به‌جمله انتگرال گرفت.

قضیه‌های ۲ و ۳ هم، به‌همین‌ترتیب (تنها بااین اختلاف‌که به‌جای قضیهٔ ۱، بایداز قضیهٔ *۱ استفاده‌کرد) ثابت می‌شوند:

قضیهٔ *۲. با همان فرض‌های قضیهٔ ۲، انتگرال (*۱)، تابـع پیوسته‌ای از y، در بازهٔ $[c, d]$ می‌شود.

قضیهٔ *۳. بـا همان فرض‌های قضیهٔ ۳، تابـع (*۱)، نسبت به‌پارامتـر، مشتق‌پذیر می‌شود و دستور زیر برقرار است:

$$I'(y)=\int_{a}^{b}f'_y(x, y)\cdot g(x)dx$$

بالاخره:

قضیهٔ *۴. با همان فرض‌های قضیه ۴، این برابری‌ها برقرار است:

$$\int_{c}^{d}f(y)dy=\int_{c}^{d}dy\int_{a}^{b}f(x, y)\cdot g(x)\,dx=\int_{a}^{b}g(x)\,dx\int_{c}^{d}f(x, y)dy$$

اثبات، کامـلاً شبیه اثبات قضیهٔ ۴ است (تنها، به‌جای قضیه‌هـای ۲ و۳، بایـد از

قضیه‌های ۲* و ۳* استفاده کرد).

مثال‌های بسیاری ازکاربرد این قضیه‌ها را (وهمچنین، قضیه‌های قبلی را)، درشمارهٔ بعد پیدا می کنید.

۵۱۱. مثال‌ها. ۱) بااستفاده از بسط تابع e^x به‌رشته، انتگرال‌های‌زیررا، به‌صورت مجموع رشته، نشان دهید:

$$\text{(a)} \int_0^1 e^x \ln x\,dx, \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{e^x-1}{\sqrt{x^3}}dx.$$

با توجه به‌نتیجهٔ قضیهٔ ۱* داریم:

$$\text{(a)} \int_0^1 e^x \ln x\,dx = \int_0^1 \ln x \cdot \left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right\}dx =$$

$$= \int_0^1 \ln x\,dx + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_0^1 x^m \ln x\,dx = -\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!\,(m+1)}\right\}$$

$$\text{(b)} \int_0^1 \frac{e^x-1}{\sqrt{x^3}}dx = \int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}x^{m-\frac{3}{2}}dx = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)\cdot m!}$$

۲) انتگرال زیررا، با بسط به‌رشته، محاسبه کنید:

$$I = \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1+x)\,dx$$

ازروی قضیهٔ شمارهٔ ۴۳۷، ۵°، رشتهٔ

$$\ln(1+x) = \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

در بازهٔ $[0\ ,1]$، متقارب یکنواخت است. ازآن‌جاکه $\ln x$، دراین‌بازهٔ، مطلقاً انتگرال‌پذیر است، پس با توجه به‌نتیجهٔ قضیهٔ ۱* داریم:

$$I = \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 x^n \ln x\,dx = \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)^2}$$

با توجه به‌اتحاد

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

وبا درنظرگرفتن بسطهای معلوم

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}=\ln 2,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

[۴۰۵، (۱۸) و ۴۴۰، ۸) را ببینید]، عبارت I را می‌توان چنین نوشت:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=2-2\ln 2-\frac{\pi^2}{12}$$

دراین‌جا، مقدار I «به‌صورت متناهی» به‌دست آمد، ولی روشن است که همیشه، نمی‌توانیم به چنین نتیجه‌ای برسیم.

۳) اگرچندجمله‌ای nام لژاندر را با $P_n(x)$ نشان دهیم، ثابت کنید:

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}$$

اگرسرچشمهٔ چندجمله‌ای‌های $P_n(x)$ لژاندر را، به‌عنوان ضریب‌های بسط عبارت $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ [۴۴۷، ۸)] برحسب توان‌های α، به‌یاد آوریم، درآن صورت، کافی است با درنظرگرفتن رشتهٔ

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi d\varphi}{\sqrt{x(\cos\varphi-\cos\theta)}} \qquad (17)$$

ثابت کنیم که، مجموع آن، برابراست با عبارت نامبرده، به‌ازای $x=\cos\theta$.

چون [با ۴۶۱، ۲) مقایسه کنید]، برای $|\alpha|<1$ داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi=(1-\alpha)\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}$$

وچون رشته، نسبت به φ، متقارب یکنواخت است (زیرا به‌وسیلهٔ تصاعد هندسی $\sum_0^{\infty}|\alpha|^n$ محدود می‌شود)، بنابراین، می‌توان رشتهٔ (۱۷) را ـ دوباره ازروی همان نتیجه ـ چنین نوشت:

$$2\frac{1-\alpha}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\cdot\frac{d\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}$$

اگر به‌همان تبدیل مسألهٔ ۹) از ۴۹۷ متوسل شویم (که در آن‌جا، به‌خصوص نتیجه‌های مربوط به $n=0,1$ ثابت شده بود)، به‌ترتیب، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1-\alpha}{\pi}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}\cdot\frac{dz}{1-2\alpha z+\alpha^2}=$$

$$=\frac{2}{\pi}(1-\alpha)\int_0^\infty \frac{dt}{(1-\alpha)^2t^2+(1-2\alpha x+\alpha^2)}=\frac{1}{\sqrt{1+2ax+x^2}}$$

که اثبات را هم به‌پایان می‌رساند.

۴) ازروشی یاد می‌کنیم که، به‌کمک آن، اولرتوانست، این نتیجه را به‌دست‌آورد:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

این انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$E=\int_0^1 \arcsin x\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1 \arcsin x\cdot d(\arcsin x)=\frac{\pi^2}{8}$$

از طرف دیگر، با استفاده ازبسط معلوم آرک‌سینوس

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

که دربازهٔ $[0,1]$ متقارب یکنواخت است، خواهیم داشت:

$$E=\int_0^1\left\{x+\sum_{n=1}^{\infty}\cdots\right\}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

چون

$$\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi\,d\varphi=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

به‌دست می‌آید:

$$E=\frac{\pi^2}{8}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

واز آن‌جا، به‌سادگی، به‌رابطهٔ ابتدای مساله می‌رسیم.

۵) روش لوباچوسکی، که به‌کمک آن در ۱۴) و ۱۵) شمارهٔ ۴۹۷ دستورهای

$$\int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx,\quad \int_0^{\infty} f(x)\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

را پیدا کردیم، برای حالتی هم که تابع $f(x)$ در بازهٔ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$، به معنای ناویژه، انتگرال‌پذیر است (و با حفظ سایر شرط‌ها) می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

به‌کمک این دستورها، مثلاً، می‌توان انتگرال‌های زیر را محاسبه کرد:

$$\text{(a)}\quad \int_0^{\infty}\ln|\sin x|\cdot\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^{\infty}\frac{\ln|\cos x|}{x^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{\ln|\cos x|}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{\pi}{2}$$

(با انتگرال گیری جزء به‌جزء).

$$\text{(c)}\quad \int_0^{\infty}\frac{\ln^2(\cos x)}{x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln^2\cos x}{\sin^2 x}dx=-\pi\ln 2$$

(بازهم با انتگرال گیری جزء به‌جزء).

۶) مستقیماً می‌توان ثابت کرد که برای انتگرال‌های

$$\text{(a)}\int_0^{1}\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}dx,\quad \text{(b)}\int_0^{1}\frac{x^3}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}}dx$$

(با شرط $y>0$)، نمی‌توان عبور حدی را، به‌ازای $y\to 0$، در زیرعلامت انتگرال انجام داد.

به‌این امر، به‌این علت، اطمینان پیدا می‌کنیم که شرط‌های قضیهٔ ۲، به‌هم‌می‌خورند.

۷) ازقاعدهٔ لایب‌نیتس، برای محاسبهٔ مشتق نسبت به‌پارامتر، ازانتگرال

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2\theta)d\theta \quad (a>1)$$

استفاده کنید. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که شرط‌های قضیهٔ ۳، در این‌جا، برقرار است. داریم:

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\,d\theta}{a^2-\sin^2\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

ازاین‌جا، با انتگرال‌گیری نسبت a، دوبار مقدار $I(a)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$I(a)=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})+C$$

برای این‌که ثابت C را به‌دست آوریم، انتگرال $I(a)$ را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$I(a)=\pi\ln a+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2\theta\right)d\theta$$

به‌طوری‌که، اگر از رابطه‌ای‌که برای $I(a)$ پیدا کردیم، استفاده کنیم:

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2\theta\right)d\theta-\pi\ln\frac{a^2+\sqrt{a^2-1}}{a}$$

حالا، به‌ازای $a\to+\infty$، به‌سمت حد می‌رویم؛ چون

$$\left|\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2\theta\right)\right|\leqslant\left|\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right|$$

پس، مقدار انتگرال به‌سمت صفر میل می‌کند و به‌دست می‌آید: $C=-\pi\ln 2$. بالاخره، برای $a>1$ [با ۴۹۷، ۷) مقایسه کنید]:

$$I(a)=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$$

جالب است که با مشتق‌گیری ازروی قاعدهٔ لایب‌نیتس، می‌توان عبارتی متناهی برای انتگرال مفروض به‌دست آورد. استفادهٔ ازاین روش، اغلب نتیجه‌بخش است.

۸) انتگرال زیر، که برای ما آشناست [۳۰۷، ۴)؛ ۳۱۴، ۱۴)؛ ۴۴۰، ۱۱)]:

$$I(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx \quad (|r|<1)$$

بازهم ساده‌تر محاسبه می‌شود.

ازروی قاعدهٔ لایب‌نیتس داریم:

$$I'(r)=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}\,dx$$

با قراردادن $t=tg\frac{x}{2}$، به‌سادگی ثابت می‌شود که این انتگرال برابر صفر است، ودر نتیجه

$$I(r)=C=\text{const.}$$

ولی $I(0)=0$، یعنی $C=0$. بنابراین، برای $|r|<2$، داریم: $I(r)=0$.

۹) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $I=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

با واردکردن پارامتر، انتگرال کلی‌تر

$$I(y)=\int_0^1\frac{\operatorname{arc}\,tgxy}{x\sqrt{1-x^2}}dx \quad (y\geqslant 0)$$

را درنظر می‌گیریم که انتگرال مفروض، ازآن و به‌ازای $y=1$، به‌دست می‌آید. اگر فرض کنیم:

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{arctg}xy}{x} \quad و \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

شرط‌های قضیهٔ *۳ برقرار می‌شوند. با مشتق‌گیری نسبت به y (زیرعلامت انتگرال) پیدا می‌کنیم:

$$I'(y)=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$$

این انتگرال به‌سادگی و، مثلاً، با فرض $x=\cos\theta$ محاسبه می‌شود:

$$I'(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+y^2\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\frac{tg\theta}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

وازاین‌جا، با انتگرال‌گیری، به‌دست می‌آید:

$$I(y)=\frac{\pi}{۲}\ln\left(y+\sqrt{۱+y^{۲}}\right)+C$$

چون $I(۰)=۰$، پس $C=۰$. اکنون، به‌ازای $y=۱$، به‌انتگرال مطلوب می‌رسیم:

$$I=I(۱)=\frac{\pi}{۲}\ln\left(۱+\sqrt{۲}\right)$$

۱۰) ثابت کنید که عبارت‌های

$$\text{(a) } u=x^{n}\cdot\int_{۰}^{\pi}\cos(x\cos\theta)\sin^{۲n}\theta\,d\theta \quad\text{و}\quad \text{(b) } u=\int_{۰}^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta$$

(برای $n\geqslant ۰$ درست)، درمعادلهٔ دیفرانسیلی موسوم به‌معادلهٔ بسل صدق می‌کنند:

$$x^{۲}u''+xu'+(x^{۲}-n^{۲})u=۰$$

دراین‌جا، نقش پارامتر به‌عهدهٔ x است. با مشتق‌گیری اززیرعلامت انتگرال (قضیهٔ ۳)، مجموع سمت‌چپ معادله را (باقراردادن عبارت‌های مفروض به‌جای u) پیدامی‌کنیم:

$$\text{(a) } x^{n+۱}\int_{۰}^{\pi}[x\cdot\cos(x\cos\theta)\sin^{۲n+۲}\theta-(۲n+۱)\sin(x\cos\theta)-$$

$$-\cos\theta\cdot\sin^{۲n}\theta]\,d\theta=-\sin^{۲n+۱}\theta\cdot\sin(x\cos\theta)\Big|_{۰}^{\pi}=۰,$$

$$\text{(b) } -\int_{۰}^{\pi}\Big[(x^{۲}\sin^{۲}\theta+n^{۲}-x^{۲})\cos(n\theta-x\sin\theta)-$$

$$-x\sin\theta\cdot\sin(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta=-(n+x\cos\theta)\cdot\sin(n\theta-x\sin\theta)\Big|_{۰}^{\pi}=۰$$

۱۱) ثابت کنید که معادلهٔ

$$\frac{d^{۲}u}{dr^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{du}{dr}-n^{۲}u=۰$$

(به‌ازای عدد درست n)، باتابع $Au_{۱}+Bu_{۲}$ (A و B، ثابت‌هایی دلخواه هستند)سازگار است، که در آن داریم:

$$u_1=\int_0^{\pi} e^{nr\cos\theta}\,d\theta,$$

$$u_2=\int_0^{\pi} e^{nr\cos\theta}\ln(r\sin^2\theta)\,d\theta$$

روشن است که، برای این منظور، کافی است تحقیق کنیم که تابع‌های u_1 و u_2، به‌طور جداگانه، درمعادله‌صدق می‌کنند؛ که، شبیه قبل و با مشتق گیری زیرعلامت انتگرال، به‌سادگی تایید می‌شود. ضمناً درمورد تابع u_1 ازقضیهٔ ۳ و درمورد تابع

$$u_2=\ln r\cdot\int_0^{\pi} e^{nr\cos\theta}\,d\theta+2\int_0^{\pi} e^{nr\cos\theta}\ln\sin\theta\,d\theta$$

از قضیهٔ *۳ استفاده می‌شود.

۱۲) مشتق انتگرال‌های بیضوی کامل

$$\mathbf{E}(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\mathbf{K}(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

را، نسبت به‌مدول $k\,(0<k<1)$ پیدا کنید.

داریم:

$$\frac{d\mathbf{E}}{dk}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\sin^2\varphi\cdot(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{k}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi\right\}=\frac{\mathbf{E}-\mathbf{K}}{k}$$

و به‌همین ترتیب

$$\frac{d\mathbf{K}}{dk}=\frac{1}{k}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}\,d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi\right\}$$

ولی

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi^*$$

به‌نحوی که

$$\frac{d\mathbf{K}}{dk}=\frac{\mathbf{E}}{k(1-k^2)}-\frac{\mathbf{K}}{k}$$

این دستورهای حاصل، کاربردهای جالبی دارند. مثلاً، اگر مدول مزدوج $k'=\sqrt{1-k^2}$ و تابع‌های

$$\mathbf{K}'(k)=\mathbf{K}(k')\ \text{و}\ \mathbf{E}'(k)=\mathbf{E}(k')$$

را واردکنیم، به‌سادگی به‌دست می‌آید: $\frac{d}{dk}(\mathbf{EK}'+\mathbf{E}'\mathbf{K}-\mathbf{KK}')=0$، که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{EK}'+\mathbf{E}'\mathbf{K}-\mathbf{KK}'=C=\text{const.}$$

برای تعیین مقدار ثابت C، حدسمت چپ را، به‌ازای $k\to 0$ $(k'\to 1)$ پیدا می‌کنیم. روشن است که همین‌حد برابر C خواهد بود. قبل از هرچیز، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\lim_{k\to 0}\mathbf{K}=\lim_{k\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{k\to 0}\mathbf{E}'=\lim_{k'\to 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=1$$

[قضیهٔ ۲، ۵۰۶]. و بعد

---

*) این نتیجه را می‌توان از اتحاد زیر، که به‌سادگی قابل تحقیق است، به‌دست آورد،

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}-\frac{k}{1-k^2}\cdot\frac{d}{d\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}]$$

$$\mathbf{K}'=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^{2}\sin^{2}\varphi}}<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-k'^{2}}}=\frac{\pi}{2k},$$

$$|\mathbf{E}-\mathbf{K}|=\mathbf{K}-\mathbf{E}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^{2}\sin^{2}\varphi}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\varphi}}d\varphi<\frac{\pi}{2}k^{2}$$

به‌نحوی که

$$|\mathbf{K}'(\mathbf{E}-\mathbf{K})|<\frac{\pi^{2}}{4}k \quad \text{و} \quad \lim_{k\to 0}\mathbf{K}'(\mathbf{E}-\mathbf{K})=0$$

حد مطلوب، برابر $\frac{\pi}{2}$ می‌شود و، سرانجام، به‌رابطهٔ معلوم لژاندرمی‌رسیم:

$$\mathbf{E}\mathbf{K}'+\mathbf{E}'\mathbf{K}-\mathbf{K}\mathbf{K}'=\frac{\pi}{2}$$

۱۳) مطلوب است اثبات اتحاد

$$\underbrace{\int_{a}^{x}dt_{n-1}\int_{a}^{t_{n-1}}dt_{n-2}\cdots\int_{a}^{t_{1}}}_{a}f(t)dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt$$

که در آن، $f(t)$، تابع دلخواه پیوسته در بازهٔ $[a, b]$، و $a\leqslant x\leqslant b$ می‌باشد.

حل. ازروش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. اتحاد، به ازای $n=1$، واضح است. فرض می‌کنیم، این‌اتحاد، برای $n\geqslant 1$ درست است و، آن‌وقت، ثابت می‌کنیم که، درستی اتحاد، با تبدیل n به $n+1$، به‌قوت خود باقی می‌ماند.

برای سهولت‌کار فرض می‌کنیم:

$$I_{n}(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt$$

با توجه به‌قضیهٔ ۶، ازعبارت

$$I_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_{a}^{x}(x-t)^{n}f(t)dt$$

نسبت به x، مشتق می‌گیریم. چون در این‌جا مرز پایین انتگرال مقدار ثابتی است و در مرز بالایی، یعنی به‌ازای $t=x$، تابع زیرانتگرال برابرصفر می‌شود، بنابراین، جمله‌های

بیرون از انتگرال در دستور (۱۶) از بین می‌روند، و به‌دست می‌آید:

$$\frac{dI_{n+1}(x)}{dx}=I_n(x)$$

و با توجه به‌این‌که $I_n(a)=0$، خواهیم داشت:

$$I_{n+1}(x)=\int_a^x I_n(t_n)dt_n$$

که اگر به‌جای I_n، مقدار آن را به‌صورت انتگرال مضاعف قرار دهیم، به‌عبارتی شبیه‌آن، برای I_{n+1} می‌رسیم.

به‌همین ترتیب، می‌توان نتیجهٔ کلی‌تر زیررا هم به‌دست آورد:

$$\int_a^x \varphi'(t_{n-1})dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}}\varphi'(t_{n-2})dt_{n-2}\cdots\int_a^{t_1}f(t)dt=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x[\varphi(x)-\varphi(t)]^{n-1}f(t)dt$$

که در آن، f و φ تابع‌هایی پیوسته در بازهٔ $[a, b]$ و، ضمناً، φ دارای مشتق پیوسته‌است.

۱۴) مشتق انتگرال زیررا، نسبت به‌پارامتر α، پیدا کنید:

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}$$

که در آن، $\varphi(x)$ ومشتق‌جزئی آن $\varphi'(\alpha)$، در بازهٔ $[a\ ,0]$ پیوسته‌اند وداریم: $0<\alpha\leqslant a$.

ازدستور (۱۶) نمی‌توان‌مستقیماً استفاده کرد، زیرا درحالت کلی، مقدارزیرانتگرال، به‌ازای $x=\alpha$، برابر بی‌نهایت می‌شود. راه غیرمستقیمی انتخاب می‌کنیم و، با گذاشتن $x=\alpha t$، انتگرال را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$I(\alpha)=\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt$$

دراین‌جا، می‌توان ازقضیهٔ ۳° استفاده کرد. اگرازانتگرال، با توجه به‌قاعدهٔ لایب‌نیتس، مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1\frac{\varphi(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt+\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{t\varphi'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt$$

ویا اگر به‌متغیر سابق برگردیم:

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx$$

اگرانتگرال اول را، از راه انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، تبدیل کنیم، می‌توان دستور را به‌صورت ساده‌تری درآورد:

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}dx$$

۱۵) فرض کنیم

$$\begin{cases} f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (0<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)\\ f(0,y)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

مستقیماً ثابت کنید که می‌توان ازقاعدهٔ لایب‌نیتس درمورد انتگرال $\int_0^1 f(x,y)dx$، به‌ازای $y=0$، استفاده کرد.

همین حکم را برای تابع زیرهم ثابت کنید:

$$\begin{cases} f(x,y)=x\cdot e^{-\frac{x^2}{y}} & (0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1)\\ f(x,0)=0 \end{cases}$$

۱۶) انتگرال

$$I=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

را، که در ۹) با مشتق‌گیری نسبت به‌پارامتر پیدا کردیم، دوباره محاسبه کنید.

درعبارت زیرانتگرال، به‌جای $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$، انتگرال برابر با آن، یعنی

$$\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$$

را می‌گذاریم و I را به‌صورت انتگرال تکراری زیر می‌نویسیم:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ ۴° و جابه‌جاکردن انتگرال‌گیری، به‌دست می‌آید:

$$I=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

۱۷) انتگرال زیررا، با استفاده ازانتگرال‌گیری زیرعلامت انتگرال، محاسبه کنید.

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}\quad (a>b>0)$$

تابع زیرانتگرال را، به‌صورت انتگرال می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\sin x}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=2ab\int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}$$

به‌نحوی که

$$K=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}$$

که با جابه‌جاکردن انتگرال‌گیری، با توجه به‌قضیهٔ ۴، به‌دست می‌آید:

$$K=2ab\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}$$

وچون

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2-b^2y^2}}$$

بنابراین، بالاخره

$$K=\pi b\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{a^2-b^2y^2}}=\pi\cdot\arcsin\frac{b}{a}$$

۱۸) بازهم چند مثال از حالتی که جابه‌جایی دو انتگرال گیری مجاز نیست:

$$\text{(a)}\quad \int_0^1 dy\int_0^1\frac{y-x}{(x+y)^3}dx=\frac{1}{2},\qquad \int_0^1 dx\int_0^1\frac{y-x}{(x+y)^3}dy=-\frac{1}{2},$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^1 dy\int_0^1\Big(\frac{x^5}{y^4}-\frac{2x^3}{y^3}\Big)e^{-\frac{x^2}{y}}dx=-\frac{1}{e},$$

$$\int_0^1 dx\int_0^1\Big(\frac{x^5}{y^4}-\frac{2x^3}{y^3}\Big)e^{-\frac{x^2}{y}}dy=-\frac{1}{e}+\frac{1}{2}$$

خودبه‌خود معلوم است که، دراین‌حالت‌ها، شرط‌های قضیه‌های نظیر، برقرار نیست: تابع زیر انتگرال در نقطهٔ (۰ ،۰) ناپیوسته می‌شود.*

۵۱۲. اثبات گوس از قضیهٔ بنیادی جبر. گوس، بـا اتکا به‌قضیهٔ ۴، اثباتی کاملاً ابتکاری از قضیهٔ بنیادی جبر، داده است.

این قضیه حاکی است که هر تابع صحیح

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

(با ضریب‌های حقیقی یا مختلط)، دارای ریشه‌ای حقیقی و یا مختلط است.

فرض می‌کنیم: $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$، آن وقت

$$x^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$$

به‌نحوی که

$$f(x)=P+Qi$$

که در آن

$$P=r^n\cos n\theta+\cdots,\quad Q=r^n\sin n\theta+\cdots$$

ضمناً، جمله‌های نوشته نشده، شامل درجه‌های پایین‌تری از r هستند و جمله‌های مستقل از

---

*) درحالت (b)، به‌ازای $y=0$، ولی $x\neq 0$، به‌شرطی که تابع‌را برابر صفر بگیریم، می‌توان آن‌را پیوسته به‌حساب آورد.

r، به‌طور ساده، منجر به‌مقدارهای ثابتی می‌شوند.

قضیه، به‌وضوح ثابت خواهدشد، به‌شرطی که ثابت‌کنیم، عبارت $P^۲+Q^۲$، به‌ازای دستگاهی از مقدارهای r و θ برابر صفر می‌شود.

این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$U=\operatorname{arc}tg\frac{P}{Q}$$

آن‌وقت داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\frac{\partial P}{\partial r}\cdot Q-P\cdot\frac{\partial Q}{\partial r}}{P^۲+Q^۲},\quad \frac{\partial U}{\partial \theta}=\frac{\frac{\partial P}{\partial \theta}\cdot Q-P\cdot\frac{\partial Q}{\partial \theta}}{P^۲+Q^۲}$$

به‌نحوی که

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial r\partial\theta}=\frac{H(r,\theta)}{(P^۲+Q^۲)^۲}$$

که در آن، $H(r,\theta)$، تابعی است پیوسته نسبت به r و θ که نیازی به‌عبارت‌دقیق آن نداریم.

انتگرال‌های تکراری زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$I_۱=\int_۰^R dr\int_۰^{۲\pi}\frac{\partial^۲ U}{\partial r\partial\theta}d\theta,\quad I_۲=\int_۰^{۲\pi}d\theta\int_۰^R\frac{\partial^۲ U}{\partial r\partial\theta}dr$$

که در آن، R ثابت مثبتی است که مقدار آن‌را تعیین خواهیم کرد.

اگر $P^۲+Q^۲$ هرگز برابر صفر نشود، در آن‌صورت، تابع زیر انتگرال پیوسته می‌شود و، بنا برقضیهٔ ۴، لازم می‌آید: $I_۲=I_۱$. ولی ما ثابت خواهیم کرد که، برای R به‌قدر کافی بزرگ، این برابری برقرار نیست؛ این اثبات، به‌معنای آن است که در دایرهٔ به‌شعاع R دور مبداء تابع $P^۲+Q^۲$، باید مقداری برابر صفر را هم اختیار کند که، در نتیجه، قضیهٔ، موردنظر ثابت می‌شود.

با محاسبهٔ انتگرال درونی برای $I_۱$، به‌دست می‌آید:

$$\int_۰^{۲\pi}\frac{\partial^۲ U}{\partial r\partial\theta}d\theta=\frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{\theta=۰}^{\theta=۲\pi}=۰$$

زیرا از خود عبارت $\frac{\partial U}{\partial r}$ دیده می‌شود که تابعی است از θ با دورهٔ تناوب برابر ۲π. از

این‌جا، نتیجه می‌شود که: $I_1 = 0$.

به‌انتگرال I_2 توجه می‌کنیم. داریم:

$$\int_0^R \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} dr = \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{r=0}^{r=R}$$

برای کار بعدی ما، مهم است که جمله‌های ارشد را، نسبت به r، در صورت و مخرج کسر $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ در نظر بگیریم. چون

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -nr^n \sin n\theta + \cdots, \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = nr^n \cos n\theta + \cdots$$

آن‌وقت

$$\frac{\partial P}{\partial \theta}\cdot Q - P\cdot\frac{\partial Q}{\partial \theta} = -nr^{2n} + \cdots$$

از طرف دیگر

$$P^2 + Q^2 = r^{2n} + \cdots$$

به‌نحوی که سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{-nr^{2n} + \cdots}{r^{2n} + \cdots}$$

چون جمله‌های نوشته نشده، شامل درجه‌های پایین‌تر r وضریب‌های آن‌ها، تابع‌های کران‌داری هستند، بنا به قضیهٔ ۱ خواهیم داشت:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -n$$

ولی، میل به‌سمت حد $-n$، به‌طور یکنواخت نسبت به θ، انجام می‌پذیرد.

چون به ازای $r = 0$ و $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$ $\left(\text{زیر در این حالت: } \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0\right)$، انتگرال درونی I_2 به‌مقدار $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ به‌ازای $r = R$ منجر می‌شود، وقتی $R \to \infty$، این مقدار به‌طور یکنواخت نسبت به θ، به‌سمت $-n$ میل می‌کند. در این‌صورت، بنا به قضیهٔ ۱

$$\lim_{R\to\infty} I_2 = -2\pi n$$

به‌این ترتیب، بـرای R به‌قدرکافی بزرگ، انتگرال I_2 منفی و برابری $I_1 = I_2$، غیرممکن می‌شود.

§۲. تقارب یکنواخت انتگرال‌ها

۵۱۳. تعریف تقارب یکنواخت انتگرال‌ها. برای گسترش نظریهٔ انتگرال‌های وابسته به‌یک‌پارامتر درحالت انتگرال‌های ناویژه، مفهوم تقارب‌یکنواخت انتگرال‌ها نقش‌خاصی دارد و ما هم، ابتدا، به‌آن می‌پردازیم.

تابع $f(x, y)$ را درنظرمی‌گیریم که برای همهٔ مقدارهای $x \geqslant a$ و همهٔ‌مقدارهای y از یک حوزهٔ $\mathcal{Y}$ داده شده باشد. بعلاوه فرض می‌کنیم که، به‌ازای هر y از این حوزه، انتگرال زیر وجود داشته باشد:

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\,dx \qquad (۱)$$

از روی تعریف انتگرال ناویژهٔ با حد نامتناهی [۴۷۰] داریم:

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^{A} f(x, y)\,dx$$

به‌این ترتیب، انتگرال

$$F(A, y) = \int_a^{A} f(x, y)\,dx \qquad (۲)$$

معرف تابعی از A و y است، که به ازای $y = \text{const}$. و $A \to \infty$، دارای حد $I(y)$ است. اگر این انتگرال، نسبت به y در حوزه $\mathcal{Y}$، به‌طوریکنواخت به‌سمت $I(y)$ میل‌کند، آن‌وقت، انتگرال $I(y)$ (۱)، نسبت‌به y و برای‌مقدارهای مفروض‌پارامتر، متقارب‌یکنواخت گویند.

این، به‌معنای‌آن است‌که، برای $\varepsilon > 0$ دلخواه، عددی $A_0 \geqslant a$ مستقل‌از y، می‌توان پیدا کرد‌که تنها اگر داشته باشیم $A > A_0$، نا برابری

$$\left|\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx - \int_a^{A} f(x, y)\,dx\right| = \left|\int_A^{\infty} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$$

برای همهٔ مقدارهای y از $\mathcal{Y}$ برقرار باشد.

به‌عنوان مثال، انتگرال

$$\int_0^\infty ye^{-xy}dx$$

را در نظر می‌گیریم که، به‌ازای هر مقدار تثبیت‌شدهٔ $y \geqslant 0$، متقارب است.

مستقیماً به‌محاسبهٔ این انتگرال می‌پردازیم:

$$\int_A^\infty ye^{-xy}dx$$

مقدار این انتگرال، به‌ازای $y=0$ و انتخاب دلخواه A، برابر صفر است. در حالت $y>0$ هم، با اختیار $xy=t$، به‌سادگی پیدا می‌کنیم:

$$\int_A^\infty ye^{-xy}dx=\int_{Ay}^\infty e^{-t}dt=e^{-Ay}$$

وقتی‌که y ثابت باشد، این مقدار به‌ازای $A\to\infty$، به روشنی، به‌سمت صفر میل می‌کند و هرچه باشد $\varepsilon>0$، نابرابری

$$e^{-Ay}<\varepsilon \qquad (۳)$$

برای همهٔ $A>A_0(y)$ برقرار خواهد بود، که در آن، $A_0(y)=\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y}$ بستگی به y دارد.

اگر تغییر y محدود به‌بازهٔ $[c, d]$ باشد، که در آن $c>0$، در آن‌صورت، چنان عدد A_0 مستقل از y پیدا می‌شود که، به‌ازای $A>A_0$، نابرابری (۳) برای همهٔ yها برقرار باشد: کافی است برای A_0، $A_0(c)$ اختیار شود، زیرا در آن‌صورت، به‌ازای $A>A_0$ داریم:

$$e^{-Ay}\leqslant e^{-Ac}<\varepsilon \quad (c\leqslant y\leqslant d)$$

به‌زبان دیگر، انتگرال مفروض نسبت به y، در بازهٔ $[c, d]$، متقارب یکنواخت است.

ولی اگر y، مثلاً، در بازهٔ $[0, d]$ $(d>0)$ تغییر کند، وضع به‌گونه‌ای دیگر است. در این حالت، این‌گونه A_0 وجود ندارد (دست‌کم برای $\varepsilon<1$). این مطلب، مثلاً، از این‌جا روشن می‌شود که A را هرقدر بزرگ اختیار کنیم، عبارت e^{-Ay}، به‌ازای $y\to 0$،

به‌سمت ۱ میل می‌کند، به‌نحوی‌که برای مقدارهای به‌قدرکافی کوچك y، از عدد دلخواه $\varepsilon<1$ بزرگتر می‌شود، به این ترتیب، دیگر تقارب انتگرال، وقتی‌که y در بازهٔ $[d, 0]$ تغییر کند، نسبت به y یکنواخت نخواهد بود.

۵۱۴. شرط تقارب یکنواخت. بستگی با رشته‌ها. باتوجه به‌معیارکلی میل یکنواخت تابع به‌سمت حد [۵۰۴، ۱°] می‌توان، با توجه به‌حالت مورد نظر، گفت:

برای آن‌که انتگرال (۱)، نسبت به y از حوزهٔ Y، متقارب یکنواخت باشد، لازم وکافی است که، به‌ازای $\varepsilon>0$ مفروض دلخواه، عدد A_0 مستقل از y را بتوان پیدا کرد که وقتی داشته باشیم: $A'>A>A_0$، نابرابری

$$\left|\int_a^{A'} f(x, y)dx - \int_a^{A} f(x, y)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$$

برای همهٔ yها از Y برقرار باشد.

در این جا هم طبق معمول، کار به‌آن‌جا منجر می‌شود که، برای همهٔ مقدارهای مورد نظر y، اصل تقارب، به‌طور یکنواخت، برقرار باشد [با **۴۷۵** مقایسه کنید].

انتگرال ناویژهٔ با حدنامتناهی را قبلاً در **۴۷۵**، با رشته‌های نامتناهی مقایسه کردیم. در مسالهٔ تقارب یکنواخت انتگرال (۱) هم، ارتباط با رشته‌های نامتناهی وجود دارد.

به‌طوری که از **۵۰۴**، ۲° می‌دانیم، برای نزدیکی یکنواخت (نسبت به y) تابع $F(A, y)$ [(۲) را ببینید]، به‌ازای $A \to \infty$، به‌انتگرال (۱)، لازم وکافی است که هر دنباله‌ای از تابع‌های $\{F(A_n, y)\}$، برای واریانت دلخواه A_n که به‌سمت ∞ میل می‌کند، به‌طور یکنواخت به‌سمت این انتگرال متقارب شود.

بالاخره، اگر از «زبان دنباله‌ها» به «زبان رشته‌های نامتناهی» عبور کنیم، در آن‌صورت، به‌این نتیجهٔ نهائی می‌رسیم که: تقارب یکنواخت (نسبت به y) انتگرال (۱)، کاملاً هم‌ارز است با تقارب یکنواخت همهٔ رشته‌های به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)dx \quad (A_0 = a, A_n \geqslant a)$$

که در آن، A_n واریانت دلخواهی است که به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند.

۵۱۵. معیارهای کافی برای تقارب یکنواخت. اکنون چند معیار می‌آوریم که، در عمل، معمولاً به‌کمك آن‌ها، دربارهٔ تقارب یکنواخت انتگرال‌ها داوری می‌شود.

این معیارها، شبیه به‌معیارهای ویرشتراس، آبل و دیریکله دربارهٔ تقارب یکنواخت

رشته‌های تابعی [۴۳۰] و، همچنین، نزدیك به‌معیارهای تقارب انتگرال‌های ناویژه [۴۷۶] که آن‌ها هم با نام‌های آبل و دیریکله مربوط بودند، ساخته شده‌اند.

۱°. فرض می‌کنیم، تابع $f(x, y)$، نسبت به x در هر بازهٔ متناهی $[a, A]$ $(A \geqslant a)$، انتگرال‌پذیر باشد. اگر تابعی مثل $\varphi(x)$، که تنها به x بستگی دارد، وجود داشته باشد، به‌نحوی که در بازهٔ نامتناهی $[a, +\infty]$ انتگرال‌پذیر باشد و، ضمناً، برای همهٔ مقدارهای y از Y داشته باشیم:

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x) \quad (x \geqslant a \text{ برای})$$

در آن‌صورت، انتگرال (۱) به‌طور یکنواخت، نسبت به y، متقارب می‌شود.

اگر از معیار شمارهٔ پیش استفاده کنیم، می‌توان این نتیجه را، مستقیماً و از نابرابری زیر، به‌دست آورد:

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)dx\right| \leqslant \int_A^{A'} \varphi(x)dx$$

با این شرط‌ها، گاهی گویند که تابع $f(x, y)$ دارای کنار بالای انتگرال‌پذیر $\varphi(x)$ است، یا انتگرال (۱)، به‌وسیلهٔ انتگرال متقارب

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$$

که شامل پارامتر نیست، محدود می‌شود.

۲°. با استفاده از قضیهٔ دوم میانگین می‌توان، شبیه آن‌چه در ۴۷۶ داشتیم، معیار ظریف‌تری را در اختیار داشته باشیم.

انتگرال حاصل‌ضرب دو تابع را در نظر می‌گیریم:

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) \cdot g(x, y)dx \qquad (۴)$$

با این فرض که $f(x, y)$، نسبت به x در بازهٔ دلخواه $[a, A]$ انتگرال‌پذیر و تابع $g(x, y)$ نسبت به x یکنوا باشد.

اگر انتگرال

$$\int_a^{\infty} f(x, y)dx$$

نسبت به y در حوزهٔ $\mathcal{Y}$ متقارب یکنواخت و تابع $g(x, y)$ به‌طوریکنواخت‌کران‌دار باشد:

$$|g(x, y)| \leqslant L \quad (L = \text{const.}\ x \geqslant a,\ y \in \mathcal{Y})$$

آن‌وقت، انتگرال (۴)، نسبت به y در حوزهٔ $\mathcal{Y}$، متقارب یکنواخت است.

این‌بار، به جای (۶) شمارهٔ **۴۷۶**، داریم:

$$\int_A^{A'} f(x, y) \cdot g(x, y)\, dx =$$

$$= g(A, y) \int_A^{\xi} f(x, y)\, dx + g(A', y) \int_{\xi}^{A'} f(x, y)\, dx$$

اگر براساس **۵۱۴**، A را آن‌قدر بزرگ بگیریم تا، به‌ازای $A_0 < A < A'$، برای همهٔ yها داشته باشیم:

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

درآن‌صورت (مانند **۴۷۶**)، به‌سادگی، برآورد زیر به‌دست می‌آید:

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) \cdot g(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

که [**۵۱۴**] حکم ما را هم ثابت می‌کند.

۳°. شبیه شمارهٔ **۴۷۶**، می‌توان از ترکیب دیگری برای شرط‌های مربوط به‌تابع‌های f و g استفاده کرد.

اگر انتگرال

$$\int_a^A f(x, y)\, dx$$

به‌عنوان تابعی از A و y، به‌طور یکنواخت کران‌دار باشد:

$$\left| \int_a^A f(x, y)\, dx \right| \leqslant K \quad (K = \text{const.}\ A \geqslant a,\ y \in \mathcal{Y})$$

و به‌ازای $x \to \infty$، نسبت بـه y از $\mathcal{Y}$، به‌طور یکنواخت داشته باشیم: $g(x, y) \to 0$، آن‌وقت، انتگرال (۴) به‌طور یکنواخت، نسبت به y از حوزهٔ $\mathcal{Y}$، متقارب می‌شود.

اثبات را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۴°. درپایان یادآوری می‌کنیم که، در عمل، اغلب، حالتی پیش می‌آید که تنها یکی از دو عامل f و g شامل پارامتر y است. به‌این ترتیب، وابسته به‌این که کدام عامل شامل y باشد، می‌توان از هر یك از معیارهای ۲° و ۳°، دو معیار خاص به‌دست آورد.

یکی از معیارهای حاصل از ۲° را، که اغلب در عمل به‌کار می‌رود، می‌آوریم.

اگر انتگرال

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

متقارب و تابع $g(x, y)$ (یکنوا نسبت به x)، به‌طوریکنواخت کران‌دار باشد،دراین‌صورت انتگرال

$$\int_a^{\infty} f(x)\cdot g(x, y)dx$$

نسبت به y، متقارب یکنواخت خواهد بود.

به‌عنوان مثال، می‌توان تقارب یکنواخت نسبت‌به y را، برای انتگرال‌های ازنوع

$$\int_a^{\infty} e^{-xy}\cdot f(x)dx, \quad \int_a^{\infty} e^{-x^2y}\cdot f(x)dx \quad (a\geqslant 0)$$

برای $y\geqslant 0$ و با فرض متقارب بودن $\int_a^{\infty} f(x)dx$، نتیجه‌گرفت. در واقع، هر دوتابع e^{-xy} و e^{-x^2y} نسبت به x نزولی یکنوا و با عدد ۱ کران‌دار هستند.

از این نکته، بعد از این، بارها استفاده خواهیم کرد.

۵۱۶. حالت دیگر تقارب یکنواخت. تابع $f(x, y)$ را در نظر می‌گیریم که برای مقدارهای x در بازهٔ متناهی $[a, b]$ و مقدارهای y از حوزه‌ای مثل $\mathcal{Y}$، معین باشد. ضمناً، فرض می‌کنیم این تابع، به‌ازای $y=\text{const}$، نسبت به x (به‌مفهوم ویژه یـا ناویژه) از a تا b انتگرال‌پذیر باشد. آن‌وقت، انتگرال

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)dx \qquad (۵)$$

خواه ویژه باشد یا ناویژه، عبارت است از حد انتگرال

$$\varphi(\eta, y)=\int_a^{b-\eta} f(x, y)dx \qquad (۶)$$

وقتی‌که $\eta \to ۰$.

اگر این انتگرال، به‌ازای $\eta \to ۰$، نسبت به y (برای مقدارهای y از حوزهٔ $\mathcal{Y}$، به‌طور یکنواخت به‌سمت حد $I(y)$ میل‌کند، آن‌وقت، می‌گویند: انتگرال (۵) نسبت به y (در حوزهٔ مربوط)، به‌طور یکنواخت متقارب است.

این حکم به‌این معناست که، برای $\varepsilon>۰$ دلخواه، می‌توان عدد $\delta>۰$ مستقل از y را طوری پیدا کرد که، تنها با شرط $\eta<\delta$، نابرابری

$$\left|\int_a^b f(x, y)dx-\int_a^{b-\eta} f(x, y)dx\right|=\left|\int_{b-\eta}^b f(x, y)dx\right|<\varepsilon$$

برای همهٔ مقدارهای y از $\mathcal{Y}$ برقرار باشد.

در این حالت، می‌توان به‌سادگی، شرط‌های لازم و کافی را برای تقارب یکنواخت، تنظیم کرد. در این‌جا هم، کار به‌برقراری یکنواخت اصل تقارب منتهی می‌شود: باید از روی عدد $\varepsilon>۰$، عدد $\delta>۰$ مستقل از y را طوری پیداکرد که، به‌ازای $۰<\eta'<\eta<\delta$ نابرابری

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x, y)dx\right|<\varepsilon$$

برای هر مقدار دلخواه y از حوزهٔ $\mathcal{Y}$، برقرار باشد.

از همین‌جا، می‌توان مسألهٔ مربوط به تقارب یکنواخت انتگرال (۵) را به‌مسالهٔ مربوط به‌تقارب یکنواخت رشته‌های نامتناهی منجر کرد:

$$\int_a^b f(x, y)dx=\sum_{n=۰}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+۱}} f(x, y)dx \quad (a_۰=a,\ a\leqslant a_n\leqslant b)$$

هرچه باشد واریانت $a_n \to b$ [با ۵۱۴ مقایسه‌کنید].

بالاخره، معیارهای کافی شمارهٔ ۵۱۵ را هم، می‌توان به‌همین حالت منتقل کرد؛ که آن‌را به‌خواننده وامی‌گذاریم.

ما انتگرال (۵) از a تا b را، به‌عنوان حد انتگرال (۶) از a تا $\eta-b$ درنظر گرفتیم؛ در این‌جا، خصلت نزدیک‌شدن انتگرال اخیر به‌حد خودش، برای ما جالب بود. بنابراین

نقطهٔ $x=b$ (همچون $x=\infty$ در ۵۱۳)، نقش خاصی به‌عهده دارد؛ و ممکن است (بسته به کیفیتی که بعداً توضیح داده می‌شود) لازم شود که چنین نقشی به‌عهدهٔ نقطه‌های دیگری هم گذاشته شود. مثلاً، همان انتگرال (۵) را، می‌توان به‌عنوان حد انتگرال

$$\int_{a+\eta}^{b} f(x, y)dx$$

هم، به‌ازای $\eta \to 0$، درنظر گرفت. اگر انتگرال اخیر، به‌ازای $\eta \to 0$، به‌طور یکنواخت نسبت به y، به‌حد خود نزدیک شود، درآن‌صورت، می‌توان از تقارب یکنواخت انتگرال (۵) صحبت کرد؛ و همهٔ آن‌چه در بالا گفته شد، در این حالت هم درست است.

اگر احتمالاً، تردیدی در این‌مورد باشد که صحبت از کدام شکل تقارب یکنواخت است، می‌گویند که انتگرال، به‌طور یکنواخت (نسبت به y در حوزهٔ معین)، به ترتیب، برای $x=+\infty$، به‌ازای $x=b$، به‌ازای $x=a$ وغیره، متقارب می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که تقارب یکنواخت انتگرال (۵)، مثلاً به‌ازای $x=b$، در موردهایی برای ما جالب است که نقطهٔ $x=b$، برای انتگرال (۵)، برای این یا آن مقدارهای y، نقطهٔ خاص باشد [به‌مفهوم شمارهٔ ۴۷۹].

ولی این تعریف، نه‌تنها وقتی که انتگرال (۵) به‌ازای همهٔ مقدارهای y ویژه باشد، بلکه (به‌طوری که خواهیم دید) حتی برای حالتی هم که برای بعضی از مقدارهای y ویژه باشد، ممکن است سودمند باشد.

مثلاً انتگرال

$$\int_{0}^{1} \frac{y}{x^2+y^2}dx$$

برای هر مقدار y از بازهٔ $[d, 0]$ $(d<0)$، به‌عنوان انتگرال ویژه وجود دارد. باوجود این تقارب آن، در این بازهٔ تغییر y، به‌ازای $x=0$ یکنواخت نیست. در واقع، اگر $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ بگیریم، نابرابری

$$\int_{0}^{\eta} \frac{y}{x^2+y^2}dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{y}<\varepsilon$$

نمی‌تواند برای همهٔ مقدارهای $y<0$ ـ هرقدرهم که η را کوچک بگیریم ـ برقرار شود:

سمت‌چپ آن، به ازای $y \to +0$، به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند و، برای مقدارهای به‌قدر کافی کوچك y، بزرگتر از ε می‌شود:

۵۱۷. مثال‌ها. ۱) تقارب یکنواخت (نسبت به y) انتگرال

$$\int_1^{\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

را، برای همهٔ مقدارهای y، به‌طور مستقیم ثابت کنید.

داریم:

$$\left|\int_A^{\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right| = \frac{A}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{A}$$

که از آن‌جا، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

۲) به‌کمك محدودکننده‌ها، ثابت کنید که انتگرال‌های

$$\text{(a)} \int_0^{\infty} e^{-tx^2}dx, \quad \text{(b)} \int_0^{\infty} e^{-tx}\cdot x^a\cdot \cos x\,dx \quad (a \geqslant 0)$$

نسبت به t و برای $t \geqslant t_0 > 0$، به‌طور یکنواخت متقارب‌اند.

راهنمائی. محدودکننده‌ها، عبارتند از: (a) $e^{-t_0x^2}$، (b) $e^{-t_0x}\cdot x^a$.

۳) مستقیماً ثابت کنید که انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{n}{x^3}e^{-\frac{n}{2x^2}}dx$$

برای مقدارهای $n = 1, 2, 3, \ldots$، به‌طور یکنواخت نسبت به n متقارب نمی‌شود.

این مطلب از آن‌جا نتیجه می‌شود که، هرچه باشد $A = \text{const}$ و به‌ازای $n \to \infty$ داریم:

$$\int_A^{\infty} \frac{n}{x^3}e^{-\frac{n}{2x^2}}dx = e^{-\frac{n}{2x^2}}\Big|_A^{\infty} = 1 - e^{-\frac{n}{2A^2}} \to 1$$

۴) مستقیماً ثابت کنید که انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}dx$ نسبت به α، درحوزهٔ $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ به‌طور یکنواخت و درحوزهٔ $\alpha \geqslant 0$ به‌طور غیریکنواخت متقارب می‌شود.

اگر A_0 آن‌قدر بزرگ باشد که به‌ازای $A>A_0$ داشته باشیم:

$$\left|\int_A^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz\right|<\varepsilon$$

که در آن، $\varepsilon>0$ عدد از پیش داده شدهٔ دلخواهی است، در آن صورت

$$\int_A^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\int_{A\alpha}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz \qquad (۷)$$

از لحاظ قدرمطلق ـ به‌ازای همهٔ $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ و تنها با شرط $A>\frac{A_0}{\alpha_0}$ ـ کمتر از ε می‌شود، که با آن، بخش اول حکم هم ثابت می‌شود.

بخش دوم هم از این‌جا نتیجه می‌شود که عبارت (۷)، به‌ازای $A=\text{const.}$ دلخواه، به‌سمت حد

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$$

میل می‌کند، وقتی که $\alpha\to 0$.

۵) تقارب یکنواخت نسبت به a را، برای انتگرال

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}\cos x\,dx$$

در بازهٔ دلخواهی که شامل ± 1 نباشد، ثابت کنید.

راهنمائی. انتگرال را، به‌این صورت بنویسید:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(a+1)x+\sin(a-1)x}{x}dx$$

۶) مسألهٔ مربوط به‌تقارب یکنواخت (نسبت به t) انتگرال زیر را بررسی کنید:

$$\int_0^{\infty}x\sin x^3\cdot\sin tx\,dx$$

راهنمائی. به‌کمک انتگرال گیری جزء به جزء، انتگرال $\int_A^{\infty}$، به‌این صورت

درمی‌آید:

$$-\frac{\cos x^3 \sin tx}{3x}+\frac{t}{3}\cdot\frac{\sin x^3\cdot\cos tx}{3x^2}\Big|_A^\infty-$$

$$-\frac{1}{3}\int_A^\infty\frac{\cos x^3\cdot\sin tx}{x^2}dx+\frac{t}{3}\int_A^\infty\frac{\sin x^3\cdot\cos tx}{x^4}dx+$$

$$+\frac{t^2}{9}\int_A^\infty\frac{\sin x^3\cdot\sin tx}{x^3}dx$$

وازاین‌جا، تقارب یکنواخت نسبت به t، دربازهٔ متناهی دلخواه، روشن می‌شود.

۷) ثابت کنید، انتگرال‌های

$$\text{(a)}\int_0^1 x^{p-1}dx,\quad \text{(b)}\int_0^1 x^{p-1}\ln^m x\,dx$$

(m عددی‌طبیعی)، نسبت به p (به‌ازای $x=0$)، درحوزهٔ $p\geqslant p_0>0$ به‌طوریکنواخت ودرحوزهٔ $p>0$ به‌طور غیریکنواخت متقارب‌اند.

محدودکننده‌ها: (a) x^{p_0-1}، (b) $x^{p_0-1}|\ln x|^m$ (برای‌حوزهٔ $p\geqslant p_0>0$). از طرف‌دیگر، $\eta=\text{const}.$ را هرطور اختیارکنیم، داریم:

$$\int_0^\eta x^{p-1}dx=\frac{\eta^p}{p}\to\infty\quad(\text{وقتی } p\to 0)$$

۸) به‌طریق مشابهی، می‌توان تقارب یکنواخت انتگرال

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

را نسبت به p به‌ازای $p\geqslant p_0>0$ (برای $x=0$)، ونسبت به q به‌ازای $q\geqslant q_0>0$ (برای $x=1$) ثابت کرد.

۹) ثابت کنیدکه تقارب انتگرال

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x^y}dx$$

(برای $x=0$) نسبت به y، برای $y\leqslant y_0<2$ یکنواخت وبـرای $y<2$ غیریکنواخت

می‌شود.

محدودکننده: $\frac{۱}{x^{y_۰-۱}}$ برای حالت $y \leqslant y_۰ < ۲$. سپس، $\eta > ۰$ دلخواه را تثبیت می‌کنیم، ولی آن‌قدر کوچك که به‌ازای $x \leqslant \eta$ داشته باشیم: $\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{۱}{۲}$؛ آن‌وقت

$$\int_۰^\eta \frac{\sin x}{x^y} dx > \frac{۱}{۲} \int_۰^\eta \frac{dx}{x^{y-۱}} = \frac{۱}{۲(۲-y)} \eta^{۲-y} \to \infty \quad (y \to ۲ \text{ وقتی})$$

۱۰) تقارب یکنواخت نسبت به n $(n = ۱, ۲, ۳, \dots)$ انتگرال

$$\int_۰^۱ (۱ + x + x^۲ + \dots + x^{n-۱}) \sqrt{\ln \frac{۱}{x}}\, dx$$

را ــ هم برای $x = ۰$ وهم برای $x = ۱$ ــ ثابت کنید.

چون داریم: $\frac{۱}{۱-x} > ۱ + x + x^۲ + \dots + x^{n-۱}$، بنابراین، محدودکننده عبارت است از تابع $\frac{۱}{۱-x}\sqrt{\ln \frac{۱}{x}}$، که در بازهٔ $[۰, ۱]$، انتگرال‌پذیر است.

۱۱) مستقیماً ثابت کنید که تقارب انتگرال

$$\int_۰^۱ \frac{y^۲ - x^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} dx$$

نسبت به y (به‌ازای $x = ۰$)، در بازهٔ $[۰, ۱]$ از تغییر y، یکنواخت نمی‌شود.

به‌ازای $\eta = \text{const.}$ دلخواه داریم:

$$\int_۰^\eta \frac{y^۲ - x^۲}{(x^۲ + y^۲)^۲} dx = \frac{x}{x^۲ + y^۲}\Big|_{x=۰}^{x=\eta} = \frac{\eta}{\eta^۲ + y^۲} \to \frac{۱}{\eta} \quad (y \to ۰ \text{ برای})$$

۱۲) تمرین قبل را، برای این انتگرال درنظر بگیرید:

$$\int_۰^۱ \frac{۸x^۳y - ۸xy^۳}{(x^۲ + y^۲)^۲} dx$$

در این‌جا، انتگرال

$$\int_۰^\eta = -\frac{۴\eta^۲ y}{(\eta + y^۲)^۲}$$

به ازای $y=\eta$، برابر $-\frac{1}{\eta}$ می‌شود.

۱۳) ثابت کنید، انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-xy}\cdot\frac{\cos x}{x^a}\,dx \quad (0<a<1)$$

نسبت به y، برای $y\geqslant 0$ (هم به‌ازای $x=0$ وهم به‌ازای $x=\infty$)، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود.

درحالت $x=0$، با توجه به‌محدودکنندهٔ $\frac{1}{x^a}$، درستی حکم روشن است ودرستی حکم درحالت $x=\infty$، ازتقارب انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^a}dx$$

[۴۷۶]، در رابطهٔ یادداشت آخر شمارهٔ ۵۱۵، نتیجه می‌شود.

۱۴) تابع $f(t)$ را به‌ازای $t>0$ پیوسته می‌گیریم. ثابت کنیدکه اگرانتگرال

$$\int_0^\infty t^\lambda f(t)dt$$

به‌ازای $\lambda=\alpha$ و $\lambda=\beta$ $(\alpha<\beta)$ متقارب باشد، آن‌وقت، برای همهٔ مقدارهای λ بین α و β متقارب و، ضمناً، یکنواخت نسبت به λ (به‌ازای $t=0$ و به‌ازای $t=\infty$) می‌شود.

اثبات. انتگرال $\int_0^1 t^\alpha f(t)dt$ متقارب و $t^{\lambda-\alpha}$، برای مقدارهای $\lambda\geqslant\alpha$، تابعی یکنوا نسبت به t و به‌وسیلهٔ ۱ کران‌دار می‌شود. ازاین‌جا، انتگرال

$$\int_0^1 t^\lambda f(t)dt=\int_0^1 t^{\lambda-\alpha}.t^\alpha f(t)dt$$

برای مقدارهای مفروض λ، به‌طور یکنواخت (به‌ازای $t=0$) متقارب می‌شود. به‌همین‌ترتیب، می‌توان اطمینان حاصل کردکه انتگرال

$$\int_1^\infty t^\lambda f(t)dt=\int_0^\infty t^{\lambda-\beta}t^\beta f(t)dt$$

به‌طور یکنواخت، نسبت λ برای $\lambda \leqslant \beta$ (به‌ازای $t=\infty$) متقارب می‌شود.

۱۵) یکنواختی تقارب نسبت به y (به‌ازای $x=\infty$) انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^a} dx \quad (0<a<1)$$

را برای $y \geqslant y_0 > 0$ و غیریکنواختی تقارب آن را برای $y > 0$، ثابت کنید.

درمورد بخش اول حکم، می‌توان از معیار ۵۱۵، ۳° استفاده کرد [با ۴° مقایسه کنید]، زیرا برای $A \geqslant 0$ و $y \geqslant y_0$ دلخواه

$$\left| \int_0^A \cos xy\, dx \right| = \left| \frac{\sin Ay}{y} \right| \leqslant \frac{1}{y_0}$$

و تابع $\frac{1}{x^a}$، با نزول یکنوا، به‌ازای $x \to \infty$، به‌سمت صفر میل می‌کند.

همین ملاحظه را، می‌توان مستقیماً، و با بررسی عبارت زیر هم، به‌عمل آورد.

$$\int_A^{\infty} \frac{\cos xy}{x^a}\, dx = y^{a-1} \int_{Ay}^{\infty} \frac{\cos z}{z} dz$$

بخش دوم حکم، از این‌جا نتیجه می‌شود که، همان عبارت، به‌ازای $A=\frac{1}{y}$ و $y \to 0$، تا بی‌نهایت صعود می‌کند.

(به‌سادگی دیده می‌شود که، به‌ازای $x=0$، انتگرال به‌طور یکنواخت نسبت به y، درحوزهٔ دلخواه تغییر y، متقارب می‌شود.)

۱۶) ثابت کنید که انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2}\, dx \quad (\alpha, \beta > 0)$$

نسبت به β، برای $\beta \geqslant \beta_0 > 0$، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود.

این حکم، از ۵۱۵، ۳° نتیجه می‌شود. درواقع، برای $\beta \geqslant \beta_0$ داریم:

$$\left| \int_0^A \sin \beta x\, dx \right| = \frac{1-\cos A\beta}{\beta} \leqslant \frac{2}{\beta}$$

ازطرف دیگر، عبارت

$$\frac{x}{\alpha^{۲}+x^{۲}}$$

که‌شامل β نیست، باصعود x (دست‌کم برای $x \geqslant \alpha$) نزولی است و، به‌ازای $x \to +\infty$، به‌سمت صفرمیل می‌کند.

§۳. استفاده از تقارب یکنواخت انتگرال‌ها

۵۱۸. انتقال حد به‌زیر علامت انتگرال. اکنون، به طور عمده به مسألهٔ مربوط به‌انتقال حد به‌زیر علامت انتگرال، دربازهٔ نامتناهی، می‌پردازیم. قضیهٔ ۱ شمارهٔ ۵۰۶، دراین حالت، تطبیق نمی‌کند؛ حتی اگر درتمامی بازهٔ نامتناهی تابع $f(x, y)$، به‌ازای $y \to y_۰$، به‌طور یکنواخت، به‌سمت تابع حدی $\varphi(x)$ میل کند؛ ممکن است انتقال حد به‌زیر علامت انتگرال مجاز نباشد.

به‌عنوان مثال، این تابع را بررسی می‌کنیم ($n = ۱, ۲, ۳, \ldots$):

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{x^{۳}} . e^{-\frac{n}{۲x^{۲}}} & (x > ۰) \\ f_n(۰) = ۰ \end{cases}$$

با روش‌های معمول حساب دیفرانسیلی، به‌سادگی، ثابت می‌شود که بزرگترین مقدار این تابع، به‌ازای $x = \sqrt[۳]{\dfrac{n}{۳}}$ حاصل می‌شود و برابر است با $\dfrac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{n}} . e^{-\frac{۳}{۲}}$. چون، به‌ازای $n \to \infty$، درتمامی بازهٔ $(۰, +\infty]$، به‌طور یکنواخت، به‌سمت $\varphi(x) = ۰$ میل می‌کند. با وجود این، انتگرال

$$\int_{۰}^{\infty} f_n(x)dx = ۱$$

به‌ازای $n \to \infty$، به‌هیچ‌وجه به‌سمت صفرمیل نمی‌کند.

شرط‌های کافی، برای مجازبودن انتقال حد، با قضیهٔ زیرداده می‌شود:

قضیهٔ ۱. تابع $f(x, y)$ را، برای y از $\mathcal{Y}$، نسبت به x از بازهٔ $[a, A]$ و برای $A > a$، انتگرال‌پذیر (به‌مفهوم ویژه) می‌گیریم، و فرض می‌کنیم، در هرچنین بازه‌ای، به‌ازای $y \to y_۰$، به‌طور یکنواخت نسبت به x به‌سمت تابع حدی $\varphi(x)$ میل کند، اگر علاوه برآن، انتگرال

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx \qquad (۱)$$

به‌طور یکنواخت نسبت به y (در $\mathcal{Y}$) متقارب باشد، در آن صورت داریم:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx=\int_a^{\infty}\varphi(x)dx \qquad (۲)$$

مثل قبل، فرض می‌کنیم:

$$F(A, y)=\int_a^{A} f(x, y)\,dx \qquad (۳)$$

برای این انتگرال، شرطهای قضیهٔ ۱ شمارهٔ ۵۰۶ برقرارند، به‌این جهت

$$\lim_{y\to y_0} F(A, y)=\int_a^{A}\varphi(x)dx \qquad (۴)$$

ازطرف دیگر روشن است که

$$\lim_{A\to\infty} F(A, y)=\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx \qquad (۵)$$

ضمناً معلوم است که، در این‌جا، میل تابع $F(A, y)$ به‌سمت حد خودش، به‌طور یکنواخت نسبت به y، انجام می‌یابد. درچنین حالتی، حق داریم به‌قضیهٔ کلی شمارهٔ ۵۰۵ دربارهٔ جابه‌جائی گذر حدی استناد و وجود و برابری حدهای دوگانه را تایید کنیم که، مستقیماً، به (۲) منجر می‌شود.

ازاین‌جا، با به‌کاربردن قضیهٔ کلی دینی [۵۰۴، ۴°] می‌توان این‌طور نتیجه گرفت:

نتیجه*. فرض می‌کنیم تابع ناهنفی $f(x, y)$، که در بازهٔ $[a, +\infty)$، نسبت به x پیوسته و نسبت به y صعودی است، به‌سمت تابع حدی $\varphi(x)$ ــ که به‌نوبهٔ خود در بازهٔ مفروض پیوسته است ــ میل کند، آن‌وقت، از وجود انتگرال

$$\int_a^{\infty}\varphi(x)dx \qquad (۶)$$

می‌توان وجود انتگرال (۱) (برای همهٔ yها از $\mathcal{Y}$) و، همچنین، درستی دستور (۲) را نتیجه

*) دراین‌جا فرض می‌کنیم که $y_0<\infty$.

گرفت.

ازروی این قضیه، با توجه به‌شرط‌های مربوط، معلوم می‌شود که تابع $f(x, y)$، دربازهٔ متناهی دلخواه، به‌طور یکنواخت نسبت به x، به سمت $\varphi(x)$ میل می‌کند. ضمناً، بنابرقضیهٔ ۱ شمارهٔ **۴۷۴**، انتگرال (۱) وجود دارد، زیرا

$$f(x, y) \leqslant \varphi(x)$$

تابع $\varphi(x)$، درعین‌حال که نقش محدودکننده را بازی می‌کند [**۵۱۵**]، یکنواختی تقارب (نسبت به y) انتگرال(۱) را هم تامین‌می‌کند. به‌این‌ترتیب، همهٔ شرط‌ها، برای به‌کاربردن قضیه‌های پیش، رعایت شده است.

خواننده، خود می‌تواند به‌سادگی روشن‌کندکه می‌توان فرض مربوط به‌وجود انتگرال (۶) ازتابع حدی را، با فرض مربوط به‌وجود حد متناهی

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{\infty} f(x, y)dx$$

عوض‌کردکه ازآن‌جا، هم وجود انتگرال (۶) وهم درستی دستور (۲) نتیجه خواهد شد.

با همین شیوه، می‌توان تعمیمی برای قضیهٔ ۱ شمارهٔ **۵۱۵**، دربازهٔ متناهی، به‌دست آورد.

قضیهٔ ۱′. فرض کنیم تابع $f(x, y)$ (برای y از $\mathcal{Y}$)، دربازهٔ $[a, b-\eta]$، به‌ازای مقدار دلخواه $0 < \eta < b-a$، به‌معنای ویژه، انتگرال‌پذیر باشد و در هرچنین بازه‌ای، به‌ازای $y \to y_0$، به طور یکنواخت نسبت به x، به‌سمت تابع حدی $\varphi(x)$ میل کند. علاوه برآن، انتگرال

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

(به‌ازای $x = b$) به‌طور یکنواخت نسبت به y از $\mathcal{Y}$، متقارب باشد، درآن صورت، دستور زیر برقرار است:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx$$

اثبات، باآن‌چه هم‌اکنون دیدیم، هیچ تفاوتی ندارد. نتیجه را هم می‌توان برای این حالت، به‌سادگی، به‌دست آورد.

روشن است که نقش نقطهٔ b را به‌هر نقطهٔ دلخواه دیگری از بازه هم می‌توان داد. علاوه بر آن، ممکن است در بازه، چند نقطهٔ مشابه وجود داشته باشد.

شبیه قبل، در این‌جا هم برای انتقال حد به‌زیر علامت انتگرال، می‌توان از دنبالهٔ تابع‌های $\{f_n(x)\}$ استفاده کرد. سپس، با عبور از دنباله‌ها به‌رشته‌های نامتناهی، می‌توان قضیه‌های تازه‌ای دربارهٔ انتگرال‌گیری جمله به‌جملهٔ رشته‌های تابعی به‌دست آورد.

مثلاً، شکل تازهٔ نتیجه، به‌این صورت خواهد بود:

فرض کنید رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

که از تابع‌های مثبت و پیوسته برای $x \geqslant a$ (یا برای $a \leqslant x < b$) تشکیل شده است، به‌ازای همین مقدارهای x، دارای مجموع پیوستهٔ $\varphi(x)$ باشد. اگر $\varphi(x)$ در بازهٔ $[a, +\infty)$ (یا بازهٔ $[a, b)$) انتگرال‌پذیر باشد، آن‌وقت می‌توان از رشته، در همین بازه، جمله به‌جمله انتگرال گرفت. در این‌جا هم، مثل قبل، به‌جای انتگرال‌پذیری مجموع رشته، می‌توان فرض را بر تقارب رشته انتگرال‌های زیر گرفت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\infty} u_n(x)dx \quad \left[\text{یا} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{b} u_n(x)dx\right]$$

حکم، برای حالتی هم که همهٔ جمله‌های رشته منفی باشند، به‌قوت خود باقی است، زیرا با یک تغییر علامت ساده، به‌حالت قبلی تبدیل می‌شود.

۵۱۹. مثال‌ها. ۱) به‌کمک بسط به‌رشته، انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx, \quad \text{(b)} \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$$

حل. (a). تابع زیر انتگرال را، به‌صورت رشته، بسط می‌دهیم:

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} - \dots$$

که همهٔ جمله‌های آن دارای علامت منفی هستند. تقارب یکنواخت، در نزدیکی $x = 1$ از بین می‌رود. این نقطه، برای مجموع رشته هم، نقطه‌ای خاص است؛ با این همه، مجموع مفروض در بازهٔ $[0, 1]$ انتگرال‌پذیر است. با فرض آخر شمارهٔ پیش، جمله به‌جمله انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

[۴۴۵، (۴)].

(b). انتگرال دوم، باتبدیل $x = 1 - z$ به‌انتگرال اول منجرمی‌شود. با وجوداین، برای تمرین، آن را دوباره و با بسط $\frac{1}{1-x}$ به‌رشته، محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \ln x$$

دراین‌جا نیز، همهٔ جمله‌ها منفی هستند. یکنواختی تقارب، این‌بار، در نزدیکی دونقطهٔ $x = 0$ و $x = 1$ ازبین می‌رود، به‌نحوی‌که باید، مثلاً، در دوبازهٔ جداگانهٔ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ و $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$، عمل کرد. سرانجام

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^n \ln x\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

۲) (a) مطلوب است محاسبهٔ مجموع رشتهٔ

$$\sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$$

با آغاز ازاین مطلب که

$$\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 x^{2n}dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

حل. داریم:

$$\sigma = \sum_0^{\infty}(-1)^n \int_0^1 (x^{4n} + x^{4n+2})dx =$$

$$= \int_0^1 dx \sum_0^{\infty}(-1)^n x^{4n}\cdot(1+x^2) = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

با وجودی‌که مجموع رشته، ویژگی خاصی ندارد، تقارب یکنواخت در نزدیکی $x = 1$ ازبین می‌رود. ازآن‌جاکه برای مجموع جزئی رشته داریم:

$$0 \leqslant \sum_{0}^{n-1} (-1)^{\nu} x^{4\nu}\cdot(1+x^2) = \frac{1 \pm x^{4n}}{1+x^{4n}}(1+x)^2 \leqslant 2\,\frac{1+x^2}{1+x^{4n}} \leqslant 4$$

بنابراین، مقدارهای ثابت، نقش محدودکننده را به‌عهده دارند و انتگرال این مجموع (به‌ازای $x=1$) به‌طور یکنواخت نسبت به n، متقارب می‌شود؛ و به‌این ترتیب، انتگرال گیری جمله به جمله (قضیهٔ ۱) تایید می‌شود.

(b) به‌همین ترتیب، می‌توان محاسبه کرد:

$$1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\cdots=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

۳) با آغاز از رابطهٔ

$$\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+n)}=\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n x^{p-1}dx$$

مجموع هریك ازاین رشته‌ها را محاسبه کنید:

(a) $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{5\times6\times7}+\cdots,$

(b) $\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{4\times5\times6}+\frac{1}{6\times7\times8}+\cdots,$

(c) $\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{4\times5\times6\times7}+\frac{1}{7\times8\times9\times10}+\cdots$

پاسخ:

(a) $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^2}dx=\ln 2-\frac{1}{2},$

(b) $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^2x}{1-x^2}dx=\frac{3}{4}-\ln 2,$

(c) $\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{1-x^3}dx=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$

۴) انتگرال‌های اولر را محاسبه کنید:

$$\text{(a) } I=\int_{(0<a<1)}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx \quad \text{(b) } K=\int_{(a,b>0)}^{\infty}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}dx$$

حل. (a). با تجزیهٔ انتگرال به‌دو انتگرال

$$I=\int_{0}^{1}+\int_{1}^{\infty}=I_1+I_2$$

هرکدام را به‌طور جداگانه محاسبه می‌کنیم.

برای $0<x<1$، این بسط رشته را داریم:

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}x^{a+\nu-1}$$

که تنها اگرداشته باشیم: $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon'<1$، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود. ولی، مجموع جزئی، در $[0,1]$، دارای محدودکنندهٔ انتگرال‌پذیر زیراست:

$$0\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}x^{a+\nu-1}=\frac{x^{a-1}[1-(-x)^n]}{1+x}<x^{a-1}$$

بنابراین، انتگرال آن (چه به‌ازای $x=0$ وچه به‌ازای $x=1$)، متقارب یکنواخت‌است. با انتگرال‌گیری جمله به‌جمله، ازروی قضیهٔ ۱، به‌دست می‌آید:

$$I_1=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{0}^{1}(-1)^{\nu}x^{a+\nu-1}dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{a+\nu}$$

انتگرال I_2 را، با تبدیل $x=\frac{1}{z}$، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$I_2=\int_{0}^{1}\frac{x^{-a}}{1+x}dx=\int_{0}^{1}\frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}dx$$

که با توجه به‌بسط حاصل دربالا، داریم:

$$I_2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{a-\nu}$$

به‌این ترتیب

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{a}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{1}{a+\nu}+\frac{1}{a-\nu}\right)$$

که در آن، بسط به‌کسرهای ساده [۴۴۱، ۹) را ببینید] را درمورد تابع $\frac{\pi}{\sin\pi a}$ می‌بینیم سرانجام

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi a}$$

b) مثل حالت قبل، با تجزیهٔ انتگرال به‌دو انتگرال جداگانه، وانجام همان تبدیل درمورد دومی، به‌دست می‌آید:

$$K=\int_0^{1}\frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}dx-\int_0^{1}\frac{x^{b-1}-x^{-b}}{1-x}dx=K_1-K_2^{*}$$

روشن است که پیدا کردن K_1 کافی است. تابع زیرانتگرال را، به‌صورت رشته، بسط می‌دهیم:

$$K_1=\frac{1}{a}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+\nu}+\frac{1}{a-\nu}\right)$$

ولی [۴۴۱، ۹)]، در این جا، به‌بسط تابع $\pi\cdot cotg\pi a$ به‌کسرهای ساده می‌رسیم، بنابراین

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}dx=\pi(cotg\,\pi a-cotg\,\pi b)$$

۵) مقدار هرکدام از انتگرال‌های زیررا پیداکنید ($|r|<1$):

$$\text{(a) } I_1=\int_0^{\infty}\frac{1-r\cos\beta x}{(1+x^2)(1-2r\cos\beta x+r^2)}dx$$

$$\text{(b) } I_2=\int_0^{\infty}\frac{\ln(1-2r\cos\beta x+r^2)}{1+x^2}dx$$

ضمناً، در هردوحالت، انتگرال

---

*) در هردو انتگرال، برای $x=1$، ویژگی خاصی وجود ندارد، نقطهٔ خاص عبارت است از $x=0$؛ انتگرال‌ها متقارب‌اند.

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-k}\quad (k>0)$$

را معلوم فرض کنید [۵۲۲، ۴° و ۵۲۳، ۹) را ببینید].

حل. (a). از بسط زیر آغاز می‌کنیم:

$$\frac{1-r\cos\beta x}{1-2r\cos\beta x+r^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \cos\nu\beta x^*$$

در $\frac{1}{1+x^2}$ ضرب می‌کنیم و جمله به‌جمله انتگرال می‌گیریم:

$$I=\sum_{\nu=0}^{\infty} r^\nu \int_0^\infty \frac{\cos\nu\beta x}{1+x^2}dx$$

از آن‌جا که رشتهٔ اولیه ــ از روی ضرب در $\frac{1}{1+x^2}$ ــ حتی در تمامی بازهٔ نامتناهی، نسبت به x، متقارب یکنواخت است و مجموع‌های جزئی آن به‌وسیلهٔ $\frac{c}{1+x^2}$ محدود می‌شوند، بنابراین، انتگرال‌گیری جمله به‌جمله مجاز است (قضیهٔ ۱).

اکنون، اگر مقدار این انتگرال را مورد استفاده قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$I_1=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_0^\infty r^\nu e^{-\nu\beta}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-re^{-\beta}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^\beta}{e^\beta-r}$$

(b). راهنمائی. از بسط زیر آغاز کنید [۴۶۱، ۶)، (b)]:

$$\ln(1-2r\cos\beta x+r^2)=-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r^\nu}{\nu}\cos\nu\beta x$$

پاسخ: $I_2=\pi\cdot\ln(1-re^{-\beta})$.

۶) انتگرال‌های لاپلاس

$$\text{(a)}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx,\quad \text{(b)}\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{ch}2bx\,dx,$$

---

*) این بسط، به‌سادگی و از بسط‌های ۱۰) و ۱۱) شمارهٔ ۴۴۰ حاصل می‌شود.

$$(c)\ \int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2bx\,dx$$

را به‌رشته‌هایی برحسب توان‌های b $(b>0)$ بسط دهید. ضمناً، درهمهٔ حالت‌ها، انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

را معلوم به‌حساب آورید [۴۹۲، ۲°].

حل. (a). با استفاده از بسط معلوم کسینوس و با انتگرال گیری جمله به‌جمله به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\int_0^\infty e^{-x^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(2bx)^{2\nu}}{(2\nu)!}dx=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(2b)^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2\nu}dx$$

تقارب یکنواخت رشته، در بازهٔ متناهی دلخواه $[0, A]$ واضح است. مجموع‌های جزئی آن، به‌وسیلهٔ

$$e^{-x^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2bx)^\nu}{(2\nu)!}=e^{-x^2}\operatorname{ch}2bx$$

محدود می‌شوند که از ۰ تا ∞ انتگرال‌پذیر است، در نتیجه، انتگرال گیری جمله به‌جمله تایید می‌شود.

می‌ماند تعیین انتگرال $\int_0^\infty e^{-x^2}.x^{2\nu}dy=I_\nu$. با انتگرال گیری جزء به‌جزء، به‌سادگی به‌دستور بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$I_\nu=\frac{2\nu-1}{2}I_{\nu-1}\Rightarrow I_\nu=\frac{(2\nu-)!!}{2^{\nu+1}}\sqrt{\pi}$$

که اگر در بسط حاصل قبلی قرار دهیم، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(2b)^{2\nu}}{(2\nu)!}\cdot\frac{(2\nu-1)!!}{2^\nu}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\left\{۱+\sum_{\nu=۱}^{\infty}\frac{(-b^۲)^\nu}{\nu!}\right\}=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}e^{-b^۲}.$$

(b). پاسخ. $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}e^{-b^۲}$.

(c) به‌ترتیب مشابهی، این بسط به‌دست می‌آید:

$$\int_۰^{\infty}e^{-x^۲}\sin ۲bx\,dx=b\sum_{\nu=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲\nu-۱)!!}(-۲b^۲)^{\nu-۱}$$

ولی این‌بار، به‌دستوری «متناهی» تبدیل نمی‌شود. بعداً، با روش دیگری، خصوصیت تابع جدید را (که تابعی غیرمقدماتی است) شرح می‌دهیم، خصوصیتی که برای بیان انتگرال، لازم است [۵۲۳، ۵)، (b)].

۷) مقدار انتگرال زیررا پیداکنید ($k=۱, ۲, ۳, \dots$):

$$I_k=\int_۰^{\infty}\frac{x^{۲k-۱}}{e^{۲\pi x}-۱}dx$$

حل. با بسط

$$\frac{۱}{e^{۲\pi x}-۱}=\frac{e^{-۲\pi x}}{۱-e^{-۲\pi x}}$$

به‌تصاعد، رشتهٔ مثبت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^{۲k-۱}}{e^{۲\pi x}-۱}=\sum_{n=۱}^{\infty}x^{۲k-۱}\cdot e^{-۲n\pi x}$$

که به‌طوریکنواخت در بازهٔ دلخواه $[\eta, A]$ $(۰<\eta<A<+\infty)$ متقارب می‌شود. چون مجموع رشته، در بازهٔ $[۰, +\infty]$، انتگرال‌پذیر است، بنابراین، می‌توان جمله به‌جمله انتگرال گرفت:**

$$I_k=\sum_{n=۱}^{\infty}\int_۰^{\infty}x^{۲k-۱}e^{-۲n\pi x}dx=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۲k-۱)!}{(۲n\pi)^{۲k}}=\frac{(۲k-۱)!}{(۲\pi)^{۲k}}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲k}}$$

---

*) از تبدیل واضح زیراستفاده کرده‌ایم،

$$(۲\nu)!=(۲\nu)!!(۲\nu-۱)!!=۲^\nu\nu!(۲\nu-۱)!!$$

**) هم دراین‌جا وهم درتمرین بعد، از قضیهٔ ۱ وقضیهٔ ۱′ شمارهٔ پیش و، مثلاً، با به‌کاربردن جداگانهٔ آن‌ها، در بازه‌های $[۱, +\infty]$ و $[۰, ۱]$، استفاده می‌کنیم.

یا به‌یادآوردن عدد kام برنولی B_k،

$$B_k=\frac{۲\cdot(۲k)!}{(۲\pi)^{۲k}}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲k}}$$

[۴۴۹]، سرآخر به‌دست می‌آید:

$$I_k=\frac{B_k}{۴k}$$

۸) مقدار انتگرال‌های زیر را پیدا کنید (لژاندر):

$$\text{(a)}\quad \int_{۰}^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{۲\pi x}-۱}dx,\qquad \text{(b)}\quad \int_{۰}^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{۲\pi x}+۱}dx\quad (m>۰)$$

حل. (a). بسط

$$\frac{\sin mx}{e^{۲\pi x}-۱}=\sum_{\nu=۱}^{\infty}e^{-۲\nu\pi x}\sin mx$$

به‌طور یکنواخت، در بازهٔ دلخواه $[\eta, A]$ متقارب است و مجموع‌های جزئی آن به‌وسیلهٔ تابع $\frac{|\sin mx|}{e^{۲\pi x}-۱}$ محدود می‌شود. بنابراین، می‌توان جمله به‌جمله انتگرال گرفت.

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{۲\pi x}-۱}dx=\sum_{\nu=۱}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}e^{-۲\nu\pi x}\sin mx\,dx=$$

$$=\sum_{\nu=۱}^{\infty}\frac{m}{m^{۲}+۴\nu^{۲}\pi^{۲}}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{e^{m}-۱}-\frac{۱}{m}+\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}\cdot\frac{e^{m}+۱}{e^{m}-۱}-\frac{۱}{۲m}\ ^{*}$$

(b). به‌طرز مشابهی (با استفاده از همان محدودکننده)، به‌دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin mx}{e^{۲\pi x}+۱}dx=\sum_{\nu=۱}^{\infty}(-۱)^{\nu-۱}\frac{m}{m^{۲}+۴\nu^{۲}\pi^{۲}}=\frac{۱}{۲m}-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{e^{\frac{m}{۲}}-e^{-\frac{m}{۲}}}\ ^{*}$$

یادداشت. جست و جوی مقدار انتگرال‌های مفروض، از راه بسط $\sin mx$ به‌رشته هم، امری طبیعی بود. مثلاً در حالت (a)، به‌انتگرال مطرح در ۷) می‌رسیدیم و، برای

---

*) این نتیجه‌ها، از بسط تابع‌های $\operatorname{cth} x$ و $\frac{۱}{\operatorname{sh} x}$ [۴۴۱، (۱۰)] به‌کسرهای ساده، حاصل می‌شود.

به‌دست آوردن نتیجهٔ نهائی، می‌توانستیم از بسط معلوم زیر استفاده کنیم:

$$\frac{۱}{e^m-۱}-\frac{۱}{m}+\frac{۱}{۲}=\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^{k-۱}.\frac{B_k}{(۲k)!}.m^{۲k-۱}$$

[۴۴۹]. ولی این روش، نارسائی‌هایی دارد، زیرا مستلزم فرض $m<۲\pi$ است، درحالی که نتیجه برای m دلخواه درست است.

۹) اگر در دستور مقدماتی [با ۴۹۲، ۲° مقایسه کنید]

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{(۱+x^۲)^n}=\frac{(۲n-۳)!!}{(۲n-۲)!!}.\frac{\pi}{۲}$$

قرار دهیم $x=\frac{z}{\sqrt{n}}$، به‌دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{dz}{\left(۱+\frac{z^۲}{n}\right)^n}=\frac{(۲n-۳)!!}{(۲n-۲)!!}\sqrt{n}.\frac{\pi}{۲}$$

تابع $\frac{۱}{\left(۱+\frac{z^۲}{n}\right)^n}$، باصعود n، نزولی یکنواست و به سمت حد $e^{-z^۲}$ میل می‌کند. با تکیه به‌نتیجهٔ شمارهٔ ۵۱۸ (که برای تابع‌های نزولی یکنوا هم دارای اعتبار است)، می‌توان از دستور والیس [۳۱۷] استفاده کرد و سرانجام، به‌این‌نتیجه رسید:

$$\int_{۰}^{\infty}e^{-z^۲}dz=\lim_{n\to\infty}\int_{۰}^{\infty}\frac{dz}{\left(۱+\frac{z^۲}{n}\right)^n}=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

[با ۴۹۲، ۲° مقایسه کنید].

۱۰) اگر در انتگرال معلوم فه‌یر [۳۰۹، ۵)، (b)]:

$$\frac{۱}{n}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{\sin nz}{\sin z}\right)^۲dz=\frac{\pi}{۲}$$

قرار دهیم $z=\frac{x}{n}$، می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

عبور به‌حد، به‌ازای $n \to \infty$، ازآن‌جهت در این‌جا مشکل است که نه‌تنها تابع زیر انتگرال، بلکه مرز بالایی انتگرال هم، به‌پارامتر بستگی دارد.

ولی با فرض

$$f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\right)^2 \qquad \left(\text{برای } 0 \leqslant x \leqslant n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

و

$$f_n(x) = 0 \qquad (\text{برای بقیهٔ مقدارهای } x)$$

می‌توان نوشت:

$$\int_0^{\infty} f_n(x)dx = \frac{\pi}{2} \tag{۷}$$

روشن است که برای هر مقدار $x > 0$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

ضمناً، نزدیک‌شدن تابع $f_n(x)$ به‌حد خودش، در بازهٔ متناهی دلخواه $[0, A]$، یکنواخت است. از طرف دیگر، معلوم است که برای $0 < z \leqslant \pi$ داریم:

$$\frac{\sin z}{z} \geqslant \frac{2}{\pi}$$

بنابراین، برای $0 < x \leqslant n\cdot\frac{\pi}{2}$:

$$f_n(x) \leqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

این نابرابری برای $x > n\cdot\frac{\pi}{2}$ هم برقرار است، زیرا درآن‌صورت داریم: $f_n(x) = 0$.

با به‌کار بردن قضیهٔ ۱ شمارهٔ **۵۱۸**، می‌توان در برابری (۷)، زیر علامت‌انتگرال، به‌ازای $n \to \infty$، به‌حد گذشت، که ما را به‌نتیجه می‌رساند:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

[با **۴۹۴**، ۴)، **۴۹۷**، ۱۵) مقایسه کنید].

۱۱) مثال دیگری از همان نوع، معلوم است [**۴۴۰**، ۱۰)] که

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos mx}{1 - 2r\cos x + r^2} dx = \pi\cdot\frac{r^m}{1 - r^2}$$

که در آن، m عددی است طبیعی و $|r| < 1$. در این‌جا، $x = \frac{z}{m}$ و $\varepsilon = 1 - \frac{h}{m}$ $(h > 0)$ می‌گیریم. با در نظر گرفتن $m > h$ به‌دست می‌آید:

$$\int_0^{m\pi} \frac{\cos z\, dz}{h^2 + 2m^2\left(1 - \cos\frac{z}{m}\right)\left(1 - \frac{h}{m}\right)} =$$

$$= \int_0^{m\pi} \frac{\cos z\, dz}{h^2 + z^2\left(\frac{\sin\frac{z}{2m}}{\frac{z}{2m}}\right)^2\left(1 - \frac{h}{m}\right)} = \frac{\pi}{h}\cdot\frac{\left(1 - \frac{h}{m}\right)^m}{2 - \frac{h}{m}}$$

در این‌جا، گذر به‌حد به‌ازای $m \to \infty$ «در زیر علامت انتگرال» مانعی ندارد، زیرا مرز بالایی همراه با m صعود می‌کند (و ما آن‌را با ∞ عوض می‌کنیم)، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos z}{h^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2h} e^{-h}$$

ولی آیا این درست است؟ می‌کوشیم تا این‌گذر حدی را مستند کنیم.

در این‌جا هم، این تابع را وارد می‌کنیم:

$$f_m(z)=\frac{\cos z}{h^2+z^2\left(\dfrac{\sin\dfrac{z}{2m}}{\dfrac{z}{2m}}\right)^2\left(1-\dfrac{h}{m}\right)} \quad (\text{برای } 0\leqslant z\leqslant m\pi)$$

$$f_m(z)=0 \quad (\text{برای } z>m\pi)$$

به‌نحوی که سمت چپ برابری مورد نظر ما، این‌طور نوشته می‌شود:

$$\int_0^\infty f_m(z)dz$$

روشن است که

$$\lim_{m\to\infty} f_m(z)dz=\frac{\cos z}{h^2+z^2}$$

ضمناً، در بازهٔ متناهی، این میل به‌طور یکنواخت انجام می‌گیرد. تابع

$$\frac{1}{h^2+\dfrac{4}{\pi^2}z^2\left(1-\dfrac{h}{m_0}\right)}$$

را هم، با شرط $h>m_0$ و در نظر گرفتن مقدارهای $m\geqslant m_0$، می‌توان به‌عنوان محدود کننده در نظر گرفت. می‌ماند که به قضیهٔ ۱ شمارهٔ **۵۱۸** استناد کنیم.

۱۲) لزوم مستند کردن عبور حدی در مثال‌های ۱۰) و ۱۱)، با توجه به‌مثال زیر، که با آن‌ها شباهت دارد، روشن می‌شود. منتهی در این مثال، نمی‌توان این استناد را پیدا کرد و، بنابراین، از عبور حدی، که قابل تایید به‌کمك استدلال نیست، نمی‌توان استفاده کرد.

به‌این انتگرال توجه کنیم:

$$I_n=\int_0^n \frac{n}{n^2+x^2}dx$$

اگر در آن، شبیه مثال‌های قبل عمل کنیم، با میل n به‌سمت ∞ خواهیم داشت:

$$\text{حد } I_n=\int_0^\infty 0\cdot dx=0$$

درحالی که، به‌کمك تغییر متغیر، به‌سادگی معلوم می‌شود که انتگرال I_n، مقدار ثابت $\frac{\pi}{۴}$ را حفظ می‌کند.

دو مثال غیرعادی دیگر هم می‌آوریم. این‌ها، به‌طوری که خواهیم دید، از جهت دیگری جالب‌اند.

۱۳) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$I=\int_{۰}^{\infty} e^{a\cos x}\sin(a\sin x)\frac{dx}{x}$$

که در آن، a عددی دلخواه‌است [با ۴۷۸، ۸)، (a) مقایسه کنید]؛ با فرض این‌که انتگرال

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{۲}$$

برای ما معلوم باشد [۴۹۲، ۳°؛ ۴۹۴، ۵) را ببینید].

راحت‌تر است که متغیر مختلط را وارد کنیم:

$$z=a(\cos x+i\sin x)$$

آن‌وقت [۴۵۷، (۶)]

$$e^{z}=e^{a\cos x}[\cos(a\sin x)+i\sin(a\sin x)]$$

به‌دنبالهٔ زیر بسط می‌یابد:

$$۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a^{n}(\cos nx+i\sin nx)}{n!}$$

با برابر کردن بخش‌های موهومی، بسط عبارتی را به‌دست می‌آوریم که عامل اول زیر علامت انتگرال است:

$$e^{a\cos x}\sin(a\sin x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a^{n}}{n!}\sin nx$$

از این‌جا

$$I=\int_{۰}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a^{n}}{n!}\cdot\frac{\sin nx}{x}dx$$

اگر در این‌جا می‌توانستیم انتگرال‌گیری را جمله به‌جمله انجام دهیم، بلافاصله به‌دست می‌آمد:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\int_0^{\infty}\frac{\sin nx}{x}dx=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=\frac{\pi}{2}(e^a-)$$

ولی، مستندکردن این حق، در این‌جا، به‌صورت خاصی انجام می‌گیرد.

از آن‌جاکه رشتهٔ واقع در زیر علامت انتگرال، با رشتهٔ ثابت زیر محدود می‌شود:

$$a\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a^\nu}{\nu!}$$

بنابراین، انتگرال‌گیری جمله به‌جمله را می‌توان در بازهٔ متناهی $[0, A]$ انجام داد:

$$\int_0^A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\cdot\frac{\sin nx}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\int_0^A\frac{\sin nx}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\int_0^{nA}\frac{\sin t}{t}dt \qquad (۸)$$

می‌ماند گذر به‌حد به‌ازای $A\to\infty$. ولی، به‌سادگی دیده می‌شود که، با توجه به‌این‌که انتگرال $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ وجود دارد، انتگرال $\int_0^{t_0}\frac{\sin t}{t}dt$، برای همهٔ مقدارهای $t_0\geqslant 0$، به‌طور یکنواخت کران‌دار می‌شود:

$$\left|\int_0^{t_0}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leqslant L$$

آن‌وقت، رشتهٔ (۸)، که جمله‌های آن وابسته به‌متغیر A هستند، با رشتهٔ ثابت

$$L\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^n}{n!}$$

محدود می‌شود و، در نتیجه، نسبت به A، به‌طور یکنواخت متقارب است. درچنین حالتی، با توجه به‌قضیه‌ای‌که برای‌ما معلوم است [۴۳۳]، می‌توان در آن، به‌ازای $A\to\infty$، جمله به‌جمله به‌سمت حد عبور کرد و، به‌این ترتیب، به‌اثبات مورد نظر خود رسیدیم.

۱۴) مثال دیگری از همان نوع. فرض کنیم رشتهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$$

متقارب باشد و برای $x\geqslant 0$ فرض می‌کنیم:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n.\frac{x^n}{n!}$$

این‌رشته هم متقارب است و، ضمناً این‌تقارب، در بازهٔ متناهی دلخواه $[A\ ,0]$، نسبت‌به‌x یکنواخت است [از روی معیار آبل ـ دیریکله؛ ۴۳۰ را ببینید]، زیرا عامل $\frac{x^n}{n!}$، دست‌کم برای $n>A$، با صعود n نزول می‌کند.

در این‌صورت، ثابت‌کنید اگر در

$$\int_0^{\infty} e^{-x}g(x)dx=s \qquad (۹)$$

جمله‌به‌جمله انتگرال‌گیری کنیم، بلافاصله به‌نتیجه می‌رسیم:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n.\frac{a^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\int_0^{\infty} e^{-x}.x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n=s$$

زیرا $\int_0^{\infty} e^{-x}.x^n dx=n!$ [۴۸۹، ۴)]. حالا به‌اثبات درستی این عمل می‌پردازیم.

مثل مورد قبل، در این‌جا هم، انتگرل گیری جمله‌به‌جمله، در یك بازهٔ متناهی، مجاز است:

$$\int_0^{A} e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n.\frac{x^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n.\frac{1}{n!}\int_0^{A} e^{-x}.x^n dx \qquad (۱۰)$$

با انتگرال‌گیری جمله‌به‌جمله، به‌سادگی، ثابت می‌شود که

$$\frac{1}{n!}\int_0^{A} e^{-x}.x^n dx<\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{A} e^{-x}.x^{n-1}dx<1$$

به‌نحوی که عامل

$$\frac{1}{n!}\int_0^{A} e^{-x}.x^n dx$$

که به A و n بستگی دارد و باصعود n (به‌ازای $A=\text{const}$.) به‌طوریکنوا نزول‌می‌کند، به‌طور یکنواخت کران‌دار باقی می‌ماند. دراین‌حالت (از روی معیاری که هم‌اکنون ثابت

کردیم)، رشتهٔ سمت راست (۱۰)، نسبت بـه A، متقارب یکنواخت می‌شود، یعنی در آن می‌توان، به‌ازای $A \to \infty$، جمله‌به‌جمله به‌حد گذشت.

دو مثال، برای کاربرد دستور ظریف (۹)، بیاوریم.

(a) به‌اصطلاح سینوس انتگرالی را در نظر می‌گیریم:

$$-\operatorname{si} x = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3!3} - \frac{x^5}{5!5} + \dots *$$

این رشته، از روی نوع $g(x)$ تشکیل می‌شود. با آغاز از رشتهٔ

$$\frac{\pi}{2} - 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{5} + \dots$$

بنابر دستور (۹)، به‌دست می‌آید:

$$-\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{si} x\, dx = \frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(b) یك مثال جالب دیگر. تابع بسل با اندیس صفر $J_0(x)$ دارای این بسط است [۴۴۱، ۴)، ۵)]:

$$J_0(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(\nu!)^2 \cdot 2^{2\nu}}$$

که از روی نوع $g(x)$ تشکیل می‌شود. اگر فرض کنیم:

$$a_0 = 1,\quad a_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!},\quad a_{2\nu-1} = 0$$

آن‌وقت بنابر (۹)

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot J_0(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

نتیجهٔ اخیر به‌این ترتیب به‌دست می‌آید که در بسط تابع $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ به‌رشتهٔ دو جمله‌ای

---

*) این بسط به‌سادگی درمی‌آید، اگر بنویسیم،

$$-\operatorname{si} x = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

و در انتگرال دوم، به‌جای سینوس، بسط آن‌را به‌صورت رشته بنویسیم و، سپس، جمله‌به‌جمله انتگرال بگیریم.

[۴۰۷، (۲۴)] بگذاریم: $x=1$.

یادداشت. این مطلب آموزنده است که ببینیم، چه خصوصیتی در روش استدلال دو مثال اخیر، در مقایسه با مثال‌های دیگری که برای انتگرال‌گیری جمله‌به‌جمله در بازه‌های نامتناهی آوردیم، وجود دارد؟

اگر به‌مسألهٔ کلی مربوط به‌انتقال حد به‌زیرعلامت انتگرال با مرزنامتناهی برگردیم [۵۱۸] در آن‌صورت، با مسألهٔ مربوط به‌وجود و برابری دو حد تکراری برای یك تابع $F(A, y)$ از دو آوند، هم ارز می‌شود [(۳) را ببینید]. در این مورد، بنابر قضیهٔ کلی شمارهٔ ۵۰۵، شرط کافی عبارت است از ــ ضمن وجود هر دو حد ساده ــ میل یکنواخت تابع به‌سمت یکی از آن‌ها، (۴) یا (۵)، و ضمناً بی‌تفاوت نسبت به‌هرکدام از این‌میل‌ها. ما معمولاً، این یکنواختی را نسبت‌به (۵) در نظر می‌گرفتیم، که نظیر «تقارب یکنواخت انتگرال» بـا مرز بی‌نهایت هم بود، ولی اگر به‌جای آن، نزدیك‌شدن یکنواخت تابع F به‌حد (۴) را هم در نظر بگیریم، تمامی نتیجه به‌قوت خود باقی می‌ماند.

در حالت رشتهٔ $\sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ با مجموع‌های جزئی $f_n(x)$، یـا می‌توان نزدیك‌شدن یکنواخت (نسبت به n) تابع

$$F_n(A)=\int_a^A f_n(x)dx$$

را به حد $\int_a^{\infty} f_n(x)dx$ به‌ازای $A\to\infty$، یعنی «تقارب یکنواخت» این انتگرال‌ها را ثابت کرد، کاری که معمولاً انجام می‌دهیم؛ و یا به‌یکنواختی (نسبت به A) نزدیك‌شدن این تابع، به ازای $n\to\infty$، بـه حد $\int_a^A \varphi(x)dx$، یعنی به‌تقارب یکنواخت (نسبت به A) برای رشتهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^A u_n(x)dx=\int_a^A \varphi(x)dx$$

متقاعد شدکه، در تمرین‌های ۱۳) و ۱۴) می‌توانست مفید باشد.

۵۲۰. پیوستگی و مشتق‌پذیری انتگرال‌ها نسبت به‌پارامتر. در این‌جـا هم، ابتدا، به‌انتقال قضیه‌های ۲ و ۳ شماره‌های ۵۰۶ و ۵۰۷، باحالت نامتناهی، بپردازیم.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم، تابع $f(x, y)$ (به‌عنوان تابعی با دو متغیر)، برای مقدارهای $x \geqslant a$ و مقدارهای y در بازهٔ $[c, d]$، معین و پیوسته باشد. اگر انتگرال

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)dx \qquad (۱)$$

نسبت به y و در بازهٔ $[c, d]$، متقارب یکنواخت باشد، در آن صورت، تابع مفروض، تابعی پیوسته از پارامتر y در این بازه خواهد بود.

این، نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱ است. درواقع، همان‌طور که در **۵۰۶** دیدیم، با تغییر x در بازهٔ متناهی دلخواه $[a, A]$، تابع $f(x, y)$، به‌ازای $y \to y_0$ (y_0، مقدار خاص دلخواهی از y است)، به‌طور یکنواخت نسبت به x، به‌سمت تابع حدی $f(x, y_0)$ میل می‌کند. آن‌وقت، ازروی قضیهٔ ۱، می‌توان در انتگرال (۱)، زیر علامت انتگرال به‌سمت حد رفت:

$$\lim_{y \to y_0} I(y)=\lim_{y \to y_0} \int_a^{\infty} f(x, y)dx=\int_a^{\infty} f(x, y_0)dx=I(y_0)$$

که حکم ما را ثابت می‌کند.

در شمارهٔ **۴۸۵**، ضمن شرح روش‌هایی که به‌کمک آن‌ها «مقدارهای تعمیم‌یافتهٔ» انتگرال‌های متباعد را بررسی کردیم، مسألهٔ مربوط به‌منتظم بودن روش دوم را، حل‌نشده باقی گذاشتیم. به‌کمک قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت کردیم، می‌توانیم این نقص را برطرف کنیم. اگر انتگرال $\int_0^{\infty} f(x)dx$ متقارب باشد، آن‌وقت $\int_0^{\infty} e^{-kx} f(x)dx$، نسبت به پارامتر k برای $k \geqslant 0$، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود [یادداشت آخر شمارهٔ **۵۱۵** را ببینید] و، در نتیجه، دست‌کم درحالت پیوستگی $f(x)$، به‌صورت تابع پیوسته‌ای از پارامتر k برای $k \geqslant 0$ درمی‌آید. به‌ویژه داریم:

$$\lim_{k \to +0} \int_0^{\infty} e^{-kx} f(x)dx=\int_0^{\infty} f(x)dx$$

به‌این ترتیب، مقدار انتگرال متقارب، بر «مقدار تعمیم‌یافتهٔ» آن منطبق می‌شود که به‌معنای منتظم بودن آن است.

یادداشت. درحالتی که تابع $f(x, y)$ نامنفی باشد: $f(x, y) \geqslant 0$، به‌معنایی، قضیهٔ عکس‌هم برقرار است: ازپیوستگی انتگرال (۱)، به‌عنوان تابعی از پارامتر، یکنواختی

تقارب آن نتیجه می‌شود.

در این حالت، تابع پیوستهٔ نسبت به y

$$F(A, y)=\int_a^A f(x, y)dx \qquad (۳)$$

با صعود A، صعود می‌کند و، در نتیجه (با توجه به‌قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ دینی، ۵۰۴، ۴°)، به‌طور یکنواخت نسبت به y، به‌سمت حد خود (۱)، میل می‌کند. آن‌چه لازم بود، ثابت شد.

قضیهٔ ۳. تابع $f(x, y)$ را معین و پیوسته نسبت به x، برای $x \geqslant a$ و y در $[c, d]$ می‌گیریم. علاوه برآن فرض می‌کنیم که، این تابع، برای مقدارهای مذکور، دارای مشتق پیوستهٔ $f'_y(x, y)$ نسبت به‌هردو متغیر باشد. ضمناً، انتگرال (۱) را، برای همهٔ yها در $[c, d]$ متقارب و انتگرال

$$\int_a^\infty f'_y(x, y)dx \qquad (۱۱)$$

را نسبت به y در همان بازه، متقارب یکنواخت می‌گیریم. آن‌وقت، به‌ازای y دلخواه از $[c, d]$، دستور زیر برقرار است:

$$I'(y)=\int_a^\infty f'_y(x, y)dx^*$$

با اختیار مقدار خاص $y=y_0$، نسبت

$$\frac{I(y_0+k)-I(y_0)}{k}=\int_a^\infty \frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}dx \qquad (۱۲)$$

را درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که، در این‌جا، گذر حدی نسبت به‌پارامتر $k \to 0$، زیر علامت انتگرال مجاز است.

قبلاً، در ۵۰۷، دیدیم که اگر x در بازهٔ متناهی دلخواه $[a, A]$ تغییر کند، تابع زیر انتگرال $\dfrac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}$، به‌ازای $k \to 0$، نسبت به x به‌سمت تابع حدی $f'_y(x, y)$، به‌طور یکنواخت میل می‌کند. برای آن‌که حق به‌کار بردن قضیهٔ ۱ را داشته باشیم، لازم است که از تقارب یکنواخت انتگرال (۱۲) نسبت به k، اطمینان پیدا کنیم.

---

*) محاسبهٔ مشتق ازروی این دستور را، قاعدهٔ لایب‌نیتس گویند.

با توجه به‌فرض تقارب یکنواخت انتگرال (۱۱)، ازروی $\varepsilon>0$ دلخواه، چنان $A_0\geqslant a$ پیدا می‌شود که تنها با شرط $A'>A>A_0$، نابرابری

$$\left|\int_A^{A'} f'_y(x, y)dx\right|<\varepsilon \qquad (۱۳)$$

برای همهٔ yها برقرار باشد [۵۱۴]. ثابت می‌کنیم که درعین‌حال، نابرابری

$$\left|\int_A^{A'} \frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}dx\right|<\varepsilon \qquad (۱۴)$$

هم، برای همهٔ مقدارهای ممکن k، برقرار است.

برای این منظور (با تثبیت A و A')، تابع زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\Phi(y)=\int_A^{A'} f(x, y)dx$$

مشتق این تابع، با توجه به‌قضیهٔ ۳ شمارهٔ ۵۰۷ ازروی قاعدهٔ لایب‌نیتس محاسبه می‌شود:

$$\Phi'(y)=\int_A^{A'} f'_y(x, y)dx$$

وبا توجه به (۱۳)، همیشه ازلحاظ قدرمطلق، کوچکتر از ε است. ولی آن‌وقت، نسبت

$$\frac{\Phi(y_0+k)-\Phi(y_0)}{k}=\int_A^{A'} \frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k}dx$$

هم‌که، با توجه به‌دستور لاگرانژ، برابر است با $\Phi'(y_0+\theta k)$، از لحاظ قدرمطلق، کوچکتر از ε خواهد شد، یعنی (۱۴) برقرار است. ازاین‌جا، بنابرمعیار شمارهٔ ۵۱۴، تقارب یکنواخت انتگرال (۱۲) نتیجه می‌شود، که اثبات را هم به‌انجام می‌رساند.

تعمیم قضیه‌های *۲ و *۳ شمارهٔ ۵۱۰ مربوط به بازهٔ متناهی $[a, b]$ هم، به‌سادگی به‌دست می‌آید.

تنها این می‌ماند که، بدون تغییر اساسی درتنظیم بحث‌های گذشته، نقطهٔ $x=\infty$ را جانشین نقطهٔ $x=b$ کنیم (همان‌طور که، مثلاً، درمورد انتقال ازقضیهٔ ۱ به‌قضیهٔ ۱′ انجام شد).

یادداشت. درنظریه‌ای که به‌شرح آن پرداختیم، ازبستگی انتگرال‌ها با رشته‌ها، استفاده نکردیم وترجیح دادیم، ازاندیشه‌ای استفاده کنیم که، درواقع، ریشهٔ همهٔ استنتاج‌ها است، یعنی اندیشهٔ میل یکنواخت به‌سمت تابع حدی. ولی، دربرخی حالت‌ها، ممکن‌است

استناد به‌نظریهٔ پیش‌رفتهٔ رشته‌ها، موجبی برای کوتاه‌ترشدن بحث‌ها باشد. این مطلب را، با دادن اثبات‌تازه‌ای ازقضیهٔ ۳، روشن‌می‌کنیم (جایی‌که به‌صورت قابل‌ملاحظه‌ای، بحث‌ها کوتاه‌تر می‌شوند).

انتگرال $I(y)$ را، بارشتهٔ زیرعوض می‌کنیم [۴۷۷]

$$I(y)=\sum_{1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)dx \quad (A_n \to \infty).$$

جمله‌های این رشته

$$u_n(y)=\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y)dx$$

بنابرقضیه‌های ۲ و ۳ شماره‌های ۵۰۶ و ۵۰۷، پیوسته ودارای مشتق‌های پیوسته‌اند:

$$u_n'(y)=\int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y'(x, y)dx$$

رشته‌ای هم‌که ازاین‌مشتق‌ها تشکیل می‌شود، نسبت به y دربازهٔ $[c, d]$، متقارب‌یکنواخت است، همان‌طورکه ازتقارب یکنواخت انتگرال (۱۱) [۵۱۴] برمی‌آید. دراین صورت، با توجه به‌قضیهٔ مربوط به‌مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ رشته‌ها [۴۳۵]، مشتق

$$I'(y)=\sum_{1}^{\infty}u_n'(y)=\sum_{1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f_y'(x, y)dx=\int_{a}^{\infty} f_y'(x, y)dx$$

وجود داردکه مورد نیازما را هم ثابت می‌کند.

ازهمین روش، برای اثبات قضیه‌های ۱ و ۲ شماره‌های ۵۱۸ و ۵۲۰ (و همچنین قضیهٔ ۴ ازشمارهٔ ۵۲۱) هم، می‌توان بااستناد به‌قضیه‌های نظیر از نظریهٔ رشته‌های تابعی، استفاده‌کرد. این اثبات‌ها را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۵۲۱. انتگرال‌گیری انتگرال‌ها نسبت به‌پارامتر. ابتدا قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۴. با همان فرض‌های قضیهٔ ۲، این رابطه برقرار است:

$$\int_{c}^{d} I(y)dy=\int_{c}^{d} dy\int_{a}^{\infty} f(x, y)dx=\int_{a}^{\infty} dx\int_{c}^{d} f(x, y)dy \quad (۱۵)$$

درواقع، ازروی قضیهٔ ۴ شمارهٔ ۵۰۸، برای $A \geqslant a$ متناهی دلخواه، این برابری

درست است:

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x, y)dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)dy$$

ولی بنابه‌فرض، تابع (۳) که‌نسبت به y پیوسته است، به‌ازای $A \to \infty$ به‌طوریکنواخت نسبت به y، به‌سمت حد (۱) خود میل می‌کند. درنتیجه، ازروی قضیهٔ ۱ شمارهٔ ۵۰۶، در انتگرال سمت‌چپ، ازروی $A \to \infty$، می‌توان در زیرعلامت انتگرال به‌حد گذشت، یعنی

$$\lim_{A \to \infty} \int_c^d dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_c^d dx \int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

دراین‌حالت، حد انتگرال‌سمت‌راست هم، به‌ازای $A \to \infty$، وجود دارد، یعنی‌انتگرال

$$\int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)dy$$

وجود دارد ودارای همان مقدار است، چیزی‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

اگر ازیادداشت قضیهٔ ۲ [۵۲۰] استفاده شود، به‌سادگی، به‌این نتیجه می‌رسیم.

نتیجه. درحالت تابع نامنفی $f(x, y)$، تنها پیوستگی انتگرال (۱)، منجر به‌دستور (۱۵) می‌شود.

به‌این‌ترتیب توانستیم، با توجه به‌شرط‌های معلوم، حق جابه‌جاکردن دوانتگرال‌را به‌دست آوریم، که درآن‌ها، تنها یکی در بازهٔ نامتناهی ودیگری در بازه‌ای متناهی قرار داشت.

ضمناً، دربسیاری موردها، برای جابه‌جاکردن انتگرال‌هایی‌که، هردو در بازه‌ای نامتناهی باشند، از دستور زیراستفاده می‌شود:

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)dy \qquad (۱۶)$$

تایید درستی این جابه‌جایی، اغلب‌کاری دشوارو پیچیده است وخواننده می‌تواندموردهای آن را، ضمن مثال‌های متعددی‌که خواهیم آورد، پیدا کند.

تنها دربارهٔ طبقهٔ محدودی از حالت‌ها، می‌توان دستور (۱۶) را با ملاحظه‌هایی همراه کرد.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم، تابع $f(x, y)$، برای $x \geqslant a$ و $y \geqslant c$، معین و پیوسته‌باشد.

به‌جزآن، فرض می‌کنیم هردو انتگرال

$$\int_a^\infty f(x, y)dx \quad و \quad \int_c^\infty f(x, y)dy \qquad (۱۷)$$

متقارب یکنواخت باشند : اولی نسبت به y و دومی نسبت به x (در بازهٔ متناهی دلخواه). آن‌وقت اگر دست‌کم یکی از انتگرال‌های تکراری

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty |f(x, y)|dx, \quad \int_a^\infty dx\int_c^\infty |f(x, y)|dy \qquad (۱۸)$$

وجود داشته باشد، درآن صورت، انتگرال‌های (۱۶) وجود دارند و برابرند.

فرض کنیم، از انتگرال‌های (۱۸)، دومی وجود داشته باشد: با توجه به‌تقارب یکنواخت انتگرال $\int_a^\infty f\,dx$، ازروی قضیهٔ قبل، برای $C > c$ متناهی دلخواه، خواهیم داشت:

$$\int_c^C dy\int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx\int_c^C f(x, y)dy$$

می‌ماند ثابت کنیم که، درانتگرال سمت راست، گذر به‌حد درزیر علامت انتگرال، به‌ازای $C \to \infty$، مجاز است؛ زیرا در آن صورت داریم:

$$\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x, y)dx = \lim_{C\to\infty}\int_c^C dy\int_a^\infty f(x, y)\,dx =$$

$$= \lim_{C'\to\infty}\int_a^\infty dx\int_c^C f(x, y)dy = \int_a^\infty dx\cdot\lim_{C\to\infty}\int_c^C f(x, y)dy =$$

$$= \int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x, y)dy$$

تأیید درستی این گذر به‌حد، با اتکای به‌قضیهٔ ۱ [۵۱۸] ممکن است. تابع (از x و C)

$$\int_c^C f(x, y)dy$$

که نسبت به x پیوسته است [قضیه ۲، ۵۰۶]، به ازای $C \to \infty$، نسبت به x و دربازهٔ

متناهی دلخواه، به‌طور یکنواخت به‌سمت تابع حدی

$$\int_c^{\infty} f(x, y)dy$$

میل می‌کند. انتگرال

$$\int_a^{\infty} dx \int_c^{C} f(x, y)dy$$

هم، نسبت به C، متقارب یکنواخت است، زیرا به وسیلهٔ انتگرال دوم از انتگرال‌های (۱۸) محدود می‌شود:

$$\left|\int_c^{C} f(x, y)dy\right| \leqslant \int_c^{\infty} |f(x, y)|dy$$

به‌این‌ترتیب، همهٔ شرط‌های قضیهٔ ۱ برقرارند وحکم موردنظر ما تأیید می‌شود.

درمورد تابعی که علامت عوض نمی‌کند، کار کمی ساده‌تر می‌شود. مثلاً، برای تابع نامنفی، می‌توان این نتیجه را به‌دست آورد:

نتیجه. فرض کنیم، برای تابع نامنفی و پیوستهٔ $f(x, y)$، هردو انتگرال (۱۷) هم، تابع‌هایی پیوسته باشند: اولی نسبت به y و دومی نسبت به x. آن‌وقت، اگر یکی از انتگرال‌های تکراری (۱۶) وجود داشته باشد، آن‌وقت دیگری هم وجود دارد و، ضمناً، برابر اولی است.

ازروی قضیهٔ ۲ ویادداشت آن روشن می‌شود که فرض پیوستگی انتگرال‌های (۱۷)، با فرض تقارب یکنواخت آن‌ها، هم‌ارز است. بنابراین تنها این می‌ماند که از قضیهٔ قبل استفاده کنیم، با توجه به‌این‌که، دراین حالت، داریم: $f(x, y) = |f(x, y)|$.

آن‌چه دراین شماره گفتیم، با جزئی تغییری، برای حالت بازه‌های متناهی هم‌درست است: تنها نقطهٔ خاص $x = \infty$، جای خود را به‌نقطهٔ خاص $x = b$ می‌دهد وهمچنین (اگر لازم باشد)، نقطهٔ $y = \infty$ به‌نقطهٔ $y = d$.

۵۲۳. کاربرد در محاسبهٔ بعضی انتگرال‌ها. از نظریه‌ای که در این‌جا شرح دادیم، برای محاسبهٔ بعضی انتگرال‌های مهم، استفاده می‌کنیم.

۱°. انتگرال‌های اولر

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx \quad (0<a<1), \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}dx \quad (0<a,b<1), \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}dx}{x^2+2x\cos\theta+1} \quad (0<a<1, -\pi<\theta<\pi)$$

ازنتیجهٔ شمارهٔ ۴۹۶، ۱) فوراً به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}dz=\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi} \quad (m<n)$$

بـا فرض $z=x^{\frac{1}{2n}}$، انتگرال اول از انتگرال‌های اولر

$$\int_a^\infty \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi} \qquad (19)$$

را به‌ازای مقدار خاص $a=\frac{2m+1}{2n}$ به‌دست می‌آوریم.

برای آن‌که، مقدار انتگرال مجهول را برای مقدار دلخواه a، با شرط $0<a<1$، پیدا کنیم، توجه می‌کنیم که این انتگرال، تابعی است پیوسته از a، برای مقدارهای مفروض پارامتر.

به‌ازای $0<x<+\infty$ و $0<a<1$، تابـع زیر انتگرال، پیوستگی خـود را نسبت به‌هردو متغیر حفظ می‌کند. ضمناً، انتگـرال مفروض، نسبت به a، به‌ازای $x=0$ و برای $a\geqslant a_0>0$ و به‌ازای $x=\infty$ وبرای $a<a_1<1$، متقارب یکنواخت می‌شود. در واقع، با تجزیهٔ انتگرال $\int_0^\infty$ به‌دو انتگرال $\int_0^1+\int_1^\infty$، به‌سادگی دیده می‌شود کـه دوانتگرال اخیر، به‌ترتیب، به‌وسیلهٔ انتگرال‌های زیرمحدود می‌شوند:

$$\int_0^1 \frac{x^{a_0-1}}{1+x}dx \quad و \quad \int_1^\infty \frac{x^{a_1-1}}{1+x}dx$$

اگر قضیهٔ ۲ را برای انتگرال $\int_1^\infty$ وقضیهٔ مشابه آن دربارهٔ بازهٔ متناهی را بـرای انتگـرال $\int_0^1$ به‌کار ببریم، به پیوستگی هردو تابع به‌عنوان تابع‌هایی از پارامتر، قانـع می‌شویم.

به‌کمك مقدارهـای به‌صورت $\frac{2m+1}{2n}$ (m و n طبیعی و $m<n$) می‌توان به‌قدر

دلخواه به‌مقدار دلخواه a از $0<a<1$ نزدیك شد. با گذر به‌حد در دستور (۱۹) و به‌ازای $a \to \frac{2m+1}{2n}$ و با استفاده از پیوستگی انتگرال، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$ [با ۴،۵۱۹ مقایسه کنید]

به‌همین ترتیب، از ۴۹۶، ۲) و ۳) پیدا می‌شود:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}dx = \pi(\cot g \pi a - \cot g \pi b)$$

و

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x^2+2x\cdot\cos\theta+1} = \pi \cdot \frac{\sin(1-a)\theta}{\sin\theta \cdot \sin \pi a}$$

۲°. انتگرال [با ۴۹۲، ۳° مقایسه کنید]

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

این انتگرال را درنظر می‌گیریم:

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}dx \quad (\alpha > 0)$$

آن را به‌کمك مشتق آن نسبت به α محاسبه می‌کنیم. ولی، استفادهٔ مستقیم ازقاعدهٔ لایب‌نیتس، ما را به‌انتگرال متباعد

$$\int_0^\infty \cos \alpha x dx$$

می‌رساند. به این مناسبت، «ضریب تقارب» e^{-kx} $(k>0)$ را وارد و از محاسبهٔ مقدار انتگرال زیر، آغاز می‌کنیم:

$$I = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \frac{\sin \alpha x}{x}dx \quad (\alpha \geqslant 0)$$

که برای آن، می‌توانیم درزیرعلامت انتگرال، نسبت به α، مشتق بگیریم، زیرا شرطهای

قضیه‌های ۳، درمورد آن، رعایت شده است: تابع زیرانتگرال و مشتق آن نسبت به α، نسبت به x و α برای $x \geqslant 0$ و $\alpha \geqslant 0$، پیوسته هستند، وانتگرال حاصل ازمشتق گیری

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos\alpha x\,dx = \frac{k}{\alpha^2+k^2}$$

به‌طور یکنواخت نسبت به α متقارب می‌شود، زیرا به‌وسیلهٔ انتگرال $\int_0^\infty e^{-kx}dx$ ــ که شامل α نیست ــ محدود می‌شود.

به‌این‌ترتیب، برای $\alpha \geqslant 0$ داریم:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{k}{\alpha^2+k^2}$$

که با انتگرال‌گیری نسبت به α به‌دست می‌آید:

$$J = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k}$$

(واردکردن جملهٔ ثابت، در این‌جا، لازم نیست، زیرا هردوی این عبارت‌ها، به‌ازای $\alpha = 0$، به‌سمت صفرمیل می‌کنند.)

این دستور، با شرط $k > 0$، به‌دست آمد. ولی به ازای $\alpha = \text{const}$، انتگرال I تابعی از k است که به‌ازای $k = 0$ هم پیوسته می‌شود؛ این را می‌توان ازقضیهٔ ۲ و از تقارب یکنواخت انتگرال I نسبت به k، به‌ازای $k \geqslant 0$، نتیجه گرفت [۵۱۵، ۴°] را ببینید]. به‌زبان دیگر

$$I_0 = \lim_{k \to +0} I$$

اگر $\alpha > 0$، آن‌گاه

$$I_0 = \lim_{k \to +0} \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

ودرحالت خاص (به‌ازای $\alpha = 1$):

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

۳°. انتگرال اولر-پواسون

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

[با ۴۹۲، ۲° مقایسه کنید].

دراین‌جا با گذاشتن $x=ut$، که درآن u عدد مثبت دلخواهی است، به‌دست‌می‌آید:

$$J=u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt$$

دوطرف برابری را در e^{-u^2} ضرب می‌کنیم و از ۰ تا ∞ انتگرال می‌گیریم:

$$J.\int_0^\infty e^{-u^2}du=J^2=\int_0^\infty e^{-u^2}udu\int_0^\infty e^{-u^2t^2}dt$$

بی‌اشکال دیده می‌شود که جابه‌جائی انتگرال‌ها، خیلی زودتر ما را به‌نتیجه می‌رساند. درواقع، پس ازجابه‌جائی به‌دست می‌آید:

$$J^2=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$

ازآن‌جا (چون به‌وضوح داریم $J>0$):

$$J=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

برای تأیید این جابه‌جائی انتگرال‌ها، ببینیم توسل به‌نتیجهٔ قضیهٔ ۵ شمارهٔ ۵۲۱، به‌کجا می‌رسد. چون انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

برای همهٔ مقدارهای نامنفی t، تابع پیوسته‌ای از t است، انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}udt=e^{-u^2}.J$$

تنها به‌ازای $u>0$ پیوسته و به‌ازای $u=0$ برابرصفرمی‌شود ودراین نقطه ناپیوسته‌است.

به‌این‌ترتیب، نمی‌توان مستقیماً نتیجه رادرمورد مستطیل $[\infty, 0; \infty, 0]$ به‌کاربرد. نتیجه را، درمورد مستطیل $[\infty, 0; \infty, u_0]$ به‌کار می‌بریم که، در آن $u_0 > 0$ است و انتگرال

$$\int_{u_0}^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot e^{-(1+t^2)u_0}$$

تابعی است پیوسته از t، برای همهٔ tهای نامنفی. ازاین‌جا، این برابری تأیید می‌شود:

$$\int_{u_0}^{\infty} du \int_{0}^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2}\, u\, dt = \int_{0}^{\infty} dt \int_{u_0}^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\, du$$

تنها این می‌ماند که، با کوچک کردن u_0، به‌ازای $u_0 \to 0$، به‌سمت حد عبور کنیم و این عمل را هم می‌توان، براساس نتیجهٔ شمارهٔ **۵۱۸**، درزیرعلامت انتگرال انجام داد.

۴°. انتگرال‌های لاپلاس

$$y = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx,\quad z = \int_{0}^{\infty} \frac{x\cdot\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx \quad (\alpha, \beta > 0)$$

در اولی، با فرض

$$\frac{1}{\alpha^2+x^2} = \int_{0}^{\infty} e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt$$

به‌دست می‌آید:

$$y = \int_{0}^{\infty} \cos\beta x\,dx \int_{0}^{\infty} e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt$$

با توجه به‌قضیهٔ ۵، انتگرال‌گیری‌های نسبت به x ونسبت به t را جابه‌جا می‌کنیم:

$$y = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha^2 t}\,dt \int_{0}^{\infty} e^{-tx^2}\cos\beta x\,dx$$

انتگرال درونی برای ما معلوم است [۵۱۹، ۶)، (a)]:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-tx^2}\cos\beta x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4t}}$$

به‌نحوی که

$$y=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\int_{۰}^{\infty} e^{-\alpha^{۲}t-\frac{\beta^{۲}}{۴t}}\cdot\frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{\pi}\int_{۰}^{\infty} e^{-\alpha^{۲}z^{۲}-\frac{\beta^{۲}}{۴z^{۲}}}dz$$

که با به‌یاد آوردن ۴۹۷، ۸)، سرانجام پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{\pi}{۲\alpha}e^{-\alpha\beta}$$

انتگرال دوم لاپلاس، از اولی و با مشتق‌گیری نسبت به‌پارامتر β به‌دست می‌آید:

$$z=-\frac{dy}{d\beta}=\frac{\pi}{۲}e^{-\alpha\beta}$$

به‌کاربردن قاعدهٔ لایب‌نیتس، از این‌جا تایید می‌شود که انتگرال، به‌طور یکنواخت نسبت به β برای $\beta\geqslant\beta_{۰}>۰$، متقارب می‌شود [۵۱۷، ۱۶)].

۵°. انتگرال‌های فرنل (A. J. Fresnel)

$$\int_{۰}^{\infty}\sin x^{۲}dx,\quad \int_{۰}^{\infty}\cos x^{۲}dx$$

با فرض $x^{۲}=t$ به‌دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{\infty}\sin x^{۲}dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\quad \int_{۰}^{\infty}\cos x^{۲}dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

به‌تعیین انتگرال اول، در شکل تبدیل‌یافتهٔ خود، می‌پردازیم.

عبارت $\frac{۱}{\sqrt{t}}$ (زیر علامت انتگرال) را، با انتگرال برابر آن

$$\frac{۱}{\sqrt{t}}=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{۰}^{\infty}e^{-tu^{۲}}du$$

عوض می‌کنیم و انتگرال موردنظر را، به‌این‌صورت درمی‌آوریم:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{۰}^{\infty}\sin t\,dt\int_{۰}^{\infty}e^{-tu^{۲}}du$$

که اگر انتگرال‌ها را جابه‌جا کنیم، نتیجه نهائی به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-tu^2}\sin t\,dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

[۴۷۲، ۲) یا ۴۹۱، ۷) را ببینید]. چون اثبات مستقیم این جابه‌جائی، مستلزم تبدیل‌ها و برآوردهای دقیق و پر زحمتی است، در این‌جا هم ترجیح می‌دهیم (۲° را ببینید) به«عامل هم‌گرائی» e^{-kt} $(k>0)$ متوسل شویم.

داریم:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-kt}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-kt}\sin t\,dt\int_0^\infty e^{-tu^2}du=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2}$$

این‌بار، امکان جابه‌جائی انتگرال‌ها، به‌کمك قضیهٔ ۵ ثابت‌می‌شود. بالاخره، گذر به‌حددر زیر علامت انتگرال به‌ازای $k\to 0$ می‌ماندکه به‌سادگی قابل تحقیق است.

بنابراین، سرانجام

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

برای انتگرال $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ هم، همین مقدار حاصل می‌شود. در نتیجه:

$$\int_0^\infty \sin x^2dx=\int_0^\infty \cos x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

۵۲۳. مثال‌ها برای مشتق‌گیری زیر علامت انتگرال. ۱) با آغاز از انتگرال‌های معلوم (به‌ازای $a>0$)

$$\text{(a)}\quad \int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

$$\text{(c)}\quad \int_0^{1} x^{a-1}dx = \frac{1}{a}$$

و از راه مشتق‌گیری پی‌درپی آن‌ها نسبت به‌پارامتر، انتگرال‌های تازه‌ای پیدا کنید.

(a). از روی قضیهٔ لایب نیتس، بعد از nبار مشتق‌گیری، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cdot x^{2n}dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\cdot a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ازآن‌جا که همهٔ این انتگرال‌های حاصل، برای $a \geqslant a_0 > 0$، نسبت به a، متقارب یکنواخت هستند (مثلاً، انتگرال‌مفروض، به‌وسیلهٔ $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cdot x^{2n}dx$ محدود می‌شود)، بنابراین از قاعدهٔ لایب نیتس می‌توان استفاده کرد.

(b). پاسخ: $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

(c). پاسخ: $$\int_0^{1} x^{a-1}\log^n x\,dx = (-1)^n\cdot\frac{n!}{a^{n+1}}$$

۲) با مشتق‌گیری نسبت‌به‌پارامتر، انتگرال‌های زیر را محاسبه‌کنید ($\alpha,\beta,k>0$):

$$\text{(a)}\quad J = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x}\cdot e^{-kx}dx$$

$$\text{(b)}\quad H = \int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}\cdot e^{-kx}dx$$

حل. (a). مشتق j نسبت بـه α با انتگرال زیـر بیان می‌شود (متقارب یکنواخت نسبت به α):

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-kx}\sin\alpha x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

از آن‌جا

$$J=\frac{۱}{۲}\ln(\alpha^{۲}+k^{۲})+C$$

چون، به‌ازای $\alpha=۰$، انتگرال J برابر صفر می‌شود، پس $C=-\frac{۱}{۲}\ln k^{۲}$ و در نتیجه

$$J=\frac{۱}{۲}\ln\left(۱+\frac{\alpha^{۲}}{k^{۲}}\right)$$

(b). با مشتق‌گیری از H نسبت به α، به‌دست می‌آید:

$$\frac{dH}{d\alpha}=\int_{۰}^{\infty}e^{-kx}\frac{\sin\beta x\cdot\cos\alpha x}{x}dx$$

ازقاعدهٔ لایب‌نیتس، به‌این‌دلیل می‌توان استفاده کرد که شرط‌های قضیهٔ۳ رعایت شده‌است.

با تبدیل حاصل‌ضرب سینوس در کسینوس، به‌تفاضل دو سینوس، انتگرال حاصل، به‌صورت انتگرال‌های آشنا درمی‌آید [۵۲۲، ۲°]:

$$\frac{dH}{d\alpha}=\frac{۱}{۲}\left[\int_{۰}^{\infty}e^{-kx}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}dx-\int_{۰}^{\infty}e^{-kx}\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx\right]=$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{k}\right)$$

که اگر نسبت به α انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$H=\frac{\alpha+\beta}{۲}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{۲}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{۴}\ln\frac{k^{۲}+(\alpha-\beta)^{۲}}{k^{۲}+(\alpha+\beta)^{۲}}+C$$

مقدار ثابت C برابر صفر است، زیرا مقدار H، به‌ازای $\alpha=۰$، برابر صفر می‌شود.

۳) این انتگرال را محاسبه کنید:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{۱-e^{-t}}{t}\cos t\,dt$$

راهنمائی. با وارد کردن پارامتر، انتگرال کلی‌تر

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{۱-e^{-\alpha t}}{t}\cos t\,dt$$

را در نظر بگیرید و آن‌را، به کمك مشتق‌گیری، محاسبه کنید؛ سپس، در نتیجهٔ حاصل $\alpha=1$ بگذارید.

پاسخ: $\ln\sqrt{2}$.

۴) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید:

$$\text{(a)}\quad J_1=\int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}dx \quad (a,b>0)$$

$$\text{(b)}\quad J_2=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} rx}{x(1+x^2)}dx \quad (r\geqslant 0)$$

$$\text{(c)}\quad J_3=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} ax\cdot\operatorname{arc\,tg} bx}{x^2}dx \quad (a,b>0)$$

(a). راهنمائی. J_1 نسبت به a، به‌ازای $a\geqslant 0$، پیوسته است و به‌وسیلهٔ $\dfrac{\ln(1+a_1^2x^2)}{b^2+x^2}$ محدود می‌شود (برای $0\leqslant a\leqslant a_1$). مشتق آن برای $a>0$

$$\frac{dJ_1}{da}=\int_0^\infty \frac{2ax^2}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)}dx=\frac{\pi}{ab+1}$$

به‌وسیلهٔ $\dfrac{2a_1x^2}{(b^2+x^2)(1+a_1^2x^2)}$ (برای $0<a_0\leqslant a\leqslant a_1$) محدود می‌شود.

پاسخ: $J_1=\dfrac{\pi}{b}\ln(ab+1)$.

(b). راهنمائی. مشتق به‌ازای $r\geqslant 0$:

$$\frac{dJ_2}{dr}=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+r^2x^2)(1+x^2)}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+r}$$

به‌وسیلهٔ $\dfrac{1}{1+x^2}$ محدود می‌شود. پاسخ: $J_2=\dfrac{\pi}{2}\cdot\ln(1+r)$.

(c). راهنمائی. با مشتق‌گیری نسبت به a، به‌انتگرال از گونهٔ J_2 منجر می‌شود:

$$\frac{dJ_3}{da}=\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg} bx}{x}dx=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}t}{t(1+t^2)}dt=\frac{\pi}{2}\cdot\ln\frac{a+b}{a}\quad (a>0)$$

پاسخ: $J_۳=\frac{\pi}{۲}\cdot\ln\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a\cdot b^b}$.

یادداشت. از $J_۲$، به‌ازای $r=۱$، با تبدیل $x=tgt$، انتگرال

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{t}{tgt}dt=\frac{\pi}{۲}\ln ۲$$

به‌دست می‌آید و، از آن‌جا، با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، دوباره به‌دست می‌آید [با **۴۹۲**، ۱° مقایسه کنید]:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\ln sintdt=-\frac{\pi}{۲}\ln ۲$$

۵). (a). انتگرال $J=\int_۰^{\infty}e^{-x^۲}cos۲bx\,dx$ را محاسبه کنید.

حل. داریم:

$$\frac{dJ}{db}=-\int_۰^{\infty}e^{-x^۲}\cdot ۲xsin۲bx\,dx$$

سپس، با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، حاصل می‌شود:

$$\frac{dJ}{db}=-۲b\int_۰^{\infty}e^{-x^۲}cos۲bx\,dx=-۲bJ$$

به‌این ترتیب، برای تعیین J، به‌معادلهٔ دیفرانسیلی ساده‌ای می‌رسیم که متغیرهای آن از هم جدا شده‌اند [**۳۵۸**]، که با حل آن به‌دست می‌آید:

$$J=C.e^{-b^۲}$$

چون به‌ازای $b=۰$ داریم: $J=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$، بنابراین، سرانجام خواهیم داشت:

$$J=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}.e^{-b^۲}$$

[با **۵۱۹**، ۶)، (a) مقایسه کنید].

(b) اگر ازهمین‌روش، برای‌محاسبهٔ انتگرال $H=\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2bx\,dx$ استفاده کنیم، به‌معادلهٔ دیفرانسیلی زیر می‌رسیم:

$$\frac{dH}{db}+2bH=1$$

اگر دوطرف را در e^{b^2} ضرب کنیم، در سمت چپ، به‌روشنی، مشتق حاصل‌ضرب $e^{b^2}.H$ نسبت به b به‌دست می‌آید و، با انتگرال‌گیری از ۰ تا b حاصل می‌شود:

$$e^{b^2}.H=\int_0^b e^{b^2}db$$

(چون به‌ازای $b=0$ داریم $H=0$). به‌این ترتیب

$$H=e^{-b^2}\int_0^b e^{t^2}dt$$

در این‌جا، برای مقدار انتگرال، باید تابع تازه‌ای را (که «غیرمقدماتی» است) وارد کرد:

$$\varphi(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$$

[با ۵۱۹، ۶) (c) مقایسه کنید].

۶) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $(a,b>0)$.

$$\int_0^\infty e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx$$

حل. این انتگرال، تنها در ضریب $\frac{1}{\sqrt{a}}$ با انتگرال

$$J=\int_0^\infty e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy$$

فرق دارد، که در آن، $c^2=ab$ (تبدیل $y=\sqrt{ax}$)، داریم:

$$\frac{dJ}{dc}=-۲c\int_{۰}^{\infty}e^{-y^{۲}-\frac{c^{۲}}{y^{۲}}}dy\doteq-۲\int_{۰}^{\infty}e^{-z^{۲}-\frac{c^{۲}}{z^{۲}}}dz=-۲J$$

(تبدیل $y=\frac{c}{z}$)، از این‌جا

$$J=Ae^{-۲c},\quad A=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

پاسخ: $\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.e^{-۲\sqrt{ab}}$ [با ۸،۴۹۷ مقایسه کنید].

۷) این انتگرال را محاسبه کنید:

$$J=\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-at}cosbt-e^{-a_{۱}t}cosb_{۱}t}{t}dt\quad(a,a_{۱}>۰)$$

حل. با مشتق‌گیری نسبت به a و نسبت به b به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial J}{\partial a}=-\int_{۰}^{\infty}e^{-at}cosbt\,dt=-\frac{a}{a^{۲}+b^{۲}}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b}=-\int_{۰}^{\infty}e^{-at}sinbt\,dt=-\frac{b^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}$$

تعیین خود تابع، از روی این مشتق‌های جزئی، دشوار نیست*.

$$J=\frac{۱}{۲}\ln(a^{۲}+b^{۲})+C$$

که در آن، مقدار C به a و b بستگی ندارد. چون به ازای $a=a_{۱}$ و $b=b_{۱}$ داریم $J=۰$، پس

$$C=\frac{۱}{۲}\ln(a_{۱}^{۲}+b_{۱}^{۲})$$

به‌طوری که

---

*) در آینده به‌این مساله به‌طور منظم خواهیم پرداخت، ولی در این‌جا، «تابع اولیه» را به‌طور نظری پیدا می‌کنیم.

$$J=\frac{۱}{۲}\ln\frac{a_۱^۲+b_۱^۲}{a^۲+b^۲}$$

۸) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید ($a>۱$، $b\geqslant ۰$):

$$u=\int_۰^\infty e^{-ax^۲}\cos bx^۲dx,\quad v=\int_۰^\infty e^{-ax^۲}\sin bx^۲dx$$

حل. مشتق این انتگرال‌ها را نسبت به‌پارامتر b ـ طبق قاعدهٔ لایب‌نیتس ـ پیدا می‌کنیم:

$$\frac{du}{db}=-\int_۰^\infty x^۲\cdot e^{-ax^۲}\sin bx^۲dx,\quad \frac{dv}{db}=\int_۰^\infty x^۲\cdot e^{-ax^۲}\cos bx^۲dx$$

ازاین‌جا، با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، نتیجه می‌شود:

$$\frac{du}{db}=-\frac{۱}{۲a}v-\frac{b}{a}\cdot\frac{dv}{db},\quad \frac{dv}{db}=\frac{۱}{۲a}u+\frac{b}{a}\cdot\frac{du}{db}$$

ویا، با حل این معادله‌ها، نسبت به‌مشتق‌ها

$$\frac{du}{db}=-\frac{bu+av}{۲(a^۲+b^۲)},\quad \frac{dv}{db}=\frac{au-bv}{۲(a^۲+b^۲)}\qquad (۲۰)$$

به‌این ترتیب، برای تعیین تابع‌های u و v، به‌دستگاهی از معادله‌های دیفرانسیلی می‌رسیم. با واردکردن تابع مختلط $w=u+iv$، از متغیرحقیقی b، به‌سادگی می‌توان‌کار را به‌یك معادله (با متغیرهای جداشده) منجر کرد. اگر معادلهٔ دوم از دستگاه (۲۰) را در i ضرب و با معادلهٔ اول جمع کنیم، درآن صورت، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{dw}{db}=\frac{-b+ai}{۲(a^۲+b^۲)}w=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{w}{a-bi}$$

که آن‌را می‌توان، ازطریق عادی‌جداکردن متغیرها، حل کرد. برای این‌که خود رادرگیر لگاریتم عددهای مختلط نکنیم، می‌توان به‌اعتبار معادلهٔ دیفرانسیلی، مستقیماً نوشت:

$$\frac{d}{db}(w\cdot\sqrt{a-bi}\,)=۰$$

ازآن‌جا

$$w\cdot\sqrt{a-bi}=c=\text{const}.$$

با فرض $b=0$، به‌سادگی پیدا می‌شود: $c=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$، به‌نحوی که

$$w=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a-bi}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{a+bi}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نماد $\sqrt{a\pm bi}$ را، متناظر با بخشی از ریشه می‌گیریم که، به‌ازای $b=0$، منجر به ریشهٔ حسابی $+\sqrt{a}$ شود.

معلوم است که*

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

بنابراین

$$w=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}\right)$$

که با برابر قراردادن بخش‌های موهومی وحقیقی، به‌طور جداگانه، سرآخر به‌دست می‌آید:

$$u=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}$$

$$v=\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}$$

این رابطه‌ها، با شرط $a>0$ به دست آمدند، ولی چون هردو انتگرال، به طوری

---

*) با فرض $\sqrt{a+bi}=x+yi$، خواهیم داشت: $a=x^2-y^2$، $b=2xy$. از این‌جا به دست می‌آید

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

ضمناً، هردو ریشه، در این‌جا، با علامت مثبت اختیار می‌شود (با توجه به‌شرط: $xy=\frac{1}{2}b>0$).

که به‌کمك قضیهٔ ۲ می‌توان فهمید [۵۱۵، ۴° را هم ببینید]، به‌ازای $a=0$ هم، تابع‌های پیوسته‌ای از a هستند، پس باگذر به‌حد، به‌ازای $a\to 0$، درانتگرال‌های حاصل (با شرط $b>0$) به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \cos bx^2\,dx=\int_0^\infty \sin bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

یعنی همان انتگرال فره‌نه [با ۵۲۲، ۵° مقایسه کنید].

۹) نشان دهید که انتگرال‌های لاپلاس را می‌توان به‌کمك معادله‌های دیفرانسیلی، به‌سادگی، محاسبه کرد [با ۵۲۲، ۴° مقایسه کنید]:

$$y=\int_0^\infty \frac{\cos\beta\alpha}{\alpha^2+x^2}dx,\quad z=\int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx\qquad(\alpha,\beta>0)$$

قبلاً دیده‌ایم که

$$\frac{dy}{d\beta}=-z$$

مشتق‌گیری بعدی نسبت به β، زیرعلامت انتگرال، ممکن نیست، زیرا با این مشتق‌گیری، به‌یك انتگرال متباعد می‌رسیم.

با وجود این، اگر به‌برابری فوق، برابری

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx$$

[۵۲۲، ۲°]* را عضو به‌عضو اضافه کنیم، در آن صورت به‌دست می‌آید:

$$\frac{dy}{d\beta}+\frac{\pi}{2}=\alpha^2\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}dx$$

یعنی

$$\frac{d^2y}{d\beta^2}=\alpha^2 y$$

---

*) ضمناً ازاین به‌بعد، مقدار این انتگرال اصلاً برای ما لازم نیست؛ کافی است بدانیم که، برای همهٔ مقدارهای $\beta>0$، دارای مقدار ثابتی است (که به سادگی، با تبدیل سادهٔ $t=\beta x$ روشن می‌شود).

برای این معادلهٔ دیفرانسیلی سادهٔ مرتبهٔ دوم با ضریب‌های ثابت، می‌توان از روی ریشه‌های $\pm\alpha$ از «معادلهٔ مفسر»، به‌سادگی، جواب کلی را تشکیل داد:

$$y=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}$$

که در آن C_1 و C_2 مقدارهایی ثابت هستند. ولی، مقدار y، به‌ازای همهٔ مقدارهای β، محدود است.

$$|y|\leqslant\int_0^{\infty}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$$

یعنی C_1 الزاماً برابرصفراست (زیرا درغیراین صورت، به‌ازای $\beta\longrightarrow+\infty$، مقدار y هم به‌طور نامتناهی ترقی می‌کند).

برای تعیین ثابت C_2، قرار می‌دهیم: $\beta=0$، به‌دست می‌آید:

$$C_2=\frac{\pi}{2\alpha}$$

وسرانجام

$$y=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$$

وازهمین‌جا، با مشتق‌گیری، z هم به‌دست می‌آید.

۱۰) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید:

$$u=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos\frac{\alpha^2}{x^2}dx,\quad v=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\sin\frac{\alpha^2}{x^2}dx$$

وجود و پیوستگی انتگرال‌ها به‌ازای همهٔ مقدارهای α، با توجه به‌محدودکنندهٔ e^{-x^2}، روشن است. با توجه به‌قاعدهٔ لایب‌نیتس، داریم:

$$\frac{du}{d\alpha}=-\int_0^{\infty}e^{-x^2}\sin\frac{\alpha^2}{x^2}\cdot\frac{2\alpha}{x^2}dx=-2\int_0^{\infty}e^{-\frac{\alpha^2}{y^2}}\sin y^2dy$$

$$\left(y=\frac{\alpha}{x}\right)$$

انتگرال دوم ــ چه‌به‌ازای $y=0$ وچه به‌ازای $y=\infty$ ــ برای همهٔ مقدارهای α، متقارب یکنواخت است، یعنی انتگرال‌اول هم ــ چه به‌ازای $x=\infty$ وچه به‌ازای $x=0$ ــ برای

همهٔ مقدارهای α، که در نابرابری $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant A<+\infty$ صدق کنند، متقارب یکنواخت است: بنابراین، به‌ازای $\alpha>0$، استفادهٔ از قاعدهٔ لایب‌نیتس مانعی ندارد.

مشتق‌گیری بعدی نسبت به α (که به‌همین ترتیب، بدون مانع است)، به‌دست می‌دهد:

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2}=-2\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{y^2}}\sin y^2\cdot\frac{-2\alpha}{y^2}dy=4\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{\alpha^2}{x^2}dx=4v$$

و به‌همین ترتیب

$$\frac{d^2v}{d\alpha^2}=-4u$$

با فرض $w=u+iv$، برای تعیین w، به‌معادلهٔ دیفرانسیلی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2w}{d\alpha^2}=-4iw$$

معادلهٔ «مفسر» را تشکیل می‌دهیم: $\lambda^2+4i=0$ و از روی ریشه‌های آن $\lambda=\pm\sqrt{2}\mp\sqrt{2}i$، جواب‌های کلی معادلهٔ دیفرانسیلی را می‌نویسیم:

$$w=u+iv=$$

$$=Ae^{-\alpha\sqrt{2}}(\cos\alpha\sqrt{2}+i\sin\alpha\sqrt{2})+Be^{\alpha\sqrt{2}}(\cos\alpha\sqrt{2}-i\sin\alpha\sqrt{2})$$

چون تابع w به‌ازای همهٔ αها کران‌دار است، الزاماً خواهیم داشت $B=0$؛ از طرف دیگر، به‌ازای $\alpha=0$ باید داشته باشیم: $w=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$: به‌نحوی که $A=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$، و سرانجام

$$u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2},\quad v=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}$$

۱۱) این اتحاد را ثابت کنید:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x^2}xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-x^2}dx}{x^2+a^2}\quad(a>0)$$

انتگرال اول را u و انتگرال دوم را v می‌نامیم. با فرض $x^2+a^2=y^2$ در u، آن را این‌طور می‌نویسیم:

$$u=e^{a^2}\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

و اگر با فرض $x=az$، متغیر تازهٔ z را در v وارد کنیم، نتیجه می‌شود:

$$v=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-a^{۲}z^{۲}}dz}{z^{۲}+۱}$$

از v نسبت به a مشتق می‌گیریم (بنابر قاعدهٔ لایب‌نیتس) و آن را این‌طور می‌نویسیم:

$$\frac{dv}{da}=-\frac{۲a}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{۰}^{\infty}e^{-a^{۲}z^{۲}}dz-\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-a^{۲}z^{۲}}}{z^{۲}+۱}dz\right\}$$

از آن‌جا، برای محاسبهٔ v، به‌یک معادلهٔ دیفرانسیلی خطی می‌رسیم:

$$\frac{dv}{da}-۲a.v=-۱$$

که با ضرب دوطرف آن درعامل $e^{-a^{۲}}$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{da}[v.e^{-a^{۲}}]=-e^{-a^{۲}}$$

از آن نسبت به a، از ۰ تا a، انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$v.e^{-a^{۲}}=v_{۰}-\int_{۰}^{a}e^{-t^{۲}}dt$$

که در آن، منظور از $v_{۰}$، مقدار حدی زیراست:

$$v_{۰}=\lim_{a\to ۰}v=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{۰}^{\infty}\frac{dz}{z^{۲}+۱}=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

و چون این عدد، همان مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\infty}e^{-t^{۲}}dt$ است، پس برای v خواهیم داشت:

$$v=e^{a^{۲}}\int_{a}^{\infty}e^{-t^{۲}}\,dt$$

یعنی همان عبارتی‌که برای u داشتیم.

۱۲) این اتحاد را ثابت کنید $(k>۰)$:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-kx}}{۱+x^{۲}}dx=\int_{k}^{\infty}\frac{\sin(x-k)}{x}dx$$

هردو انتگرال، به‌عنوان تابعی از k، درمعادلهٔ دیفرانسیلی

$$y''+y=\frac{1}{k}$$

صدق می‌کنند. اگر از اولی، طبق قاعدهٔ لایب‌نیتس، دوبار مشتق بگیریم، به‌این معادله می‌رسیم. درمورد دومی، بهتر است که ازنمایش آن به‌صورت زیر استفاده کنیم:

$$\cos k\cdot\int_k^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt-\sin k\cdot\int_k^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt$$

چون تفاضل دوانتگرال، مفروض، $z=z(k)$، در معادلهٔ همگن $z''+z=0$ صدق می‌کند، می‌توان آن را به‌این صورت نوشت:

$$z=c_1\cdot\sin(k+c_2)$$

که درآن، c_1 و c_2 مقدارهایی ثابت‌اند. ولی هردو انتگرال و، همراه با آن‌ها، تفاضلشان z، به‌ازای $k\to\infty$، به‌سمت صفرمیل می‌کنند. از این‌جا $c_1=0$ و $z(k)=0$. اتحاد مفروض برقرار است.

۵۲۴. مثال‌هایی برای انتگرال‌گیری زیرعلامت انتگرال. ۱) مقدار انتگرال‌های زیر را، ازراه انتگرال‌گیری زیر علامت انتگرال، معین کنید:

$$\text{(a)}\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx,\quad\text{(b)}\int_0^\infty\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx\quad(a,b>0)$$

حل. (a). انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-yx}dx=\frac{1}{y}\quad(y>0)$$

نسبت به y، برای $y\geqslant y_0>0$، به‌طوریکنواخت متقارب است. از دوطرف این برابری نسبت به y، از a تا b، انتگرال می‌گیریم. ضمناً، درسمت چپ، می‌توان انتگرال‌گیری را درزیرعلامت انتگرال انجام داد. داریم:

$$\int_0^\infty dx\int_a^b e^{-yx}\,dy=\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}$$

[با ۴۹۵، ۱) مقایسه کنید].

(b). به‌طرز مشابهی با شروع از انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{\pi}{2} (y > 0)$$

که نسبت به y، برای $y \geqslant y_0 > 0$ به‌طور یکنواخت متقارب است، پیدا می‌کنیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \int_a^b \sin yx \, dy = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} (b-a)$$

[با ۴۹۷، ۱۰)، (a) مقایسه کنید].

۲) انتگرال بیضوی کامل نوع اول

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

را همچون تابعی از مدول k درنظر می‌گیریم و انتگرال این تابع را، در بازهٔ $[0, 1]$ پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\int_0^1 \mathbf{K}(k) \, dk = \int_0^1 dk \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi}{\sin \varphi} d\varphi$$

که با تبدیل $x = tg\frac{\varphi}{2}$، منجر می‌شود به

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} tgx}{x} dx = G = 0/915965 \ldots$$

[G ثابت کاتالان است. ۳۲۸، ۶) و ۴۴۰، ۶a) را ببینید].

جابه‌جائی انتگرال‌ها براساس نتیجهٔ قضیهٔ ۵ انجام می‌پذیرد. تابع زیر انتگرال، همه‌جا در بازهٔ $[0, 1; 0, \frac{\pi}{2}]$، مثبت و پیوسته است، به‌جز نقطهٔ $(1, \frac{\pi}{2})$ که، در آن‌جا، برابر ∞ می‌شود. انتگرال

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

تابع پیوسته‌ای از k برای مقدارهای $k<1$، و انتگرال

$$\int_{0}^{1} \frac{dk}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

تابع پیوسته‌ای از φ برای مقدارهای $\varphi<\frac{\pi}{2}$ است. بالاخره، دومین انتگرال دوگانه هم، به‌روشنی، وجود دارد. به‌این ترتیب، همهٔ شرط‌های نتیجهٔ مذکور برقرارند.

درچند مثال بعد، باتابع آشنای بسل با اندیس صفرسروکار خواهیم داشت [۴۴۰، ۱۲)؛ ۴۴۱، ۴)]:

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\, d\theta$$

ولی ما، در استنتاج‌های خود، ازدستور «مجانبی» $J_0(x)$ استفاده می‌کنیم. این دستور، که از اثبات آن می‌گذریم، چنین است:

$$J_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\varphi_0(x)}{x^{\frac{3}{2}}} \qquad (21)$$

که درآن، $\varphi_0(x)$، با صعود نامحدود x، کران‌دار می‌ماند.

$$|\varphi_0(x)|\leqslant L$$

۳) این انتگرال را محاسبه کنید:

$$A=\int_{0}^{\infty} e^{-ax}.J_0(x)dx \quad (a>0)$$

داریم:

$$A=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\, dx \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\, d\theta=$$

$$=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}d\theta\int_{۰}^{\infty}e^{-ax}\cos(x\sin\theta)\,dx=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{a}{a^{۲}+\sin^{۲}\theta}d\theta=\frac{۱}{\sqrt{۱+a^{۲}}}$$

جابه‌جایی انتگرال‌ها، با توجه به‌تقارب یکنواخت انتگرال

$$\int_{۰}^{\infty}e^{-ax}\cos(x\sin\theta)\,dx$$

نسبت به θ (با توجه به‌محدود کنندهٔ e^{-ax}) مجاز است.

چون از (۲۱) روشن می‌شود که انتگرال

$$\int_{۰}^{\infty}J_{۰}(x)dx$$

متقارب است*، پس انتگرال A، تابع پیوسته‌ای از a (و هم به‌ازای $a=۰$) خواهد بود [قضیهٔ ۲؛ ۵۱۵، ۴°]. به‌این مناسبت، مقدار این انتگرال را می‌توان ازعبارت A، با گذر به‌حد به‌ازای $a\to ۰$، به‌دست آورد. به‌این‌ترتیب

$$\int_{۰}^{\infty}J_{۰}(x)dx=۱$$

۴) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$B=\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}.J_{۰}(x)dx\quad(a>۰)$$

داریم:

$$B=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos(x\sin\theta)d\theta=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}d\theta\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx$$

ولی انتگرال درونی، «ضریب ناپیوستگی» دیریکله است [۴۹۷، ۱۱]:

---

*) اگر جملهٔ اول (۲۱) را به‌این صورت بنویسیم:

$$\sqrt{\frac{۲}{\pi x}}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{۴}+\sin x\sin\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$$

آن‌وقت، تقارب انتگرال، روشن می‌شود.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos(x\sin\theta)\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (\sin\theta < a) \\ 0 & (\sin\theta > a) \end{cases}$$

بنابراین

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} . J_0(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (a \geqslant 1) \\ \arcsin a & (a < 1) \end{cases}$$

مجاز بودن جابه‌جائی انتگرال‌ها را ثابت می‌کنیم. داریم:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{A} \frac{\sin ax}{x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{A} \frac{\sin ax}{x} \cos(x\sin\theta)\, dx$$

ولی انتگرال درونی را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$\int_0^{A} \frac{\sin ax}{x} \cos(x\sin\theta)\, dx = \frac{1}{2}\left\{ \int_0^{A} \frac{\sin(a+\sin\theta)x}{x} dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{A} \frac{\sin(a-\sin\theta)x}{x} dx \right\} = \frac{1}{2}\left\{ \int_0^{A(a+\sin\theta)} \frac{\sin z}{z} dz + \right.$$

$$\left. + \int_0^{A(a-\sin\theta)} \frac{\sin z}{z} dz \right\} \qquad (۲۲)$$

اگرداشته باشیم: $a > 1$، به‌نحوی که $0 < a - 1 < a - \sin\theta$، آن‌وقت، این عبارت به‌ازای $A \to \infty$، به‌طور یکنواخت نسبت به θ، به‌سمت حد خودش میل می‌کند، به‌زبان دیگر، انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos(x\sin\theta)\, d\theta$ متقارب یکنواخت می‌شود، در نتیجه، جابه‌جایی انتگرال‌ها مانعی ندارد. به‌ازای $a \leqslant 1$، درنزدیکی $\theta = \arcsin a$ یکنواختی از بین می‌رود. ولی چون عبارت (۲۲)، به‌ازای همهٔ Aها و θها، به‌طور یکنواخت کران‌دار می‌ماند (به وسیلهٔ مقدار ثابتی محدود می‌شود)، بنابراین، انتگرال بیرونی به ازای $\theta = \arcsin a$ به‌طور یکنواخت نسبت به A متقارب می‌شود. به‌طوری که، باهمهٔ این‌ها، گذرحدی، به‌ازای $A \to \infty$ زیر علامت انتگرال، بلامانع است و، در نتیجه، در این حالت هم، مجاز بودن جابه‌جایی انتگرال‌ها تأیید می‌شود.

۵) از انتگرال B، با مشتق‌گیری نسبت به‌پارامتر a، انتگرال جالب دیگری به‌دست می‌آید:

$$C=\int_0^{\infty} J_0(x)\cos ax\,dx=\begin{cases}0 & (a>1)\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} & (a<1)\end{cases}$$

برای تأیید حق مشتق‌گیری زیر علامت انتگرال، توجه می‌کنیم که انتگرال C، نسبت به a و در هر بازهٔ بستهٔ مقدارهای a که شامل واحد نباشد، متقارب یکنواخت است؛ واین را می‌توان ازرابطهٔ مجانبی (۲۱) نتیجه گرفت*. اگراین دستوررا به‌صورت

$$J_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}(\cos x+\sin x)+\frac{\varphi_0(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$$

بنویسیم و هردوطرف را در $\cos ax$ ضرب کنیم:

$$J_0(x)\cdot\cos ax=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\cos(1+a)x+\cos(1-a)x+\sin(1+a)x+\sin(1-a)x}{\sqrt{x}}+$$

$$\frac{\varphi_0(x)\cos ax}{x^{\frac{3}{2}}}$$

جملهٔ دوم به‌وسیلهٔ تابع $\dfrac{L}{x^{\frac{3}{2}}}$ محدود می‌شود. اما انتگرال جملهٔ اول هم، به‌ازای $|1-a|\geqslant\delta>0$ به‌طور یکنواخت، متقارب می‌شود.

همان دستور نشان می‌دهد که انتگرال C، به‌ازای $a=1$، متباعد است.

۶) این انتگرال را محاسبه کنید:

$$D=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cdot J_0(x)dx\quad(a>0)$$

داریم:

---

*) پاورقی قبل را ببینید.

$$D=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱-\cos ax}{x}dx\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}d\theta\int_{۰}^{\infty}\frac{۱-\cos ax}{x}\cos(x\sin\theta)\,dx=$$

$$=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}[\ln\sqrt{|a^{۲}-\sin^{۲}\theta|}-\ln\sin\theta]\,d\theta$$

[۴۹۷، ۱۶)، (b) را ببینید]. به‌این‌ترتیب [۴۹۷، ۷) و ۵۱۱، ۷)]:

$$D=\int_{۰}^{\infty}\frac{۱-\cos ax}{x}.J_{۰}(x)\,dx=\begin{cases}\ln(a+\sqrt{a^{۲}-۱}) & (a\geqslant ۱)\\ ۰ & (a<۱)\end{cases}$$

برای مستندکردن‌حق جابه‌جایی انتگرال‌ها، ابتدا برای مقدار متناهی A می‌نویسیم.

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{A}\frac{۱-\cos ax}{x}dx\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos(x\sin\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}d\theta\int_{۰}^{A}\frac{۱-\cos ax}{x}\cos(x\sin\theta)dx$$

همهٔ مسأله به‌این‌جا می‌رسد که آیا می‌توان، در این‌جا، در سمت راست، در زیر علامت انتگرال، به‌ازای $A\to\infty$ به‌سمت حد عبور کرد؟

برای این‌که خصلت میل انتگرال درونی را به‌سمت حد خودش بررسی کنیم، انتگرال زیررا درنظر می‌گیریم:

$$\int_{A}^{A'}\frac{۱-\cos ax}{x}\cos(x\sin\theta)dx=$$

$$=\frac{۱}{۲}\int_{A}^{A'}\frac{dx}{x}[۲\cos(x\sin\theta)-\cos(a+\sin\theta)x-\cos|a-\sin\theta|x]=$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[۲\int_{A\sin\theta}^{A'\sin\theta}-\int_{A(a+\sin\theta)}^{A'(a+\sin\theta)}-\int_{A|a-\sin\theta|}^{A'|a-\sin\theta|}\right]\frac{\cos z}{z}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\int_{A\sin\theta}^{A(a+\sin\theta)}-\int_{A'\sin\theta}^{A'(a+\sin\theta)}+\int_{A\sin\theta}^{A|a-\sin\theta|}-$$

$$-\int_{A'\sin\theta}^{A'|a-\sin\theta|}\Big]\frac{\cos z}{z}\,dz$$

با توجه به‌وجود انتگرال $\int_{z_0}^{\infty}\frac{\cos z}{z}dz$ $(z_0>0)$، واضح‌است که، با اختیار A و A' به‌قدر کافی بزرگ، می‌توان این مجموع را، یکباره برای همهٔ مقدارهای θ در بازهٔ بستهٔ دلخواه ـ که شامل ۰ و $\arcsin a$ (در حالت $a\leqslant 1$) نباشد ـ به‌قدر دلخواه کوچک کرد. به‌این‌ترتیب، میل یکنواخت انتگرال درونی به‌سمت حد خودش، به ازای $A\to\infty$، تنها در نزدیکی یکی از دومقدار ۰ و $\arcsin a$ برای θ، از بین می‌رود.

ولی ازسوی دیگر، این انتگرال درونی، به‌وسیلهٔ تابع

$$[\ln\sqrt{|a^2-\sin^2\theta|}-\ln\sin\theta]$$

که در بازهٔ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ انتگرال‌پذیر است، محدود می‌شود؛ یعنی انتگرال بیرونی به‌طور یکنواخت، هم‌برای $\theta=0$ وهم‌برای $\theta=\arcsin a$ (درحالت $a\leqslant 1$)، متقارب می‌شود. آن‌وقت، ازروی قضیهٔ ۱′ شمارهٔ ۵۱۸، گذر حدی مورد نظرمجاز است.

۷) ازاین‌جا، با مشتق‌گیری نسبت به‌پارامتر، به‌انتگرال زیرمی‌رسیم:

$$E=\int_0^{\infty}J_0(x)\sin ax\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}} & (a>1)\\ 0 & (a<1)\end{cases}$$

استدلال مشابه (۵) و با اتکای به‌دستور (۲۱) انجام می‌گیرد. انتگرال، به‌ازای $a=1$، متباعد است.

۸) (a) مجاز بودن یا مجاز نبودن جابه‌جایی انتگرال‌ها را، درحالت زیر، به‌طور مستقیم، تحقیق کنید:

$$J=\int_1^{\infty}dy\int_1^{\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

داریم:

$$\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=1}^{x=\infty} = -\frac{1}{1+y^2}$$

به‌نحوی که

$$J = -\int_1^\infty \frac{dy}{1+y^2} = -\operatorname{arc\,tg} y\Big|_1^\infty = -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

اکنون اگر انتگرال‌ها را جابه‌جا کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\tilde{J} = -\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

که به‌طریق مشابهی به‌دست می‌آید: $\tilde{J}=\frac{\pi}{4}$؛ یعنی جابه‌جایی مجاز نیست.

جالب است یادآوری کنیم (همان‌طور که در **۵۱۷**، ۱) هم دیدیم) که انتگرال

$$\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

برای همهٔ مقدارهای $y \geqslant 1$، نسبت به y، متقارب یکنواخت است. به‌همین ترتیب، تقارب یکنواخت انتگرال

$$\int_1^\infty \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

هم نسبت به x (برای $x \geqslant 1$) ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۵ را به‌این دلیل نمی‌توان در این‌جا به‌کار برد که (به‌طوری که مستقیماً قابل تحقیق است)، انتگرال‌های

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2}dy, \qquad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2}dx$$

انتگرال‌هایی متباعدند.

(b). مجاز نبودن جابه‌جایی انتگرال‌ها، درحالت‌های زیر هم، به‌سادگی قابل اثبات است:

$$\int_1^\infty dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}dy = -1, \qquad \int_0^1 dy \int_1^\infty \frac{y-x}{(x+y)^3}dx = -\frac{1}{2}$$

در این‌جا، انتگرال

$$\int_1^\infty \frac{y-x}{(x+y)^3}dx$$

(همان‌طور که از قضیهٔ ۴ هم روشن است)، نمی‌تواند در بازهٔ $[1, 5]$ نسبت‌به y متقارب یکنواخت باشد (این مطلب، به‌سادگی و به‌طور مستقیم، قابل فهم است).

(c). بازهم مثال ظریفی از همان گونه (هاردی)

$$\int_0^1 dx \int_1^\infty (pe^{-pxy}-qe^{-qxy})dy - \int_1^\infty dy \int_0^1 (pe^{-pxy}-qe^{-qxy})dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-px}-e^{-qx}}{x}dx = \ln\frac{q}{p}^*$$

که اگر $p>0$، $q>0$ و $p\neq q$ فرض شود، برابر صفر نیست.

۹) دو روش تازه، برای محاسبهٔ انتگرال لاپلاس

$$J=\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx$$

می‌آوریم [با **۵۲۲**، ۴° مقایسه کنید].

چون

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^\infty e^{-xy}\sin y\,dy$$

بنابراین، می‌توان J را به‌این‌صورت نوشت:

$$J=\int_0^\infty \cos\beta x\,dx \int_0^\infty e^{-xy}\sin y\,dy$$

که با جابه‌جایی انتگرال‌ها، به‌دست می‌آید:

$$J=\int_0^\infty \sin x\,dy \int_0^\infty e^{-xy}\cos\beta x\,dx = \int_0^\infty \frac{y\sin y}{\beta^2+y^2}dy = \int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{1+x^2}dx$$

---

*) انتگرال فرولانی [۴۹۵، ۱)].

ولی انتگرال آخری، با تقریب یك‌علامت، به‌صورت $\frac{dJ}{d\beta}$ درمی‌آید، به‌طوری که J، به‌طور ساده، در معادلهٔ دیفرانسیلی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dJ}{d\beta} = -J \Rightarrow J = C.e^{-\beta}$$

و چون به‌ازای $\beta = 0$ داریم: $J = C = \frac{\pi}{2}$، بنابراین، سرانجام $J = \frac{\pi}{2}.e^{-\beta}$

بازهم، این مطلب می‌ماند که مجاز بودن جابه‌جایی انتگرال‌ها را ثابت کنیم، اگر $0 < a < A < +\infty$، در آن‌صورت، به‌سادگی می‌توان به‌درستی برابری‌های زیر متقاعد شد:

$$\int_a^A \frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx = \int_a^A \cos\beta x\,dx \int_0^\infty e^{-xy}\sin y\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \sin y\,dy \int_a^A e^{-xy}\cos\beta x\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \sin y\,dy\left[\frac{\beta\sin\beta A - y\cos\beta A}{y^2+\beta^2}e^{-Ay} - \frac{\beta\sin\beta a - y\cos\beta a}{y^2+\beta^2}e^{-ay}\right] =$$

$$= \beta\sin\beta A.\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^2+\beta^2}e^{-Ay}dy - \cos\beta A.\int_0^\infty \frac{y\sin y}{y^2+\beta^2}e^{-Ay}dy -$$

$$-\beta\sin\beta a.\int_0^8 \frac{\sin y}{y^2+\beta^2}e^{-ay}dy + \cos\beta a.\int_0^\infty \frac{y\sin y}{y^2+\beta^2}e^{-ay}dy$$

تقارب یکنواخت همهٔ انتگرال‌ها، به‌ترتیب، نسبت به a و A، امکان می‌دهد که زیر علامت انتگرال، برای $a \to 0$ و $A \to \infty$، به‌سمت حد عبور کنیم. از این‌جا روشن‌است که عبارت مورد نظر، به‌ازای این عبورهای حدی، در واقع، به‌سمت حد $\int_0^\infty \frac{y\sin y}{y^2+\beta^2}dy$ میل می‌کند.

۱۰) با استفاده از اتحاد دیگر

$$\frac{x}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-y}\sin xy\,dy$$

می‌توان نوشت:

$$J=\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{x}dx\int_0^\infty e^{-y}\sin xy\,dy$$

که با جابه‌جا کردن انتگرال‌ها، به‌دست می‌آید:

$$J=\int_0^\infty e^{-y}dy\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx$$

انتگرال درونی، همان «ضریب ناپیوستهٔ» دیریکله است [۴۹۷، ۱۱)]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx=\begin{cases}0 & (0<y<\beta)\\ \frac{\pi}{2} & (0<\beta<y)\end{cases}$$

به‌این ترتیب

$$J=\frac{\pi}{2}\int_\beta^\infty e^{-y}dy=\frac{\pi}{2}e^{-\beta}$$

برای اثبات مجاز بودن جابه‌جایی انتگرال‌ها، ملاحظه کنیم که انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-y}\cdot\frac{\sin xy}{x}\cdot\cos\beta x\,dy$$

نسبت به x، متقارب یکنواخت است (با محدودکنندهٔ ye^{-y}). بنابراین

$$\int_0^A \frac{\cos\beta x}{1+x^2}dx=\int_0^A \frac{\cos\beta x}{x}dx\int_0^\infty e^{-y}\sin xy\,dy=$$

$$=\int_0^\infty e^{-y}dy\int_0^A \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx=$$

آیا در انتگرال اخیر، می‌توان (نسبت به y) به‌ازای $A\to\infty$، در زیر علامت انتگرال به‌سمت حد عبور کرد؟ عبارت زیرانتگرال، عبارت است از حاصل‌ضرب e^{-y} در

$$\int_0^A \frac{\sin xy}{x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^A \frac{\sin(y+\beta)x+\sin(y-\beta)x}{x}dx=$$

$$=\frac{۱}{۲}\left\{\int_{۰}^{(y+\beta)A}\frac{\sin z}{z}dz+\int_{۰}^{(y-\beta)A}\frac{\sin z}{z}dz\right\}$$

و به‌ازای $A\to\infty$، جز در همسایگی $y=\beta$، به‌طور یکنواخت نسبت به y، به‌سمت‌حد خودش میل می‌کند. چون عامل‌دوم، برای‌همهٔ مقدارهای A وy، به‌طور یکنواخت کران‌دار است، بنابراین، عبارت زیرانتگرال، محدودکننده‌ای به‌صورت Ce^{-y} دارد، به‌طوری‌که به ازای $y=\beta$ و $y=\infty$، انتگرال (بیرونی) نسبت بـه A، به طور یکنواخت متقارب می‌شود؛ به‌این ترتیب، عبور به‌سمت حد در زیر علامت انتگرال، وهمراه‌باآن، جابه‌جایی انتگرال‌ها، تایید می‌شود.

۱۱) در پایان، مثال دیگری، برای محاسبهٔ انتگرال بـا روشی ظریف، می‌آوریم. این انتگرال را در نظر می‌گیریم:

$$I=\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

چون داریم:

$$\frac{۱}{x}=\int_{۰}^{\infty}e^{-xy}dy$$

بنابراین

$$I=\int_{۰}^{\infty}\sin x\,dx\int_{۰}^{\infty}e^{-xy}dy=\int_{۰}^{\infty}dy\int_{۰}^{\infty}e^{-xy}\sin x\,dx=$$

$$=\int_{۰}^{\infty}\frac{dy}{۱+y^{۲}}=\frac{\pi}{۲}$$

بپردازیم به‌مسالهٔ قانونی‌بودن‌جا به‌جایی‌انتگرال‌ها. با اختیار $۰<a<A<+\infty$، برابری‌های زیر روشن است:

$$\int_{a}^{A}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{a}^{A}\sin x\,dx\int_{۰}^{\infty}e^{-ay}dy=\int_{۰}^{\infty}dy\int_{a}^{A}e^{-xy}\sin x\,dx=$$

$$=\int_{۰}^{\infty}dy\left\{\frac{y\sin a+\cos a}{۱+y^{۲}}e^{-ay}-\frac{y\sin A+\cos A}{۱+y^{۲}}e^{-Ay}\right\}=$$

$$= \sin a \cdot \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-ay} dy + \cos a \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-ay} dy -$$

$$- \sin A \cdot \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-Ay} dy - \cos A \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} e^{-Ay} dy$$

چون دو انتگرال آخری، نسبت به A (برای $A \geqslant A_0 > 0$)، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شوند؛ بنابراین، با گذر به حد در زیر علامت انتگرال، به ازای $A \to \infty$، می‌بینیم که هر دوی آن‌ها به‌سمت صفر میل می‌کنند. انتگرال دوم، که نسبت به a (برای $a \geqslant 0$) متقارب یکنواخت است، به‌ازای $a \to 0$، به‌روشنی به‌سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند. تنها این می‌ماند که روشن کنیم، انتگرال اول، که در $\sin a$ ضرب شده است، به‌ازای این گذر حدی، به‌سمت صفر میل می‌کند. داریم:

$$\int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} e^{-ay} dy = \int_0^\infty \frac{t}{a^2+t^2} e^{-t} dt = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

$$\int_0^1 < \int_0^1 \frac{t\,dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{2} \ln(1+a^2) - \ln a, \quad \int_1^\infty < \int_1^\infty \frac{dt}{te^t} = C$$

و از این‌جا، نتیجهٔ مطلوب، حاصل می‌شود.

§۴. متمم

۵۲۵. پیش قضیهٔ آرتسه‌لا. اگرچه آن‌چه‌را که در سه بند اول این فصل آوردیم، از لحاظ هدف‌های محاسبه‌ای کافی‌هستند، ولی‌ازدیدگاه نظری، به‌قضیه‌های بازهم‌دقیق‌تری نیاز داریم که، به کمك آن‌ها، بتوان با شرط‌های ساده‌تری از قضیه‌های مورد بررسی استفاده کرد.

از اثبات یك حکم کمکی آغاز می‌کنیم که به‌دستگاه بازه‌ها مربوط می‌شود و به‌آرتسه‌لا (C. Arzelà) تعلق دارد.

پیش قضیه. فرض کنید در بازهٔ متناهی $[a, b]$، دستگاه‌های بازه‌های D_1، D_2، ... ...، D_k، ... واقع باشند، به‌نحوی‌که هرکدام از آن‌ها از تعدادی متناهی از بازه‌های بسته هم‌جوار (یعنی بازه‌هایی که یکدیگر را نپوشانده باشند) تشکیل شده باشد. اگر مجموع طول‌های بازه‌های هردستگاه D_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$، از عدد ثابت و مثبت δ بزرگتر باشد،

دست‌کم یك نقطهٔ $x=c$ پیدا می‌شودکه متعلق به‌مجموعه‌ای نامتناهی از دستگاه‌های D_k باشد.

اثبات. اگر بازه‌های دستگاه $D_k\,(k>1)$ بر بازه‌های دستگاه‌های قبلی D_1، ...، D_{k-1} قرار گیرد و به‌وسیلهٔ دو انتهای هر یك از این بازه‌ها، به‌بخش‌هایی تقسیم شود، آن‌وقت، این بخش‌ها را ازقبل، به‌عنوان بازه‌های جداگانهٔ دستگاه D_k درنظرمی گیریم. به‌این ترتیب، اگـر d' بازه‌ای از دستگاه D_k، و d'' بازه‌ای از دستگاه $D_{k''}$ بـاشد و ضمناً $k'<k''$، آن‌وقت، d' و d'' بر یکدیگر منطبق نیستند و یا d'' در d' قرار دارد.

با وجود این، ممکن است تمامی دستگاه D_{k+1} در دستگاه قبلی D_k واقـع نباشد. چون این وضع مناسب نیست، دستگاه D_k را، طبق قاعدهٔ زیر، با Δ_k از دستگاه‌های‌دیگر بازه‌ها، عوض می‌کنیم. برای به‌دست آوردن Δ_k، D_k را اساس قرار می‌دهیم و، سپس، بازه‌هایی ازدستگاه D_{k+1} را، که در D_k واقع نیستند، به‌آن اضافه‌می‌کنیم، بعدبازه‌هایی از دستگاه D_{k+2} را، که در D_k و D_{k+1} واقع نیستند، و همین‌طور تا بی‌نهایت.

دستگاه Δ_k، که به‌این ترتیب ساخته شده‌است، ممکن‌است شامل مجموعه‌ای‌نامتناهی از بازه‌ها باشد، ولی در عوض: ۱) هر کدام از بازه‌های دستگاه Δ_{k+1} حتماً در یکی از بازه‌های‌دستگاه Δ_k واقع است. دراین‌صورت ۲) مجموع‌طول‌های (یا درست‌تر: مجموع رشته طول‌های) بازه‌های تشکیل‌دهندهٔ Δ_k، به‌طور مسلم، بزرگتر از δ است، همان‌طورکه برای D_k وجود داشت.

گام دوم را در این‌جهت برمی‌داریم که دستگاه‌های Δ_kام را هم با بخش‌های‌متناهی $\Delta^{(k)}$ آن‌هارا عوض می کنیم، به‌نحوی‌که ضمناً، از ویژگی‌های Δ_k (که هم‌اکنون ازآن‌ها نام بردیم)، نخستین ویژگی را نگه می‌داریم. این عمل را به این ترتیب انجام می‌دهیم.

اگر تعداد بازه‌های دستگاه Δ_1 متناهی باشد، درآن‌صورت به‌طورساده، فرض‌می‌کنیم: $\Delta'=\Delta_1$. در حالتی که Δ_1 شامل بی‌نهایت بازه باشد، از Δ_1، دستگاه متناهی Δ' شامل بازه‌های d'_1، d'_2، ...، d'_r را طوری جدا می‌کنیم‌که مجموع طول‌های بازه‌های باقی‌ماندهٔ d'_{r+1}، d'_{r+2}، ... از دستگاه Δ_1، کوچکتر از δ بشود*، بعضی از بازه‌های دستگاه Δ_2، در بازه‌های Δ' قرار دارند، زیرا اگر همهٔ آن‌ها در بازه‌های d'_{r+1}، d'_{r+2}، ... واقع باشند، در آن‌صورت، مجموع طول‌های آن‌ها، علی‌رغم ویژگی دوم دستگاه Δ_k، کوچکتر از δ می‌شود. در حالتی‌که تعداد بازه‌هائی از دستگاه Δ_2، که در Δ' واقع‌اند، متناهی باشد، آن‌وقت دستگاه Δ'' را از آن‌ها تشکیل می‌دهیم. در موردی‌که تعداد این بازه‌ها، نامتناهی

---

*) این عمل را می‌توان، با توجه به‌ویژگی باقی‌مانده رشته‌های متقارب، انجام داد.

باشد، دستگاه متناهی Δ'' را چنان از آن‌ها جدا می‌کنیم که مجموع طول‌های بازه‌های باقی‌مانده در Δ_2 (همراه با بازه‌هایی از آن‌که در Δ' واقع نیستند)، کوچکتر از δ باشد. این‌روش را، مرتباً، باجداکردن دستگاه متناهی Δ''' از Δ_3، ...، دستگاه‌متناهی $\Delta^{(k)}$ از Δ_k، تا بی‌نهایت، ادامه می‌دهیم. ضمناً، هرکدام از بازهای دستگاه $\Delta^{(k+1)}$ در یکی از بازه‌های دستگاه $\Delta^{(k)}$ واقع می‌شود. (دستگاه Δ_k، و در حالت کلی، ویژگی دوم دستگاه D_k را از دست می‌دهد، ولی، در مورد متناهی‌بودن درازای آن، ویژگی اول دستگاه D_k را حفظ می‌کند.)

مرحلهٔ آخر، عبارت است از جدا کردن یك بازهٔ $d^{(k)}$ از دستگاه‌های $\Delta^{(k)}$، به‌نحوی که هر یك از آن‌ها در درون قبلی قرار گیرد.

به‌این ترتیب، بین بازه‌های دستگاه Δ'، دست‌کم، یك بازه پیدا می‌شود (و ما آن‌را d' می‌نامیم) که بازه‌های مجموعه‌ای نامتناهی از دستگاه‌های متوالی، واقع درآن‌باشند. درواقع، اگرچنین نباشد، یعنی در هر بازهٔ Δ'، بازه‌های تنها تعداد محدودی ازدستگاه‌های متوالی واقع باشد، آن‌وقت، همین وضع برای همهٔ دستگاه Δ' به‌طور کامل هم، برقرار خواهد بود (به‌این‌علت که، این دستگاه، از تعدادی متناهی بازه تشکیل شده است). به‌زبان دیگر، می‌توان شمارهٔ بالایی مثل k_0 پیدا کرد، به‌نحوی‌که حتی یك بازهٔ دستگاه $\Delta^{(k_0)}$هم در Δ' واقع نباشد و این، برخلاف ویژگی ۱) دستگاه $\Delta^{(k)}$ است.

در d'، بعضی از بازه‌های Δ'' واقع‌اند (زیرا، درغیر این‌صورت، هیچ بازه‌ای از بازه‌های Δ''' وغیره درآن وجودنخواهد داشت). از این گذشته، دست‌کم یکی‌ازبازه‌های دستگاه Δ''، که در d' قرار دارد (و آن‌را d'' می‌نامیم)، باید دارای آن ویژگی بازهٔ d' ــ که در بالا برآن‌تأکید داشتیم ــ باشد؛ یعنی شامل بازه‌های مجموعهٔ‌نامتناهی‌دستگاه‌های بعدی بشود، زیرا درغیر این‌صورت، d' هم نمی‌توانست این ویژگی را داشته باشد (در این‌جا، بازهم، متناهی‌بودن دستگاه Δ'' دارای نقش است). با ادامهٔ این‌روش، می‌توانیم، به‌ترتیب، از هر دستگاه $\Delta^{(k)}$، بازهٔ $d^{(k)}$ را جدا کنیم که در بازهٔ $d^{(k-1)}$ ــ که قبلاً جدا شده است ــ واقع باشد.

با به‌دست‌آوردن دنباله‌ای ازبازه‌های تودرتوی $d^{(k)}=[a_k,b_k]$ $(k=1,2,3,\ldots)$، همان‌طور که در اثبات پیش‌قضیهٔ مقدماتی ۳۸ دیده‌ایم، می‌توانیم ثابت کنیم که برای متغیرهای یکنوای a_k و b_k، حدهایی وجود دارد:

$$\text{حد}\, a_k=\alpha\leqslant\beta=\text{حد}\, b_k$$

چون دربارهٔ‌طول بازه‌های $d^{(k)}$ چیزی‌نمی‌دانیم‌تا برابری دقیق‌حدی را برقرارکنیم، ولی

روشن است کـه هر نقطهٔ c، که با شرط $\alpha \leqslant c \leqslant \beta$ اختیار شده باشد، به‌همهٔ بازه‌هـای $d^{(k)}$ $(k=1,2,3,\ldots)$ تعلق دارد؛ درعین حال، نقطهٔ c به‌هر دستگاه Δ_k $(k=1,2,3,\ldots)$ هم متعلق است. به‌این ترتیب، بـه‌ازای هر مقدار دلخواه k، نقطهٔ c باید الزاماً (با توجه به‌قاعدهٔ ساختن Δ_k)، بـه دستگاهی مثل D_k، تعلق داشته باشد، کـه در آن‌جا $k' \geqslant k$. از همین‌جا روشن می‌شود که نقطهٔ c به‌مجموعهٔ نامتناهی‌دستگاه‌های D_k تعلق دارد. آن‌چه‌لازم بود، ثابت شد.

۵۲۶. گذر حدی زیر علامت انتگرال. اکنون به جای قضیهٔ *۶ شمارهٔ **۴۳۶**، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم که، در آن، به‌جای میل‌یکنواخت تابع $f_n(x)$ به‌سمت‌حد خود، شرط کلی‌تر کران‌داری آن، گذاشته شده است.

قضیهٔ ۱. (آرتسه‌لا). فرض می‌کنیم، دنبالهٔ تابع‌های

$$f_n(x) \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

در بازهٔ $[a, b]$، انتگرال‌پذیر (به‌معنای ویژه) و کران‌دار باشد:

$$|f_n(x)| \leqslant L \quad (L=\text{const.}, a \leqslant x \leqslant b, \ n=1, 2, 3, \ldots)$$

اگر برای همهٔ xها در $[a, b]$، حد

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

وجود داشته باشد و تابع $\varphi(x)$ هم انتگرال‌پذیر باشد، در آن‌صورت

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

اثبات. ابتدا به‌حالت خاصی می‌پردازیم که تابع‌های $f_n(x)$ غیرمنفی

$$f_n(x) \geqslant 0$$

و دارای حدی برابر صفر باشند:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (1)$$

در این حالت، باید ثابت کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = 0 \qquad (2)$$

با اختیار دنبالهٔ عددهـای مثبت $\eta_n \to 0$، می‌توانیم برای هر n، بازهٔ $[a, b]$ را به‌بخش‌های $d_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \dots, h_n)$ طوری تقسیم کنیم که مجموع پایینی نظیر دارد و

$$s_n = \sum_{i=1}^{h_n} m_i^{(n)} d_i^{(n)*}$$

از آن، در نابرابری زیر صدق کند:

$$0 \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx - s_n < \eta_n$$

آن‌وقت، واضح است که

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f_n(x)\,dx - s_n\right] = 0$$

و برای اثبات (۲)، کافی است ثابت کنیم

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0 \qquad (۳)$$

برای ایـن منظور، عددهای کـوچك دلخواه $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ را انتخاب، و ثابت می‌کنیم، می‌توان چنان شماره‌ای برای N پیدا کرد که، به‌ازای $n \geqslant N$، مجموع طول آن بازه‌های n قسمتی از $d_i^{(n)}$، که نظیر مرز پایینی $m_i^{(n)} \geqslant \varepsilon$ هستند، کوچکتر یا برابر δ باشد. درواقع، اگر این‌طور نباشد، آن‌وقت، برای مجموعهٔ نامتناهی مقدارهای n

$$n = n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$$

مجموع طول‌های آن بازه‌هایی از $d_i^{(n_k)}$، که برای آن‌ها داریم $m_i^{(n_k)} \geqslant \varepsilon$، از δ بزرگتر می‌شود. دربارهٔ دستگاه‌های D_k، که از ایـن بازه‌ها تشکیل شده است، می‌توان پیش‌قضیهٔ شمارهٔ پیش را به‌کار برد. و، بنابرآن، نقطهٔ c را در $[a, b]$ چنان پیدا کرد که به‌مجموعهٔ نامتناهی دستگاه‌های D_k تعلق داشته باشد. بنابراین، برای مجموعهٔ نامتناهی مقدارهای n، نابرابری زیر برقرار است:

$$f_n(x) \geqslant \varepsilon$$

واین، با فرض (۱) که به‌ازای $x = c$ هم باید برقرار باشد، متناقض است.

---

*) خود بازهٔ جزئی را هم با $d_i^{(n)}$ نشان می‌دهیم، طـول آن، $m_i^{(n)}$، عبارت است از $\inf f(x)$ دربازهٔ $d_i^{(n)}$.

بنابراین، شمارهٔ N مذکور وجود دارد؛ $n \geqslant N$ می‌گیریم. شماره‌ها آن بازه‌های n قسمتی را که برای آن‌ها، به‌ترتیب، داریم:

$$m_{i'}^{(n)} < \varepsilon \quad \text{یا} \quad m_{i''}^{(n)} \geqslant \varepsilon$$

با i' و i'' نشان می‌دهیم. با توجه به آن، مجموع زیر را تقسیم می‌کنیم:

$$s_n = \sum_i m_i^{(n)} d_i^{(n)} = \sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} + \sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)}$$

حالا به‌سادگی دیده می‌شود که

$$\sum_{i'} m_{i'}^{(n)} d_{i'}^{(n)} < \varepsilon \cdot \sum_{i'} d_{i'}^{(n)} < \varepsilon(b-a),$$

$$\sum_{i''} m_{i''}^{(n)} d_{i''}^{(n)} \leqslant L \cdot \sum_{i''} d_{i''}^{(n)} < L \cdot \delta$$

زیرا مسلماً $m_i^{(n)} \leqslant L$ (بنابرفرض قضیه). از آن‌جا

$$s_n < \varepsilon(b-a) + L \cdot \delta$$

که، با توجه به‌اختیاری بودن عددهای ε و δ، حکم (۳) را ثابت می‌کند.

حالت کلی، به‌سادگی، به‌همین حالت خاص منجر می‌شود. درواقع، با توجه به‌نابرابری

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - \varphi(x)|\,dx$$

کافی از استدلال فوق، برای تابع غیرمنفی $|f_n(x) - \varphi(x)|$ استفاده کنیم.

نتیجه. وقتی که همهٔ شرطهای قضیه، به‌جز شرط مربوط به‌انتگرال‌پذیری تابع حدی، برقرار باشند، در همهٔ حالت‌ها می‌توان وجود حد متناهی زیر را تایید کرد:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

برای اثبات، کافی است [۳۹] ثابت کنیم که، برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، می‌توان شمارهٔ N را طوری پیدا کرد که، به‌ازای $n'' > n' > N$ داشته باشیم.

$$\left| \int_a^b f_{n''}(x)\,dx - \int_a^b f_{n'}(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_{n''}(x) - f_{n'}(x)]\,dx \right| < \varepsilon$$

ازبرهان خلف استفاده می‌کنیم وفرض می‌کنیم چنین نباشد. آن‌وقت، چنان عدد $\varepsilon_0 > 0$ و چنان دو دنبالهٔ بی‌کران عددهای صعودی n'_m و n''_m $(m = 1, 2, 3, \dots)$؛ $(n''_m > n'_m)$ وجود دارند که همیشه داشته باشیم:

$$\left| \int_a^b [f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)]\, dx \right| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (۴)$$

ازطرف دیگر

$$|f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)| \leqslant L \text{ و } \lim_{m \to \infty} [f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)] = 0$$

اگرقضیهٔ قبل را درمورد تابع

$$f^*_m(x) = f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)$$

به‌کار بریم، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b f^*_m(x)\, dx = \lim_{m \to \infty} \int_a^b f_{n''_m}(x) - f_{n'_m}(x)]\, dx = 0$$

که متناقض با رابطهٔ (۴) است و، این تناقض، حکم ما را ثابت می‌کند.

از پارامتر n، که تنها مقدارهای طبیعی را اختیار می‌کند، به‌سادگی می‌توان خود را به‌پارامتر دلخواه y رسانید [با قضیهٔ ۱ شمارهٔ ۵۰۶ مقایسه کنید].

قضیهٔ ۲. فرض می‌کنیم، تابع $f(x, y)$، که برای مقدارهای x از بازهٔ $[a, b]$ و مقدارهای y ازحوزهٔ $\mathcal{Y}$ معین‌است، نسبت به‌x در $[a, b]$ (وبرای y ثابت) انتگرال‌پذیر باشد و، ضمناً، برای همهٔ مقدارهای مفروض x و y، به‌طور یکنواخت کران‌دار باشد:

$$f(x, y) \leqslant L \quad (L = \text{const.})$$

اگر برای همهٔ xها، تابع حدی*

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

وجود داشته باشد و در $[a, b]$ انتگرال‌پذیر هم باشد، درآن صورت داریم:

---

*) ضمناً، این فرض هم مسلماً وجود دارد که، در حوزهٔ $\mathcal{Y}$، می‌توان به‌ازای $y \to y_0$، به‌سمت حد عبور کرد.

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx \qquad (۵)$$

کافی است قضیهٔ ۱ را درمورد تابع $f_n(x) = f(x, y_n)$ به‌کار ببریم، که در آن، $\{y_n\}$ عبارت است ازدنبالهٔ دلخواه مقدارهای y از $\mathcal{Y}$، که به‌سمت y_0 میل می‌کند. رابطهٔ

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x, y_n)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

که ازاین راه به‌دست می‌آید، هم‌ارز با (۵) است.

۵۲۷: مشتق‌گیری زیرعلامت انتگرال. براساس قضیهٔ آرتسه‌لا، نتیجهٔ زیرهم، به‌عنوان مشابه وتعمیم قضیهٔ ۳ شمارهٔ **۵۰۷**، به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۳. فرض می‌کنیم: تابع $f(x, y)$، که در مستطیل $[a, b; c, d]$ معین‌است، در بازهٔ $[a, b]$ و به‌ازای y ثابت دلخواه از $[c, d]$، نسبت به x انتگرال‌پذیر باشد. به‌جز این، فرض می‌کنیم‌که در تمامی حوزهٔ، مشتق جزئی $f'_y(x, y)$ وجود داشته و نسبت به x انتگرال‌پذیر باشد. اگر این مشتق، به‌عنوان تابعی با دو متغیر، کران‌دار باشد

$$|f'_y(x, y)| \leqslant L \quad (L = \text{const.};\ a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d)$$

درآن صورت، برای y دلخواه از $[c, d]$، برای تابع

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

خواهیم داشت:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx$$

اثبات. با اختیارمقداردلخواه $y = y_0$، شبیه اثبات شمارهٔ **۵۰۷** [(۱۱) رابببینید]، خواهیم داشت:

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\,dx$$

چون، با توجه به‌قضیهٔ لاگرانژ داریم:

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f'_y(x, y_0 + \theta k)$$

بنابراین، تابع زیرانتگرال، که به k و x بستگی دارد، به‌ازای همهٔ مقدارهای این‌متغیرها

(از لحاظ قدرمطلق)، با ثابت L کران‌دار می‌شود. با توجه به‌قضیهٔ ۲، می‌توانیم، به‌ازای $k \to 0$، زیرعلامت انتگرال، به‌سمت حد عبور کنیم، که نتیجهٔ مطلوب را به‌ما می‌دهد.

۵۲۸. انتگرال‌گیری زیر علامت انتگرال. در این مورد، قضیهٔ ۴ شمارهٔ ۵۰۸ هم، به‌صورت تعمیم‌یافتهٔ خود، برقرار است.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم، تابع $f(x, y)$ که در مستطیل $[a, b; c, d]$ معین است، نسبت به x در $[a, b]$ (برای y ثابت) و نسبت به y در $[c, d]$ (برای x ثابت)، انتگرال‌پذیر باشد. اگر علاوه بر آن، تابع $f(x, y)$، برای همهٔ مقدارهای قابل قبول x و y، کران‌دار باشد:

$$|f(x, y)| \leqslant L \quad (L = \text{const.})$$

در آن‌صورت، دو انتگرال تکراری

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

وجود دارند و با هم برابرند.

اثبات. فرض می‌کنیم:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx, \quad K(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

دنبالهٔ دلخواهی از تقسیم بازهٔ $[c, d]$ را به‌بخش‌هایی با طول‌های

$$\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_{h_n}^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

در نظر می‌گیریم، تنها با این شرط که $\max\{\delta_i^{(n)}\}$، با ترقی n، به‌سمت صفر میل کند. درهریك از بخش‌های i گانه ($i = 1, 2, \ldots, h_n$) تقسیم nام، مقدار $y = y_i^{(n)}$ را به‌دلخواه اختیار می‌کنیم و مجموع انتگرالی را برای تابع $I(y)$ تشکیل می‌دهیم:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{h_n} I(y_i^{(n)}) \cdot \delta_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{h_n} \left\{ \int_a^b f(x, y_i^{(n)})dx \right\} \cdot \delta_i^{(n)} =$$

$$= \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^{h_n} f(x, y_i^{(n)}) \cdot \delta_i^{(n)} \right\} dx$$

اگر فرض کنیم:

$$\sum_{i=1}^{h_n} f(x, y_i^{(n)}).\delta_i^{(n)} = f_n^*(x)$$

در آن‌صورت، σ_n به‌این‌صورت نوشته می‌شود:

$$\sigma_n = \int_a^b f_n^*(x)dx$$

چون حد زیر به‌روشنی وجود دارد:

$$\lim_{n\to\infty} f_n^*(x) = \int_c^d f(x, y)dy = K(x) \qquad (۶)$$

و علاوه بر آن، برای همهٔ مقدارهای x و n داریم:

$$|f_n^*(x)| \leqslant L.(d-c)$$

بنابراین، با توجه به‌نتیجهٔ شمارهٔ **۵۲۶**، نتیجهٔ مربوط به‌وجود حد

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

را به‌دست می‌آوریم.

بنابراین، تقسیم بازه به‌بخش‌ها هرچه باشد (فقط با این شرط که بزرگترین آن‌ها به‌سمت صفر میل کند) و $y_i^{(n)}$ هر جور انتخاب شود، این حد وجود دارد. از این‌جا روشن است که این حد، در همهٔ حالت‌ها، باید یکی باشد، یعنی انتگرال زیر وجود دارد:

$$\int_c^d I(y)dy = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^*(x)dx$$

به‌همین ترتیب می‌توان وجود انتگرال $\int_a^b K(x)dx$، یعنی انتگرال‌پذیری تابع حدی $f_n(x)$ را ثابت کرد [(۶) را ببینید]. آن وقت، می‌توان از قضیهٔ ۱، برای $f_n^*(x)$ استفاده کرد و، سرانجام، به‌دست آورد:

$$\int_c^d I(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^*(x)dx = \int_a^b K(x)dx$$

یعنی

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

ما در این‌جا، به‌حالت انتگرال‌های ویژه، اکتفا کردیم. در واقع، براساس همین قضیه‌هایی که ثابت کردیم، می‌توان آن‌ها را، برای حالت انتگرال‌های ناویژه هم، تعمیم داد، ولی ما به‌آن نخواهیم پرداخت.

§۵. انتگرال‌های اولر

۵۲۹. انتگرال اولر نوع اول.

انتگرال به‌صورت

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad (1)$$

که در آن $a>0$ و $b>0$، (بنا به‌پیشنهاد لژاندر) به‌این نام معروف شده‌است و تابعی دومتغیره از پارامترهای a و b: تابع β («بتا»).

همان‌طور که می‌دانیم [۴۸۳، ۳)، (a)]، این‌انتگرال برای مقدارهای مثبت a و b (حتی اگر کمتر از واحد باشند)، متقارب* و، بنابراین، می‌تواند اساس تعریف تابع β به‌حساب آید. بعضی از ویژگی‌های آن‌را می‌آوریم.

۱°. قبل از همه، و تقریباً به‌طور مستقیم (با تبدیل $x=1-t$) به‌دست می‌آید:

$$\beta(a, b) = \beta(b, a)$$

یعنی تابع β نسبت به a و b متقارن است.

۲°. به‌کمک انتگرال‌گیری جزء به‌جزء از دستور (۱)، به‌ازای $b>1$، پیدا می‌کنیم:**

$$\beta(a, b) = \int_0^1 (1-x)^{b-1}d\frac{x^a}{a} =$$

$$= \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\Bigg|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx =$$

---

*) برعکس، اگرحتی مقداریکی از پارامترهای a و b کوچکتر یا برابر صفر باشد، انتگرال متباعد می‌شود.

**) در این‌جا، از اتحاد زیر استفاده کرده‌ایم،

$$x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)$$

$$=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=$$

$$=\frac{b-1}{a}\beta(a,b-1)-\frac{b-1}{a}\beta(a,b)$$

از آن‌جا

$$\beta(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}\beta(a,b-1) \qquad (2)$$

از این دستور، می‌توان به‌منظور کوچکتر کردن ــ تا زمانی که b بزرگتر از واحد باشد ــ استفاده کرد. به‌این ترتیب، همیشه می‌توان به‌حالتی رسید که آوند دوم (یعنی b) کوچکتر یا مساوی واحد باشد.

البته، در مورد آوند اول هم می‌توان به‌همین نتیجه رسید، زیرا، با توجه به تقارن β نسبت به a ، b ــ می‌توان دستور کاهشی دیگری را هم نوشت ($a>1$):

$$\beta(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}\beta(a-1,b) \qquad (2')$$

اگر b برابر عددطبیعی n باشد، می‌توانیم با استفادهٔ مکرر از دستور (۲)، به‌دست آوریم:

$$\beta(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdots\frac{1}{a+1}\cdot\beta(a,1)$$

ولی

$$\beta(a,1)=\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a}$$

بنابراین، برای $\beta(a,n)$ و، ضمناً، برای $\beta(n,a)$، به این عبارت می‌رسیم:

$$\beta(n,a)=\beta(a,n)=\frac{1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)} \qquad (3)$$

اگر a هم برابر عدد طبیعی m باشد، در آن‌صورت

$$\beta(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

اگر ۰ را بـا عدد ۱ نشان دهیم، از این دستور، بـرای $m=1$ و $n=1$ هم، می‌توان استفاده کرد.

۳°. برای تابع β، نمایش تحلیلی دیگری می‌دهیم، که اغلب می‌تواند مفید باشد. اگر در انتگرال (۱)، تبدیل $x=\frac{y}{1+y}$ را انجام دهیم، که در آن، y متغیر تازه‌ای است که از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند، در آن‌صورت، به‌دست می‌آید:

$$\beta(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy \qquad (۴)$$

۴°. در دستور (۴) فرض می‌کنیم: $b=1-a$، با به‌حساب آوردن $0<a<1$، به‌دست می‌آید:

$$\beta(a,1-a)=\int_0^{\infty}\frac{y^{a-1}}{1+y}dy$$

خواننده، محاسبهٔ این انتگرال را، کـه بازهم با نام اولر شناخته می‌شود، می‌داند [**۵۱۹**، ۴)، (a) یا **۵۲۲**، ۱° را ببینید]؛ که با در نظر گرفتن آن، به‌این دستور می‌رسیم:

$$\beta(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0<a<1) \qquad (۵)$$

اگر، به‌خصوص، $a=1-a=\frac{1}{2}$ اختیار کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi \qquad (۵a)$$

ما از بین ویژگی‌های بسیار تابع «بتا»، به‌همین مقدار اکتفا می‌کنیم، زیرا، همان‌طور که خواهیم دید، می‌توان آن‌را برحسب تابع دیگری ــ تابع «گاما» ــ بیان کرد که موضوع اصلی بحث ما در این بند است.

۵۳۰. انتگرال اولر نوع دوم. این نام‌گذاری، به‌وسیلهٔ لژاندر، به‌انتگرال معروف

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx \qquad (۶)$$

داده شده است، به‌ازای $a>0$ دلخواه، متقارب است* [**۴۸۳**، ۵ (c)] و تابع Γ («گاما»)

*) این انتگرال، به‌ازای $a\leqslant 0$، متباعد است.

را تعریف می‌کند. تابع Γ، بعد از تابع‌های مقدماتی، یکی از مهم‌ترین تابع‌ها، برای آنالیز و کاربردهای آن است. مطالعهٔ ویژگی‌های تابع Γ، با آغاز از تعریف انتگرالی (۶) آن، درعین‌حال، می‌تواند مثال زیبائی ازکاربرد نظریهٔ انتگرال‌های وابسته به‌پارامتر باشد.

ما قبلاً، درفصل‌های یازدهم و دوازدهم[۴۰۲، ۱۰)؛ ۴۰۸، ۴۴۱، ۱۱)]، باتابع Γ برخورد کرده‌ایم، ولی آن را به‌صورت دیگری تعریف کردیم. قبل از هر کار، یکی بودن دو تعریف را (البته، برای $a>0$) نشان می‌دهیم.

در (۶)، با فرض $x=\ln\frac{1}{z}$، به‌دست می‌آید:

$$\Gamma(a)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1}dz$$

همان‌طورکه معلوم است [۷۷، ۵)، (b)]

$$\ln\frac{1}{z}=\lim_{n\to\infty}n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)$$

ضمناً، عبارت $n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)$، با ترقی n، صعودی است و به سمت حد خودش میل می‌کند*. در این حالت، براساس ۵۱۸، برابری

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty}n^{a-1}\int_0^1\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}dz$$

یا ـ اگر به‌تبدیل $z=y^n$ متوسل شویم، برابری زیر درست است:

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty}n^a\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy$$

ولی بنابر (۳)

$$\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy=B(n,a)=\frac{1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n-1)}$$

---

*) با روش محاسبهٔ دیفرانسیلی، با درنظرگرفتن عبارت $\frac{1-z^\alpha}{\alpha}$ به‌عنوان تابعی‌از α، می‌توان به‌این‌مطلب قانع شد.

به‌این ترتیب، سرانجام، به‌دستور معروف اولر ـ گوس می‌رسیم:

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^a\cdot\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)}{a(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n-1)} \qquad (7)$$

که قبلاً، برای ما، آغاز کار بود [۴۰۲، (۱۴)]. همان‌طور که گفتیم، از این به بعد، ویژگی‌های تابع Γ را از روی نمایش انتگرالی (۶) آن، بیرون خواهیم آورد.

۵۳۱. ویژگی‌های سادهٔ تابع Γ. ۱°. تابع $\Gamma(a)$، به‌ازای همهٔ مقدارهای $a>0$ پیوسته است و دارای مشتق‌های پیوسته، از همهٔ مرتبه‌ها، می‌باشد.

کافی‌است تنها وجود مشتق‌ها را ثابت کنیم. با مشتق‌گیری انتگرال (۶)، زیر علامت انتگرال، حاصل می‌شود:

$$\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx \qquad (8)$$

به‌این جهت از قاعدهٔ لایب نیتس می‌توان استفاده کرد که هر دو انتگرال

$$\int_0^1 x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx,\quad \int_1^\infty x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx$$

به‌طور یکنواخت نسبت به a متقارب‌اند: اولی به‌ازای $x=0$ و برای $a\geqslant a_0>0$ (با محدود کنندهٔ $x^{a_0-1}|\ln x|$) و دومی به ازای $x=\infty$ و برای $a\leqslant A<+\infty$ (با محدود کنندهٔ $x^{A}\cdot e^{-x}$)*.

به‌همین ترتیب، می‌توان به‌وجود مشتق دوم هم قانع شد:

$$\Gamma''(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot(\ln x)^2\cdot e^{-x}dx \qquad (8^*)$$

و همین‌طور، برای مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر.

۲°. از (۶)، با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، فوراً به‌دست می‌آید:

$$a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx=x^ae^{-x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty x^ae^{-x}dx$$

یعنی [با ۴۰۲، (۱۵) مقایسه کنید].

---

*) برای $x>0$ واضح است که $\ln x<x$.

$$\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a) \qquad (۹)$$

اگر از این دستور، پشت‌سرهم استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\Gamma(a+n)=(a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a\cdot\Gamma(a) \qquad (۱۰)$$

این دستور به‌ما امکان می‌دهد که محاسبهٔ Γ را، وقتی با مقدارهای بزرگ آوند سر و کار داریم، به‌محاسبهٔ Γ برای آوندکوچکتر از واحد، منجر کنیم.

اگر در (۱۰) فرض کنیم $a=۱$ و در نظر بگیریم که

$$\Gamma(۱)=\int_{۰}^{\infty}e^{-x}dx=۱ \qquad (۱۱)$$

آن‌وقت، معلوم می‌شود که

$$\Gamma(n+۱)=n! \qquad (۱۲)$$

تابع Γ عبارت است از گسترش طبیعی فاکتوریل $n!$ ــ در حوزهٔ مقدارهای مثبت دلخواه آوند ــ که تنها برای مقدارهای طبیعی n تعریف شده است.

۳°. **مسیر تغییر تابع Γ.** اکنون می‌توانیم دربارهٔ رفتار تابع $\Gamma(a)$، وقتی که a از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند، تصوری کلی پیدا کنیم.

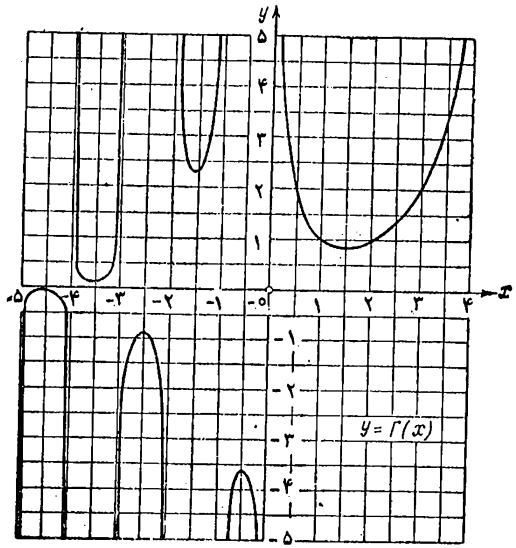
از (۱۱) و (۱۲) داریم: $\Gamma(۱)=\Gamma(۲)=۱$، به‌طوری که بنابر قضیهٔ رول، ریشهٔ $a_۰$ مشتق $\Gamma'(a)$، باید بین ۱ و ۲ واقع باشد. این مشتق، همیشه صعودی است، زیرا مشتق دوم آن $\Gamma''(a)$، همان‌طور که از (*۸) دیده می‌شود، همیشه مثبت است. درنتیجه، به‌ازای $۰<a<a_۰$، مشتق $\Gamma'(a)$ منفی و تابع $\Gamma(a)$ نزولی و، به‌ازای $a_۰<a<+\infty$، مشتق $\Gamma'(a)$ مثبت و تابع $\Gamma(a)$ صعودی است، به‌ازای $a=a_۰$، می‌نیمم وجود دارد. می‌توان محاسبه کرد (و ما در این‌جا به‌آن نمی‌پردازیم):

$$a_۰=۱/۴۶۱۶\cdots \quad \min\Gamma(a)=\Gamma(a_۰)=۰/۸۸۵۶\cdots$$

حالت‌های حدی را هم باید پیدا کنیم: وقتی که a به ۰ یا ∞ نزدیک می‌شود. از (۱۱) [و از ۱°] واضح است که، به‌ازای $a\to ۰$، داریم:

$$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(a+۱)}{a}\to+\infty$$

از طرف دیگر، با توجه به (۱۲)، تنها وقتی که داشته باشیم $a>n+۱$ خواهیم داشت $\Gamma(a)>n!$، یعنی به‌ازای $a\to+\infty$ داریم: $\Gamma(a)\to+\infty$.



شکل ۶۴

نمودار تابع $\Gamma(a)$، در شکل ۶۴ داده شده است (فعلاً بخشی از آن برای ما جالب است که در ربع اول دستگاه مختصات واقع باشد).

۴°. بستگی بین تابع‌های β و Γ. برای این که این بستگی را برقرار کنیم، با تبدیل $x = ty$ $(t > 0)$، (۶) را به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-ty}\, dy \qquad (۱۳)$$

در این‌جا، اگر a را به $a+b$ و t را به $1+t$ تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y}\, dy$$

دو طرف این برابری را در t^{a-1} ضرب می‌کنیم و، سپس، از ۰ تا ∞ نسبت به t انتگرال می‌گیریم:

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\, dt = \int_0^\infty t^{a-1}\, dt \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y}\, dy$$

در انتگرال سمت چپ، تابع $\beta(a, b)$ را می‌بینیم [(۴) را ببینید]. در سمت راست،

انتگرال‌ها را جابه‌جا می‌کنیم. در نتیجه (با درنظرگرفتن (۱۳) و (۶))، به‌دست‌می‌آید:

$$\Gamma(a+b)\cdot\beta(a,b)=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}dy\int_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt=$$

$$=\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy=\Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)$$

و از آن‌جا

$$\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad (۱۴)$$

این‌روش ظریف برای رابطهٔ اولر، متعلق به‌دیریکله است. ضمناً، برای مستدل‌کردن آن، باید ثابت کرد که جابه‌جا کردن انتگرال‌ها، مجاز است.

این‌مطلب‌را، ابتدا، برای $a>1$ و $b>1$ ثابت می‌کنیم. دراین‌صورت، برای‌تابع

$$t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}$$

همهٔ شرط‌های نتیجهٔ شمارهٔ **۵۲۱** برقرارند: این تابع، برای $y\geqslant 0$ و $t\geqslant 0$، پیوسته (و ضمناً مثبت) است؛ انتگرال‌های

$$t^{a-1}\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy=\Gamma(a+b)\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

و

$$y^{a+b-1}e^{-y}\int_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt=\Gamma(a)y^{b-1}e^{-y}$$

هم به‌نوبهٔ خود، تابع‌هایی پیوسته‌می‌شوند: اولی نسبت‌به t برای $t\geqslant 0$، دومی نسبت‌به‌y برای $y\geqslant 0$. استناد به‌نتیجهٔ نامبرده، جابه‌جایی انتگرال‌ها و، همراه با آن، دستور(۱۴) را، برای $a>1$ و $b>1$، تایید می‌کند.

در حالتی‌که فقط بدانیم: $a>0$ و $b>0$، بنابه آن‌چه ثابت‌کردیم، داریم:

$$\beta(a+1,b+1)=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}$$

از این‌جا، با استفاده از دستورهای کاهشی (۲) و (۲′) برای تابع β، و (۹) برای تابع

Γ، دوباره به‌دستور (۱۴)، بدون محدودیت‌های غیرلازم، می‌رسیم.

۵°. دستور تکمیلی. اگر در دستور (۱۴) فرض کنیم: $b=1-a$ (با به‌حساب آوردن $0<a<1$)، درآن‌صورت، با توجه به (۵) و (۱۱)، به‌دست می‌آید:

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (15)$$

[با ۴۰۸، (۳۰) مقایسه کنیم]، که دستور تکمیلی نامیده می‌شود.

اگر $a=\frac{1}{2}$ بگیریم، از این‌جا، پیدا می‌کنیم (چون $\Gamma(a)>0$):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad (16)$$

اگر در انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz=\sqrt{\pi}$$

تبدیل $z=x^2$ را انجام دهیم، آن‌وقت، دوباره انتگرال اولر-پواسون را به‌دست می‌آوریم:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

۶°. به‌عنوان کاربرد دستور تکمیلی (همراه با اولر)، مقدار حاصل‌ضرب زیر را تعیین می‌کنیم (n، عدد طبیعی دلخواهی است):

$$E=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

اگر این حاصل‌ضرب را، به‌ترتیب عکس بنویسیم:

$$E=\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

آن‌وقت، از ضرب دو عبارت در یکدیگر، به‌دست می‌آید:

$$E^2=\prod_{\nu=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right)$$

در مورد هر یك از حاصل‌ضرب‌های $\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right)$، دستور تکمیلی را به‌کار می‌بریم؛ به‌دست می‌آید:

$$E^{۲}=\frac{\pi^{n-۱}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{۲\pi}{n}\dots\sin(n-۱)\frac{\pi}{n}}$$

اکنون، برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب سینوس‌ها [با انتهای شمارهٔ ۴۹۳ مقایسه کنید]، این اتحاد را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{z^{n}-۱}{z-۱}=\prod_{\nu=۱}^{n-۱}\left(z-\cos\frac{۲\nu\pi}{n}-i\sin\frac{۲\nu\pi}{n}\right)$$

و در آن، z را به‌سمت ۱ میل می‌دهیم. در حد خواهیم داشت:

$$n=\prod_{\nu=۱}^{n-۱}\left(۱-\cos\frac{۲\nu\pi}{n}-i\sin\frac{۲\nu\pi}{n}\right)$$

و یا با برابر قراردادن مدول‌ها:

$$n=\prod_{\nu=۱}^{n-۱}\left|۱-\cos\frac{۲\nu\pi}{n}-i\sin\frac{۲\nu\pi}{n}\right|=۲^{n-۱}\prod_{\nu=۱}^{n-۱}\sin\frac{\nu\pi}{n}$$

به‌نحوی که

$$\prod_{\nu=۱}^{n-۱}\sin\frac{\nu\pi}{n}=\frac{n}{۲^{n-۱}}$$

که اگر این مقدار را، در عبارت $E^{۲}$ قرار دهیم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$E=\prod_{\nu=۱}^{n-۱}\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)=\frac{(۲\pi)^{\frac{n-۱}{۲}}}{\sqrt{n}} \qquad (۱۷)$$

۷°. انتگرال رابِ (J. L. Raabe) محاسبهٔ انتگرال مهم

$$R_{۰}=\int_{۰}^{۱}\ln\Gamma(a)da$$

هم به‌دستور تکمیلی مربوط می‌شود. این انتگرال وجود دارد، زیرا [(۹) را ببینید]

$$\ln\Gamma(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln a$$

با تبدیل a به $a-1$ می‌توان نوشت:

$$R_0=\int_0^1 \ln\Gamma(1-a)da$$

و با جمع کردن

$$2R_0=\int_0^1 \ln\Gamma(a)\Gamma(1-a)da=\int_0^1 \frac{\pi}{\sin a\pi}da=$$

$$=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x dx=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$$

که با قراردادن مقدار معلوم انتگرال [۴۹۲، ۱°]، به‌دست می‌آید:

$$R_0=\int_0^1 \ln\Gamma(a)da=\ln\sqrt{2\pi} \qquad (18)$$

دا آب، انتگرال زیر را (به‌ازای $a>0$) در نظر گرفت

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(a)da=\int_0^{a+1}-\int_0^a$$

از آن‌جا که، به‌روشنی، داریم:

$$R'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln a$$

[(۹) را ببینید]، بنابراین، با انتگرال‌گیری برای $a>0$، به‌دست می‌آید:

$$R(a)=a(\ln a-1)+C$$

ولی $R(a)$، پیوستگی خود را بـرای $a=0$ هم حفظ می‌کند؛ اگـر حد آن را، به‌ازای $a\to 0$، به‌دست آوریم، معلوم می‌شود که $C=R_0$ و، با توجه به‌دستور (۱۸)، به‌دستور دا آب می‌رسیم:

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(a)da=a(\ln a-1)+\ln\sqrt{2\pi} \qquad (19)$$

۸°. دستور لژاندر. اگر در انتگرال

$$\beta(a,a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx$$

تبدیل $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$ را انجام دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\beta(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}dt=\frac{1}{2^{2a-1}}\beta\left(\frac{1}{2},a\right)$$

در هر دو حالت، تابع β را با مقدار آن در (۱۴)، عوض می‌کنیم:

$$\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}$$

که اگر دو طرف را به $\Gamma(a)$ ساده کنیم و به‌جای $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ مقدارش $\sqrt{\pi}$ را قرار دهیم [(۱۶) را ببینید]، به‌دستور لژاندر می‌رسیم:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\cdot\Gamma(2a) \qquad (20)$$

۵۳۲. تعریف یك ارزشی تابع Γ به‌کمك ویژگی‌های آن. می‌دانیم که تابع $\Gamma(a)$ همراه با مشتق خود، برای مقدارهای مثبت آوند، پیوسته است. علاوه بر آن، این تابع، در معادله‌های تابعی زیر صدق می‌کند [(۹)، (۲۰) و (۱۵)]:

$$\text{(I)}\quad \Phi(a+1)=a\Phi(a),$$

$$\text{(II)}\quad \Phi(a)\Phi\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Phi(2a),$$

$$\text{(III)}\quad \Phi(a)\Phi(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

ثابت می‌کنیم، این ویژگی‌ها، روی هم، تابع Γ را کاملا مشخص می‌کنند (به‌طوری‌که، هر تابعی که دارای این ویژگی‌ها باشد، متحد با Γ است).

ضمناً، تنها ویژگی (I) و (II) کافی نیستند، زیرا به‌جز Γ، تابع

$$\Phi(a)=\Gamma(a).(۴sin^{۲}a\pi)^{\mu} \quad (\mu>۰)$$

هم با آن‌ها سازگار است. به همین ترتیب، ویژگی‌های (II) و (III) هم، کافی نیستند، زیرا درمورد تابع زیرهم صدق می‌کنند:

$$\Phi(a)=\Gamma(a).z^{a-\frac{۱}{۲}} \quad (z>۰)$$

بالاخره، در ویژگی‌های (I) و (III) هم، به‌روشنی، قیدی برای مقدارهای تابع $\Phi(a)$، به‌ازای $a<\frac{۱}{۲}>۰$، وجود ندارد. اگر هرسه ویژگی وجود داشته باشند، مسأله طور دیگری می‌شود. ضمناً، به‌جای ویژگی (III) می‌توان تقاضای ضعیف‌تری را قرار داد، به‌این معنا که فرض کنیم تابع $\Phi(a)$، به‌ازای $a>۰$، به‌سمت ۰ میل نمی‌کند، چیزی که‌از (III) به‌سادگی نتیجه می‌شود*.

به‌این‌ترتیب، فرض می‌کنیم: تابع $\Phi(a)$، برای $a>۰$، مخالف صفر و همراه با مشتق خود، پیوسته باشد و، ضمناً، در رابطه‌های (I) و (II) هم صدق کند. ثابت می‌کنیم که، در این‌صورت، $\Phi(a)\equiv\Gamma(a)$.

فرض می‌کنیم: $\Phi(a)=M(a).\Gamma(a)$؛ روشن است که تابع $M(a)$ هم مخالف صفر و، همراه با همهٔ مشتق‌های خود، پیوسته است. علاوه بر آن، چون $\Phi(a)$ و $\Gamma(a)$، هردو، درشرط‌های (I) و (II) صدق می‌کنند، بنابراین، $M(a)$ هم باید در رابطه‌های زیر صدق کند:

$$(I')\ M(a+۱)=M(a) \text{ و } (II')\ M(a)M\left(a+\frac{۱}{۲}\right)=M(۲a)$$

از (I') روشن است که، به‌ازای $a\to ۰$، برای $M(a)$ حدمتناهی وجود دارد. اگر این حد را $M(۰)$ بگیریم، آن‌وقت $M(a)$، همراه با مشتق خود، تا $a=۰$، یکسره پیوسته می‌شود.

توجه کنیم که از (II')، به‌ازای $a=\frac{۱}{۲}$، نتیجه می‌شود: $M\left(\frac{۱}{۲}\right)=۱$، یعنی برای

---

*) برای $a<۱>۰$، رعایت این تقاضا، برای سایرمقدارهای a، نتیجه‌ای است از (I).

همهٔ مقدارهای $a \geqslant 0$ داریم: $M(a) > 0$. واین، بهما حق می‌دهد که تابع زیررا درنظر بگیریم:

$$L(a) = \ln M(a)$$

که با مشتق خود، برای $a \geqslant 0$، پیوسته است، ولی درشرطهای زیرصدق می‌کند:

$$(I'')\ L(a+1) = L(a) \text{ و } (II'')\ L(a) + L\left(a+\frac{1}{2}\right) = L(2a)$$

بالاخره، این تابع پیوسته راهم وارد می‌کنیم:

$$\Delta(a) = L'(a)$$

که دررابطه‌های زیرصدق می‌کند:

$$(I''')\ \Delta(a+1) = \Delta(a) \text{ و } (II''')\ \Delta(a) + \Delta\left(a+\frac{1}{2}\right) = 2\Delta(2a)$$

از (II''')، با تبدیل a به $\frac{a}{2}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta\left(\frac{a}{2}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{2}\right)\right\} = \Delta(a)$$

کنون، اگر در این‌جا، a را ابتدا به $\frac{a}{2}$ و سپس به $\frac{a+1}{2}$ تبدیل و برابری‌های حاصل را جمع کنیم، درآن صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4}\left\{\Delta\left(\frac{a}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+2}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+3}{4}\right)\right\} = \Delta(a)$$

وبا روش استقرای ریاضی، رابطهٔ کلی به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{2^n-1}\Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right) = \Delta(a)$$

ولی، هرچه باشد a، مجموع سمت‌چپ را می‌توان به‌عنوان مجموع انتگرالی برای انتگرال

$$\int_0^1 \Delta(x)dx^*$$

*) ضمناً، با به‌حساب آوردن تناوب تابع $\Delta(a)$ بنابر (I''').

در نظر گرفت. به‌این جهت

$$\Delta(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{0}^{2^n-1}\Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right)=\int_0^1\Delta(x)\,dx=L(1)-L(0)=0$$

[با توجه به $(1'')$]. دراین حالت $L(a)=\text{const}$، و به‌همین ترتیب $M(a)=\text{const}$. ولی دیدیم که $M\left(\frac{1}{2}\right)=1$، بنابراین، $M(a)=1$ و $\Phi(a)=\Gamma(a)$.

درخاتمه، بازهم یادآوری می‌کنیم که تقاضای مشتق‌پذیری، نقشی اساسی به‌عهده دارد و نمی‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. اگرمثلاً، فرض کنیم:

$$L(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin(2^n\pi a)$$

در آن صورت، $L(a)$ تابعی پیوسته خواهد بود که با شرطهای (I'') و (II'') سازگار است. درضمن خواهیم داشت: $L(0)=0$ و $L\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$، به‌نحوی که $L(a)$ به‌سمت مقدار ثابتی متقارب نمی‌شود.

۵۳۳ خصلت‌های تابعی دیگر تابع Γ. درشمارهٔ پیش دیدیم که: تابع $\Gamma(a)$ تابعی است منحصر به فرد که، همراه با مشتق خود، پیوسته است و در معادله‌های تابعی (I) و (II) صدق می‌کند و برابر صفر (برای $a>0$) نمی‌شود. دراین‌جا هم، خصلت ساده‌تری از تابع $\Gamma(a)$ را می‌دهیم. این خصلت، تنها با استفادهٔ ازمعادلهٔ تابعی (۱) به‌دست‌می‌آید، ولی‌شرط «تحدب لگاریتمی» را ـ به‌مفهومی‌که شرح خواهیم داد ـ به‌آن اضافه می‌کنیم.

در شمارهٔ **۱۴۱**، تعریف تابع محدب $f(x)$ داده شده بود. تابع مثبت $f(x)$، که در بازهٔ $\mathfrak{D}$ داده شده است، از نظر لگاریتمی محدب نامیده می‌شود (در همین بازه)، وقتی که لگاریتم آن $\ln f(x)$، تابعی محدب باشد. چون داریم:

$$f(x)=e^{\ln f(x)}$$

بنابراین، با توجه به **۱۴۲**، ۳°، ازتحدب لگاریتمی تابع $f(x)$، تحدب خودآن تابع نتیجه می‌شود. عکس این مطلب، همیشه درست نیست. به‌این ترتیب، تابع‌های محدب لگاریتمی، تنها بخشی از تمامی تابع‌های محدب را تشکیل می‌دهند.

بااستفاده از قضیهٔ ۲ شمارهٔ **۱۴۳**، می‌توان شرط تحدب لگاریتمی را معین کرد: فرض کنید تابع مثبت $f(x)$، همراه با مشتق خود، در بازهٔ $\mathfrak{D}$، پیوسته و، ضمناً، در درون بازه، دارای مشتق دوم متناهی $f''(x)$ باشد، آن‌وقت، برای تحدب لگاریتمی تابع $f(x)$

در $\mathfrak{D}$، لازم و کافی است که در درون $\mathfrak{D}$ داشته باشیم:

$$f(x).f''(x)^{۲}-[f'(x)]^{۲}\geqslant ۰$$

اثبات، از به‌کاربردن قضیهٔ مذکور درمورد تابع $\ln f(x)$ به‌دست می‌آید.

اکنون به‌تابع $\Gamma(a)$ برمی‌گردیم. مشتق‌های اول ودوم این تابع، با دستورهای (۸) و (۸*) بیان می‌شوند. با توجه به‌نابرابری لباچوسکی [۳۲۱، (۱۳′)؛ ۴۸۳، ۷)] داریم:

$$\int_a^b[\varphi(x)]^{۲}dx.\int_a^b[\psi(x)]^{۲}\,dx-\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^{۲}\geqslant ۰$$

که اگر در آن فرض کنیم:

$$a=۰,\ b=\infty;\ \varphi(x)=\sqrt{x^{a-۱}e^{-x}},\ \psi(x)=\sqrt{x^{a-۱}e^{-x}}.\ln x$$

به‌دست می‌آید:

$$\Gamma(a).\Gamma''(a)-[\Gamma'(a)]^{۲}\geqslant ۰$$

به‌این‌ترتیب، با توجه به‌شرطی که هم‌اکنون آوردیم، تابع $\Gamma(a)$ در بازهٔ $(۰,\infty)$، یك تابع محدب لگاریتمی است. بااین ویژگی و با توجه به‌معادلهٔ (۱)، می‌توان تابع Γ را با تقریب یك ضریب ثابت، تعریف کرد. به‌زبان دیگر:

اگر ۱) $\Phi(a)$، در بازهٔ $(۰,\infty)$، در معادلهٔ (۱) صدق کند

$$\Phi(a+۱)=a.\Phi(a)$$

۲) $\Phi(a)$، تحدب لگاریتمی داشته باشد، و

۳) داشته باشیم: $\Phi(۱)=۱$، آن‌وقت خواهیم داشت: $\Phi(a)=\Gamma(a)$.

فرض کنیم، برای $\Phi(a)$، همهٔ این شرطها برقرار باشند.

اگر از معادلهٔ (۱) پشت‌سرهم استفاده کنیم، به‌برابری کلی زیرمی‌رسیم:

$$\Phi(a+n)=(a+n-۱)(a+n-۲)\ \dots\ (a+۱)a.\Phi(a)\qquad(۲۱)$$

که در آن، n عدد طبیعی دلخواهی است. از این‌جا، با فرض $a=۱$ [۳] را ببینید] و با تبدیل n به $n-۱$، داریم:

$$\Phi(n)=(n-۱)!\qquad(۲۲)$$

یادآوری می‌کنیم که اثبات انطباق $\Phi(a)$ بر $\Gamma(a)$، برای بازهٔ $(۰,۱]$ کافی است، زیرا

بنا بر (۱)، این دو تابع در همه‌جا برهم منطبق خواهند شد. بنابراین، فرض می‌کنیم: $0 < a \leqslant 1$. نابرابری (۶) شمارهٔ ۱۴۳ را به‌یاد می‌آوریم:

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

که برای تابع محدب $f(x)$، تنها با شرط $x_1 < x_2$، برقرار است.* اگر این نابرابری را دوبار درمورد تابع محدب $\ln \Phi(a)$ به‌کار بریم، به‌ازای $n \geqslant 2$ و با توجه به (۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{\ln\Phi(-1+n)-\ln\Phi(n)}{(-1+n)-n} \leqslant \frac{\ln\Phi(a+n)-\ln\Phi(n)}{(a+n)-n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\ln\Phi(1+n)-\ln\Phi(n)}{(1+n)-n}$$

ویا، با توجه به (۲۲):

$$\ln(n-1) \leqslant \ln \frac{\Phi(a+n)-\ln(n-1)!}{a} \leqslant \ln n$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\ln(n-1)^a\cdot(n-1)! \leqslant \ln\Phi(a+n) \leqslant \ln n^a\cdot(n-1)!$$

یعنی

$$(n-1)^a\cdot(n-1)! \leqslant \Phi(a+n) \leqslant n^a\cdot(n-1)!$$

اکنون، با توجه به‌خود مقدار $\Phi(a)$، به‌کمك دستور (۲۱)، به‌این نابرابری می‌رسیم:

$$\frac{(n-1)\cdot(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \leqslant \Phi(a) \leqslant \frac{n^a\cdot(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$$

بالاخره، با تبدیل n به $n+1$ در اولین آن‌ها، نابرابری حاصل را، به‌صورت

$$\Phi(a) \leqslant n^a \frac{1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \leqslant \Phi(a)\cdot\frac{a+n}{n}$$

---

*) درست است که، در جای خود، فرض شده بود $x_1 < x < x_2$، ولی بدون هیچ اشکالی می‌توان فهمید که نابرابری مزبور، برای هرموضع دلخواه x، تنها با این شرط که بین x_1 یا x_2 منطبق نباشد، درست است.

درمی‌آوریم. ازاین‌جا، واضح است که

$$\Phi(a)=\lim_{n\to\infty} n^a\cdot\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}=\Gamma(a)$$

با توجه به‌رابطهٔ (۷) اولر-پواسون.

۵۳۴. مثال‌ها. ۱) این انتگرال را پیدا کنید:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx\quad (p, q, m>0)$$

راهنمائی. با فرض $x^m=y$، آن را به‌انتگرال اولر، نوع اول تبدیل می‌کنیم.

پاسخ: $\dfrac{1}{m}\beta\left(\dfrac{p}{m}, q\right)=\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\dfrac{p}{m}+q\right)}$.

پیشنهاد می‌کنیم که، به‌کمك این نتیجه، مثلاً ثابت کنید که برای n طبیعی دلخواه داریم:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}\cdot\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}=\frac{\pi}{2n}\quad\text{(اولر)}$$

۲) مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[\alpha x+\beta(1-x)+\gamma]^{p+q}}\,dx\quad(\alpha, \beta\geqslant 0;\ \gamma, p, q>0)$$

به‌کمك تبدیل

$$\frac{(\alpha+\gamma)x}{\alpha x+\beta(1-x)+\gamma}=t,\quad \frac{(\beta+\gamma)(1-x)}{\alpha x+\beta(1-x)+\gamma}=1-t,$$

$$\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)\,dx}{[\alpha x+\beta(1-x)+\gamma]^2}=dt$$

انتگرال مفروض، بدین صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{\beta(p,q)}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}$$

۳) این انتگرال‌ها را پیدا کنید:

$$\text{(a)}\ \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\,dx \quad (a,b,p>0), \qquad \text{(b)}\ \int_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\,dx \quad (m,n>0)$$

راهنمائی. (a) تبدیل $y=(1+p)\dfrac{x}{x+p}$؛ (b) تبدیل $u=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$.

پاسخ: (a) $\dfrac{1}{(1+p)^a\cdot p^b}\beta(a,b)$؛ (b) $2^{m+n-2}\beta(m,n)$.

ازهمین‌جا، می‌توان به‌نوبهٔ خود، به یك رشته انتگرال‌های جالب رسید. مثلاً، اگر در (b) فرض کنیم: $n=1-m$ و $2m-1=\cos 2\alpha$ و، سپس، تبدیل $x=tg\,\varphi$ را انجام دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\right)^{\cos 2\alpha} d\varphi = \frac{\pi}{2\sin(\pi\cos^2\alpha)}$$

۴) این انتگرال‌ها را پیدا کنید:

$$\text{(a)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cdot\cos^{b-1}\varphi\,d\varphi \quad (a,b>0)$$

$$\text{(b)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}\varphi\,d\varphi \quad (a>0)$$

$$\text{(c)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^c\varphi\,d\varphi \quad (|c|<1)$$

حل. (a) با فرض $x=\sin\varphi$، انتگرال مفروض، چنین می‌شود:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b}{2}-1}\,dx$$

که اگر ازمسألهٔ ۱) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{a-1}\varphi cos^{b-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

(b) با فرض $b=1$ در (a) نتیجه می‌شود:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{a-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}$$

این نتیجه را می‌توان، به‌کمك دستور لژاندر، به‌این صورت نوشت:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{a-1}\varphi\, d\varphi = 2^{a-2}\frac{\Gamma\left[\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)} = 2^{a-2}\beta\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$$

(c) بالاخره با فرض $a=1+c$ و $b=1-c$ در (a)، که در آن $|c|<1$، با استفاده از دستور تکمیلی، داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^c\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}$$

۵) مساحت شکل P، محدود به‌منحنی زیررا پیداکنید:

$$r^4 = sin^2\theta cos\theta$$

حل. منحنی دوبخش دارد: دربع اول وربع‌سوم. کافی است مساحت یکی‌ازآن‌ها را دوبرابر کنیم. با توجه به‌دستور مساحت، درمختصات قطبی [۳۳۸، (۹)] داریم:

$$P = 2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\frac{2}{2}}\theta cos^{\frac{1}{2}}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$$

[مسألهٔ ۴) (a) ورابطه‌های (۹)، (۱۲) و (۱۵) را ببینید].

۶) مطلوب است تعیین (a) مساحت P محدود به‌یکی ازحلقه‌های منحنی (m، عدد

---

*) به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که هردو رابطهٔ (۸) شمارهٔ **۳۱۲**، حالت‌های خاصی از این رابطه‌اند.

طبیعی است):

$$r^m = a^m \cos m\theta$$

و (b) درازای S این حلقه.

حل. (a)

$$P = ۲ \times \frac{a^۲}{۲} \int_۰^{\frac{\pi}{۲m}} \cos^{\frac{۲}{m}} m\theta \, d\theta = \frac{a^۲}{m} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{\frac{۲}{m}} \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{a^۲}{m} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{۲} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{۱}{m} + \frac{۱}{۲}\right)}{\Gamma\left(\frac{۱}{m} + ۱\right)} = \frac{\pi a^۲}{m\sqrt{۴}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{۲}{m}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{۱}{m}\right)\right]^۲}$$

[مسألهٔ ۴) (b) ورابطه‌های (۹) و (۲۰) را ببینید].

(b) بنابه‌رابطهٔ مربوط به‌طول کمان درمختصات قطبی [۳۲۹، (۴b)] داریم:

$$S = ۲a \int_۰^{\frac{\pi}{۲m}} \cos^{\frac{۱}{m}-۱} m\theta \, d\theta = \frac{۲a}{m} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{\frac{۱}{m}-۱} \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{a}{m} \cdot ۲^{\frac{۱}{m}-۱} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{۱}{۲m}\right)\right]^۲}{\Gamma\left(\frac{۱}{m}\right)}$$

[مسألهٔ ۴) (b) را ببینید].

۷) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید:

$$\text{(a)} \int_۰^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{۳ - \cos\theta}},$$

$$\text{(b)} \int_۰^{\pi} \left(\frac{\sin\varphi}{۱ + k\cos\varphi}\right)^{a-۱} \frac{d\varphi}{۱ + k\cos\varphi} \quad (a > ۰,\ ۰ < k < ۱)$$

(a). راهنمائی. تبدیل $\cos\theta = ۱ - ۲x$.

پاسخ: $\frac{۱}{۴\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{۱}{۴}\right)\right]^۲$.

(b). راهنمائی. تبدیل $tg\frac{\varphi}{۲}=\sqrt{\frac{۱-k}{۱+k}}\,tg\frac{\theta}{۲}$.

پاسخ. $\frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{۲}\right)\right]^{۲}}{\Gamma(a)}\cdot\frac{۲^{a-۱}}{(۱-k^{۲})^{\frac{a}{۲}}}$.

۸) ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{۱}(۱-x^{۳})^{-\frac{۱}{۲}}dx=\sqrt{۳}\int_{۱}^{\infty}(x^{۳}-۱)^{-\frac{۱}{۲}}dx$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{۱}(۱-x^{۳})^{-\frac{۱}{۲}}dx=I_{۱},\int_{۱}^{\infty}(x^{۳}-۱)^{-\frac{۱}{۲}}dx=I_{۲},$$

$$\int_{-\infty}^{۰}(۱-x^{۳})^{-\frac{۱}{۲}}dx=\int_{۰}^{\infty}(۱+x^{۳})^{-\frac{۱}{۲}}dx=I_{۳}$$

درنتیجه، باید این برابری را ثابت کنیم:

$$I_{۱}+I_{۳}=\sqrt{۳}I_{۲}$$

اگر در این انتگرال‌ها، به ترتیب، از تبدیل‌های $x=t^{\frac{۱}{۳}}$، $x=t^{-\frac{۱}{۳}}$ و $x=(t^{-۱}-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ استفاده کنیم، همهٔ آن‌ها به انتگرال اولر نوع اول منجر می‌شوند. بعد، تنها باید از دستور تکمیلی، چندبار استفاده کرد.

۹) این رابطه را (که به‌دیریکله تعلق دارد) ثابت کنید:

$$\Gamma(r)\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-fx}x^{s-۱}}{(g+x)^{r}}dx=\Gamma(s)\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-gy}y^{r-۱}}{(f+y)^{s}}dy\quad(f,s,g,r>۰)$$

راهنمائی. قرار دهید

$$\frac{\Gamma(r)}{(g+x)^{r}}=\int_{۰}^{\infty}e^{-(g+x)y}y^{r-۱}dy,\ \frac{\Gamma(s)}{(f+y)^{s}}=\int_{۰}^{\infty}e^{-(f+y)x}x^{s-۱}dx$$

و از جابه‌جائی انتگرال‌ها، نسبت به x و نسبت به y (در حالت تابع‌های مثبت)، استفاده کنید.

۱۰) درمسالهٔ ۱۲) شمارهٔ ۵۱۱، این اتحاد را ثابت کردیم:

$$\mathbf{EK'}+\mathbf{E'K}-\mathbf{KK'}=c=\text{const}.$$

(درمورد نشانه‌گذاری‌ها، به‌جای مربوطه مراجعه کنید). سپس، به‌کمك یك گذر به‌حد، ثابت شده بود: $c=\frac{\pi}{2}$. همین نتیجه را، می‌توان با محاسبهٔ سمت‌چپ برابری، به‌ازای مقدار خاصی از k، به‌دست آورد.

$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ می‌گیریم، آن‌وقت‌خواهیم داشت: $k'=k$، $\mathbf{E'}=\mathbf{E}$، $\mathbf{K'}=\mathbf{K}$واتحاد مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$2\mathbf{EK}-\mathbf{K}^2=(2\mathbf{E}-\mathbf{K})\mathbf{K}=c$$

انتگرال‌های

$$\mathbf{K}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\quad\text{و}\quad\mathbf{E}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

با تبدیل‌های متوالی $t=\cos\varphi$ و $x=t^4$، به‌انتگرال‌های اولرنوع اول منجرمی‌شوند:

$$\mathbf{K}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx+\int_0^1 x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx\right\}$$

به‌نحوی که

$$2\mathbf{E}-\mathbf{K}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

وازاین‌جا، مقدار ثابت مطلوب، به‌دست می‌آید:

$$c=\frac{1}{8}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}$$

۱۱) این انتگرال‌ها را به‌صورت رشته بسط دهید:

$$\text{(a)}\ \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx,\quad (s>1) \qquad \text{(b)}\ \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx,\quad (s>0)$$

حل. داریم:

$$\text{(a)}\ \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx = \int_0^\infty x^{s-1}\sum_1^\infty e^{-nx}\,dx =$$

$$= \sum_1^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx = \Gamma(s)\cdot\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} = \Gamma(s)\cdot\zeta(s)$$

به‌شرطی که مجموع رشتهٔ آخر را، طبق معمول با $\zeta(s)$ (تابع «زتا»ی ریمان) نشان دهیم. دراین‌جا، ازقضیهٔ مربوط به‌انتگرال‌گیری رشته‌های مثبت [۵۱۸] و دستور (۱۳) استفاده کردیم.

$$\text{(b)}\ \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx = \Gamma(s)\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

(با محدود کنندهٔ: $\frac{2x^{s-1}}{e^x+1}$).

درحالت $s>1$، این نتیجه را می‌توان به‌این صورت نشان داد:

$$\Gamma(s)(1-2^{1-s})\cdot\zeta(s)$$

زیرا

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}(1-2^{1-s}) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} - 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n)^s} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

۱۲) نوعی تعمیم مثال‌های قبل، ما را به‌بسط‌های زیرمی‌رساند:

$$\text{(a)}\ \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx = \Gamma(s)\cdot\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(a+n)^s} \quad (s>1,\ a>0)$$

[(۱۱) (a) را می‌توان ازاین‌جا، به‌ازای $a=1$، به‌دست آورد]؛

$$\text{(b)}\ \int_0^\infty \frac{zx^{s-1}\,dx}{e^x-z} = \Gamma(s)\cdot\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^s}$$

$$(-1\leqslant z<1, s>0 \text{ یا } z=1, s>1)$$

[ازاین‌جا، ۱۱) (a) به‌ازای $z=1$ و ۱۱) (b) به‌ازای $z=-1$ به‌دست می‌آید.]

۱۳) اگر رشتهٔ هیپرژئومتریك [۴۴۱، ۶) را ببینید]

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\times 2\times\cdots\times n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

را به $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ نشان دهیم، این رابطه را ثابت کنید (گوس):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\beta)}$$

با فرض $\alpha>0$ و $\gamma-\alpha>0$، این انتگرال را درنظر می‌گیریم:

$$I(x)=\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}\,dz$$

به‌ازای $0<x<1$. چون رشتهٔ

$$(1-zx)^{-\beta}=\sum_0^{\infty}\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\times 2\times\cdots\times n}x^n z^n$$

نسبت به z (به ازای x تثبیت شده) دربازهٔ $[0, 1]$، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود، بنابراین، بعد ازضرب در تابع $z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\beta-1}$ (که دراین بازه انتگرال‌پذیر است) می‌توان از رشتهٔ حاصل، جمله به‌جمله انتگرال گرفت. به‌این بسط می‌رسیم:

$$I(x)=\sum_0^{\infty}I_n\cdot x^n$$

که در آن داریم:

$$I_n=\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\times 2\times\cdots\times n}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+n)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)}=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\times 2\times\cdots\times n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

[(۱۰) را ببینید]. به‌این ترتیب

$$I(x)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

برای به‌دست آوردن دستور گوس، کافی است در این‌جا، به‌ازای $x \to 1$ (با توجه به $\gamma-\alpha-\beta>0$)، به‌سمت حد برویم. این عبور حدی رشته را، می‌توان از روی قضیهٔ آبل [۴۳۷، ۶°]، جمله‌به‌جمله، انجام داد. در انتگرال‌هم، این‌عبور حدی، با توجه به‌وجود محدودکنندهٔ $z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}$ (برای $\beta\leqslant 0$) و یا $z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$ (برای $\beta>0$)، می‌تواند در زیر علامت انتگرال انجام گیرد.

در نتیجه [(۱۴) را ببینید]:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot F(\alpha,\beta,\gamma,1)$$

که از آن‌جا، رابطهٔ موردنظر، ثابت می‌شود.

از این رابطه، در حالت خاص $\gamma=1$ و $\alpha=-\beta$ [با در نظرگرفتن (۱۱)، (۹) و (۱۵)]، بسط جالب زیر به‌دست می‌آید ($0<\alpha<1$):

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}=1-\frac{\alpha^2}{1}+\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)}{(1\times 2)^2}-\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)(\alpha^2-4)}{(1\times 2\times 3)^2}+\dots *$$

۵۳۵. مشتق لگاریتمی تابع Γ. با ادامهٔ بررسی ویژگی‌های تابع Γ، به‌بررسی مشتق لگاریتمی آن، یعنی عبارت زیر می‌پردازیم:

$$\frac{d\ln\Gamma(a)}{da}=\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

۹°. نمایش‌های گوناگون این‌عبارت به‌صورت انتگرال‌ها را، می‌توان از رابطه‌های (۸) به‌دست آورد. ولی اگر از ملاحظه‌های زیر آغاز کنیم، کار ساده‌تر می‌شود. داریم:

$$\Gamma(b)-\beta(a,b)=\Gamma(b)-\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\frac{\Gamma(b)\cdot b}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}=$$

$$=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}$$

به‌طوری که اگر در این‌جا، به‌ازای $b\to 0$، به‌سمت حد برویم

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\lim_{b\to 0}[\Gamma(b)-\beta(a,b)]$$

ابتدا انتخاب می‌کنیم [(۶) و (۴) را ببینید]:

---

*) این نتیجه را می‌توان از تبدیل حاصل‌ضرب نامتناهی معلوم برای سینوس‌هم به‌دست آورد. [۴۰۸]

$$\Gamma(b)=\int_0^{\infty}x^{b-1}e^{-x}dx,\quad \beta(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}dx$$

آن‌وقت

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\lim_{b\to+0}\int_0^{\infty}x^{b-1}\left[e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]dx$$

و با گذر به‌حد در زیر علامت انتگرال، به‌رابطهٔ کوشی می‌رسیم:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_0^{\infty}\left[e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^{a}}\right]\frac{dx}{x}\qquad(۲۳)$$

برای تایید مجازبودن گذر به‌حد، توجه می‌کنیم که، در نزدیکی $x=0$ و $b=0$، عبارت

$$\frac{1}{x}\left[e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]$$

تابعی‌است پیوسته از x و b و، ضمناً، $x^b<1$؛ و برای xهای به‌قدکافی بزرگ و $b\leqslant b_0$ دارای این محدودکننده است:

$$x^{b_0-1}\left[\frac{1}{(1+x)^{a}}-e^{-x}\right]$$

اگر هم، در عبارت (۱)، ابتدا تبدیل $x=e^{-t}$ را برای β انجام دهیم:

$$\beta(a,b)=\int_0^{\infty}e^{-at}(1-e^{-t})^{b-1}dt$$

آن‌وقت، می‌توان نوشت:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\lim_{b\to+0}\int_0^{\infty}[e^{-x}x^{b-1}-e^{-ax}(1-e^{-x})^{b-1}]dx$$

در این‌جا، باگذر به‌حد در زیرعلامت انتگرال (که مجازبودن آن، به‌ترتیب مشابهی‌قابل تایید است)، به‌دستور دیگری می‌رسیم:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right)dx\qquad(۲۴)$$

برعکس، می‌توان عبارت‌های نمائی را از تابع زیر انتگرال برداشت. برای این منظور، در (۲۳) فرض می‌کنیم: $a=1$:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=\Gamma'(1)=\int_0^1\left[e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right]\frac{dx}{x}=-C$$

که در آن، C را مقدار ثابت اولر گویند*. اگر این برابری را، جمله به‌جمله، از (۲۳) کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+C=\int_0^\infty\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x}$$

که بالاخره، تبدیل $t=\frac{1}{1+x}$، ما را به‌دستور گوس می‌رساند:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+C=\int_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}dt \qquad (۲۵)$$

۵۳۶. قضیهٔ ضرب برای تابع Γ. ۱۰°. باتوجه به‌نمایش (۲۵) برای مشتق لگاریتمی اکنون دستور زیر را، که بازهم به گوس تعلق دارد، ثابت می‌کنیم:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na) \qquad (۲۶)$$

(n، عدد طبیعی دلخواهی است). این دستور، معرف قضیهٔ ضرب برای تابع Γ است.

اگر در (۲۵) فرض کنیم $t=u^n$، خواهیم داشت:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+C=n\int_0^1\frac{u^{n-1}-u^{na-1}}{1-u^n}du$$

از آن‌جا، اگر a را به $a+\frac{\nu}{n}$ تبدیل کنیم ($\nu=0,1,2,\dots,n-1$):

$$\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}+C=n\int_0^1\frac{u^{n-1}-u^{na+\nu-1}}{1-u^n}du$$

---

*) در فصل یازدهم [۳۶۷، ۱۰)]، برای این ثابت، تعریف دیگری داشتیم. یکی بودن دو تعریف را، بعداً ثابت خواهیم کرد.

که اگر نسبت به ν، از ۰ تا $n-1$ با هم جمع کنیم:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}+nC=n\int_0^1\left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n}-\frac{u^{na-1}}{1-u}\right]du$$

که اگر آن‌را با برابری

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}+C=\int_0^1\frac{1-u^{na-1}}{1-u}du$$

مقایسه کنیم، با ضرب برابری اخیر در n و کم کردن آن از برابری قبلی، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}-n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}=n\int_0^1\left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n}-\frac{1}{1-u}\right]du=$$

$$=-n\ln\frac{1-u^n}{1-u}\Big|_0^1=-n\ln n$$

که می‌توان آن‌را این‌طور نوشت:

$$\frac{d}{da}\ln\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=-n\ln n$$

و با انتگرال گیری به‌دست می‌آید:

$$\ln\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=-an\log n+\ln C^*$$

یا

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=\frac{C}{n^{na}}$$

---

*) با پیش‌بینی آنتی‌لگاریتم، از قبل، ثابت غیرمشخص را، به‌صورت $\ln C$ می‌نویسیم.

برای تعیین ثابت C فرض می‌کنیم: $a=\frac{۱}{n}$. روشن‌است که $C=n\mathbf{E}$، و در آن، $\mathbf{E}$ همان حاصل‌ضرب اولر است که در ۵۳۱، ۶° محاسبه کردیم؛ و اگر مقدار آن‌را از (۷) در نظر بگیریم، به‌دستور (۲۶) می‌رسیم.

دستور لژاندر (۲۰)، که مستقلاً به‌دست آمد، حالت خاصی است از دستور گوس درواقع، اگردر (۲۶)، $n=۲$ بگیریم، به‌دستورزیر ــ که هم‌ارز (۲۰) است ــ می‌رسیم:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\sqrt{۲\pi}}{۲^{۲a-\frac{۱}{۲}}}\Gamma(۲a)$$

۵۳۷. بعضی رشته‌ها و ضرب‌ها. ۱۱°. سرچشمهٔ این بحث، همان‌دستور (۲۵)است. عبارت زیر انتگرال را، به‌صورت رشته، بسط می‌دهیم:

$$\frac{۱-t^{a-۱}}{۱-t}=(۱-t^{a-۱})\sum_{\nu=۰}^{\infty}t^{\nu}=\sum_{\nu=۰}^{\infty}(t^{\nu}-t^{a+\nu-۱})$$

که همهٔ جمله‌های آن دارای یك علامت می‌باشند. با انتگرال‌گیری جمله به‌جمله، به‌دست می‌آید:

$$D\ln\Gamma(a)+C=\sum_{\nu=۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{\nu+۱}-\frac{۱}{a+\nu}\right) \qquad (۲۷)$$

این رشته، به‌ازای $۰<a\leqslant a_{۰}$، متقارب یکنواخت است، زیرا به‌وسیلهٔ رشتهٔ $\sum_{۱}^{\infty}\frac{۱}{\nu^{۲}}(a_{۰}+۱)$ محدود می‌شود.

اگر از آن، نسبت به a، جمله‌به‌جمله مشتق بگیریم، در آن‌صورت، بسطی را به‌دست می‌آوریم که، از لحاظ سادگی، بسیار مهم است:

$$D^{۲}\ln\Gamma(a)=\sum_{\nu=۰}^{\infty}\frac{۱}{(a+\nu)^{۲}} \qquad (۲۸)$$

چون این رشته هم، برای $a>۰$، به‌طور یکنواخت متقارب می‌شود (محدودکننده: $\sum_{\nu=۱}^{\infty}\frac{۱}{\nu^{۲}}$)، پس مشتق‌گیری جمله به‌جمله مجاز است.

۱۲°. با انتگرال‌گیری جمله به جمله از رشتهٔ (۲۷)، نسبت به a و از ۱ تا $a>۰$

(که با توجه به‌تقارب یکنواخت رشته، مجاز است)، به‌دست می‌آوریم:

$$\ln\Gamma(a)+C(a-1)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{\nu+1}-\ln\frac{a+\nu}{\nu+1}\right) \qquad (29)$$

که اگر a را به $a+1$ تبدیل کنیم، (به‌ازای $a>-1$)، می‌توانیم بسط را به‌این‌صورت بنویسیم:

$$\ln\Gamma(a+1)+Ca=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}-\ln\frac{a+n}{n}\right)$$

و یا

$$\ln\frac{1}{\Gamma(a+1)}=Ca+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)-\frac{a}{n}\right]$$

اگر ازاین‌جا، آنتی‌لگاریتم بگیریم، به‌رابطهٔ ویرشتراس می‌رسیم، که از قبل برای ما معلوم است [بـا ۴۵۲، (۱۶) مقایسه کنید] و مربـوط به‌بسط $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$ به‌حاصل‌ضرب نامتناهی است:

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}=e^{Ca}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}\quad(a>-1) \qquad (30)$$

۱۳°. بـه (۲۹) برمی‌گردیم و $a=2$ می‌گیریم. چـون $\ln\Gamma(2)=\ln 1=0$، بنابراین داریم:

$$C=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1}-\ln\frac{\nu+2}{\nu+1}\right) \qquad (31)$$

درضمن توجه کنیم که، ازاین‌جا

$$C=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]$$

و دوباره به‌همان تعریف ثابت اولر می‌رسیم، که ازقبل می‌دانستیم [**۳۶۷**، ۱۰)]

بالاخره، با ضرب (۳۱) در $a-1$ وکم‌کردن جمله به‌جمله از (۲۹)، C را حذف می‌کنیم:

$$\ln\Gamma(a)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(a-1)\ln\frac{\nu+2}{\nu+1}-\ln\frac{a+\nu}{\nu+1}\right]=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left[n^{a-1} \frac{1\times 2\times\cdots\times(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-2)} \right]$$

ویا

$$\ln\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \ln\left[n^{a} \frac{1\times 2\times\cdots\times(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \right]$$

ازاین‌جا وبا آنتی‌لگاریتم گرفتن، دوباره به‌دستور (۷) اولر-پواسون می‌رسیم، که قبلاً به‌طریق دیگری آن را پیدا کرده بودیم.

۵۳۸. مثال‌ها و یادداشت‌های اضافی. ۱) با استفاده از

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

ثابت کنید که (به‌ازای $a>0$) داریم:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

وازآن‌جا، دستور (۷) را به‌دست آورید.

راهنمائی. رابطهٔ حدی را، شبیه آن‌چه در مسأله‌های ۱۰) و ۱۱) شمارهٔ **۵۱۹** داشتیم، پیدا کنید؛ سپس، با تبدیل $\tau = \frac{t}{n}$، انتگرال را به‌این صورت بنویسید:

$$\int_0^n t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^a \int_0^1 \tau^{a-1}(1-\tau)\,d\tau = n^a\cdot\beta(a, n+1)$$

وبعد، از دستور (۳) استفاده کنید.

۲) از دستور (۲۳)؛

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a} \right]\frac{dx}{x}$$

مستقیما، دستور (۲۴) را نتیجه بگیرید:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} \right] du$$

به‌این نکته توجه کنیم که، دراین‌جا، دشواری کار مربوط به‌این است که انتگرال

(۲۴) را نمی‌توان همچون تفاضل دو انتگرال مورد بررسی قرار داد (وگرنه، مساله با تبدیل دوم $x=e^u-1$ به‌پایان می‌رسید).

به‌این جهت، راهی غیرمستقیم انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}-\int_\varepsilon^\infty \frac{dx}{(1+x)^a\cdot x}\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u}=\int_{\ln(1+\varepsilon)}^\infty \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\,du\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty\left[\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\right]du=\int_0^\infty\left[\frac{e-u}{u}-\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\right]du$$

زیرا داریم:

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon}\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\,du=0$$

واین، ازآن‌جا روشن می‌شود که می‌توان انتگرال را با عبارت زیرارزیابی کرد:

$$\frac{\varepsilon-\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{a-1}}<\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)^{a-1}}$$

۳) باآغاز از تعریف ثابت اولر به‌صورت

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}-\ln n\right)$$

دستورهای انتگرالی زیررا ثابت کنید:

$$\text{(a)}\quad C=\int_0^1(1-e^{-x})\frac{dx}{x}-\int_1^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

$$\text{(b)}\quad C=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+u}-e^{-u}\right)\frac{du}{u}$$

چون داریم:

$$\sum_1^n\frac{1}{\nu}=\int_0^1\sum_1^n t^{\nu-1}\,dt=\int_0^1\frac{1-t^n}{1-t}\,dt=\int_0^1\frac{1-(1-s)^n}{s}\,ds,$$

$$\ln n=\int_{1}^{n}\frac{ds}{s}$$

بنابراین

$$C=\lim_{n\to\infty}\left[\int_{0}^{1}\frac{1-(1-s)^n}{s}\,ds-\int_{1}^{n}\frac{ds}{s}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{0}^{n}\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{dx}{x}-\int_{1}^{n}\frac{dx}{x}\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{0}^{1}\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{dx}{x}-\int_{1}^{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\frac{dx}{x}\right\}$$

گذرحدی در انتگرال دوم، شبیه‌حالت مربوط ۱) است. دربارهٔ تبدیل (a) به (b)، ۲) را ببینید.

۴) فرض می‌کنیم (به‌ازای $a>0$ و $s>1$):

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^s}$$

ثابت کنید که

$$\lim_{s\to 1+0}\left[\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}\right]=-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

داریم [۵۳۴، ۱۲ (a)]:

$$\zeta(s,a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx$$

بنابراین

$$\zeta(s,a)-\frac{1}{s-1}=\frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\int_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx-\Gamma(s-1)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}x^{s-1}\left[\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}-\frac{e^{-x}}{x}\right]dx$$

گذرحدی، به‌ازای $s\to 1$، را می‌توان زیرعلامت انتگرال انجام داد، زیرا

عبارت زیر انتگرال در بازه‌های [۰،۱] و [۱،∞]، به‌طور جداگانه، به‌طور یکنوا، به‌سمت حد خودش میل می‌کند [۵۱۸]. بعد باید از دستور (۲۴) استفاده کرد.

در حالت خاص $a=1$ به‌دست می‌آید:

$$\lim_{s\to 1+0}\left[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right]=C$$

[با ۳۷۵، ۱) مقایسه کنید].

۵) مقدار حاصل‌ضرب نامتناهی زیر را محاسبه کنید [اولر]:

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}u_n$$

که در آن داریم:

$$u_n=\frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_k)}\quad (a_i, b_i>-1)$$

[از آن‌جا که داریم:

$$u_n=\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)\left(1+\frac{b_1}{n}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)^{-1}=$$

$$=1+\frac{(a_1+\cdots+a_k)-(b_1+\cdots+b_k)}{n}+\frac{A_n}{n^2}$$

$$(|A_n|\leqslant A<+\infty)$$

بنابراین، حاصل‌ضرب نامتناهی، تنها با شرط

$$a_1+\cdots+a_k=b_1+\cdots+b_k$$

متقارب می‌شود. محاسبهٔ P را هم باید با همین شرط انجام داد.]

راهنمائی. u_n را به‌این صورت بنویسید:

$$u_n=\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}}\cdots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}}\cdots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)e^{-\frac{b_k}{n}}}$$

واز دستور ویرشتراس استفاده کنید (۳۰).

پاسخ:
$$P=\frac{\Gamma(1+b_1)\Gamma(1+b_2)\cdots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\cdots\Gamma(1+a_k)}$$

۶) با فرض
$$0<|a_i|,\ |b_i|<1$$
نتیجهٔ دیگر اولر را از (۵) به‌دست آورد:
$$\prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n=\frac{\sin b_1\pi\cdot\sin b_2\pi\cdots\sin b_k\pi}{\sin a_1\pi\cdot\sin a_2\pi\cdots\sin a_k\pi}$$

راهنمائی. ازاین رابطه استفاده کنید:
$$\Gamma(1+c)\cdot\Gamma(1-c)=\frac{\pi c}{\sin\pi c}\quad(0<|c|<1)$$

که نتیجه‌ای است از (۹) و (۱۵).

۷) به‌دستور گوس برمی‌گردیم:
$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

که با شرط‌های $0<\alpha$، $0<\gamma-\alpha$ و $0<\gamma-\alpha-\beta$، در ۵۳۴، ۱۳) ثابت کردیم. اکنون همین دستوررا، تنها با شرط مثبت بودن آوندهای تابع Γ درسمت راست‌وحذف شرط $0<\alpha$، ازراه دیگری ثابت کنید.

طرح اثبات را می‌دهیم. جمله‌های عمومی رشته‌های
$$A=F(\alpha,\beta,\gamma,1),\ B=F(\alpha-1,\beta,\gamma,1),\ C=F(\alpha,\beta,\gamma+1,1)$$
را به‌ترتیب، با a_n، b_n و c_n نشان می‌دهیم. درستی رابطه‌های زیررا، مستقیماً، می‌توان تحقیق کرد:
$$a_n-a_{n+1}=\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)c_n-b_{n+1},$$
$$(\gamma-\alpha)(a_n-b_n)=\beta a_{n-1}+(n-1)a_{n-1}-na_n$$
وثابت می‌شود که $na_n\to 0$. این رابطه‌ها را، با تغییر اندیس‌ها از ۱ تا n، باهم جمع می‌کنیم و به‌سمت حد می‌رویم، به‌دست می‌آید:
$$\gamma B=(\gamma-\beta)C,\ (\gamma-\alpha)(A-B)=\beta A,$$

از آن‌جا

$$A=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}C$$

اکنون، این عبارت را درنظر می‌گیریم:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1).\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)} \qquad (۳۲)$$

رابطهٔ قبلی [در ارتباط با (۹)] نشان می‌دهدکه معنای این عبارت، با تبدیل γ به $\gamma+1$ تغییر نمی‌کند. به‌این ترتیب

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1).\frac{\Gamma(\gamma-\alpha).\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma).\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}=$$

$$=F(\alpha,\beta,\gamma+m,1).\frac{\Gamma(\gamma+m-\alpha).\Gamma(\gamma+m-\beta)}{\Gamma(\gamma+m).\Gamma(\gamma+m-\alpha-\beta)}$$

دراین‌جا، درسمت راست، به‌ازای $m\to\infty$، به‌سمت حد می‌رویم. ازتقارب یکنواخت رشتهٔ $F(\alpha,\beta,\gamma+m,1)$ نسبت به m، نتیجه می‌شود [۴۳۳] که مجموع آن به‌سمت ۱ میل می‌کند، حد ضریب

$$\frac{\Gamma(\gamma+m-\alpha).\Gamma(\gamma+m-\beta)}{\Gamma(\gamma+m).\Gamma(\gamma+m-\alpha-\beta)}$$

هم برابر ۱ می‌شود، زیرا این ضریب عبارت است از باقی‌ماندهٔ حاصل‌ضرب متقارب [با توجه به ۵)]

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+n)(\gamma-\alpha-\beta+n)}$$

درچنین حالتی است که عبارت (۳۲) برابر ۱ می‌شود واین، هم‌ارز با دستور گوس است.

ازاین دستور می‌توان، به‌ازای $\gamma=1$ و $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$، بسط زیر را به‌دست آورد:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\times1}{2\times4}\right)^2+\left(\frac{1\times1\times3}{2\times4\times6}\right)^2+\left(\frac{1\times1\times3\times5}{2\times4\times6\times8}\right)^2+\dots=$$

$$= \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2} = \frac{4}{\pi}$$

می‌توان این نتیجهٔ کلی‌تر را هم ثابت کرد که مجموع ضریب‌های دوجمله‌ای، نظیر توان m دوجمله‌ای، به‌ازای $m > -\frac{1}{2}$، برابر است با

$$\frac{\Gamma(1+2m)}{\Gamma[(1+m)]^2} \quad (\gamma = 1, \alpha = \beta = -m)$$

قبلاً، به‌خاطر محدودیت $\alpha > 0$، نمی‌توانستیم این نتیجه را به‌دست بیاوریم.

۸) گسترش $\Gamma(a)$، برای حالتی که a منفی باشد. بنا بر دستور (۹) داریم:

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}$$

به‌نحوی که مقدار $\Gamma(a)$ برحسب مقدار $\Gamma(a+1)$ تعیین می‌شود. درحالت $-1 < a < 0$ داریم: $0 < a+1$ و، درنتیجه، $\Gamma(a+1)$ دارای معنا می‌شود. اگر $\Gamma(a)$ را، طبق رابطهٔ بالا تعریف کنیم، آن‌وقت، این تعریف، برای حالت $-1 < a < 0$ هم گسترش می‌یابد. به‌طور کلی، اگر فرض کنیم: $-n < a < -(n-1)$، دستور (۱۰) را می‌توان به‌این حالت گسترش داد و $\Gamma(a)$ را با برابری زیر تعریف کرد:

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \qquad (۳۳)$$

اگر برای روشنی بیشتر فرض کنیم $a = -n+\alpha$، که در آن $0 < \alpha < 1$، آن‌وقت، تعریف بالا این‌طور نوشته می‌شود:

$$\Gamma(\alpha-n) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)} \qquad (۳۴)$$

از این جا دیده می‌شود که نماد $\Gamma(a)$، برای $-n < a < -(n-1)$، با ضریب $(-1)^n$ داده می‌شود. وقتی که a به $-n$ یا $-(n-1)$ نزدیک شود (یعنی وقتی که α به‌سمت ۰ یا ۱ میل کند)، $\Gamma(a)$ بی‌نهایت (مرتبهٔ اول) می‌شود.

۹) براساس ۸)، دستورهای (۷)، (۹)، (۱۵)، (۲۰)، (۲۶) و (۳۰) را، برای حالت مقدارهای حقیقی ودلخواه آوندها، تعمیم دهید، (تنها از مقدارهای درست منفی و مقدارهای صفر آوندها، پرهیز کنید).

راهنمائی. باگسترش دستور (۳۰)، برابری (۳۳) را به‌حساب بیاورید.

اگر ازگسترش $\Gamma(a)$ بر حالت aهای منفی استفاده می‌شود، درآن‌صورت، دستور گوس هم ــ که دربارهٔ آن در ۷) صحبت شد، تنها با فرض $\gamma-\alpha-\beta>0$، که برای تقارب خود رشته $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ لازم است [۳۷۸، ۴)]، درست می‌باشد.

۱۰) با استناد به‌دستور(۳۴)، ثابت کنیدکه، ضمن تغییر α از ۰ تا ۱، $\Gamma'(\alpha-n)$ درجائی (و مثلاً به‌ازای $\alpha=\alpha_n$)، از صفر عبورمی‌کند و علامت $(-1)^{n+1}$ به $(-1)^n$ تغییر می‌یابد. به‌این ترتیب، مقدارهای نظیر $a=\alpha_n-n$، تابع $\Gamma(a)$، دارای می‌نیمم مثبت (وقتی n زوج باشد) و یا ماکزیمم منفی (وقتی n فرد باشد) می‌شود. به‌نمودارتابع Γ در شکل ۶۴ نگاه‌کنید.

همچنین پیشنهاد می‌کنیم، ثابت‌کنید که، وقتی n ترقی می‌کند، هم α_n و هم $\Gamma_n=|\Gamma(\alpha_n-n)|$، به‌صورت نزولی یکنوا، به‌سمت صفر میل می‌کند.

راهنمائی. پایهٔ این نتیجه‌گیری‌ها، برابری‌های زیر است $(0<\alpha<1)$:

$$|\Gamma(\alpha-\overline{n+1})|=\frac{|\Gamma(\alpha-n)|}{n+1-\alpha},$$

$$|\Gamma(\alpha-\overline{n+1})|'=\frac{|\Gamma(\alpha-n)|'}{n+1-\alpha}+\frac{|\Gamma(\alpha-n)|}{(n+1-\alpha)^2}$$

و

$$\frac{\Gamma'(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)}=-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu-\alpha_n}$$

۱۱) ثابت‌کنیدکه، به‌ازای $-n<a<-(n-1)$، تابع $\Gamma(a)$، با انتگرال‌زیر بیان می‌شود:

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\left[e^{-x}-1+\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]dx$$

راهنمائی. از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء استفاده‌کنید؛ ۸) را ببینید.

۱۲) درفصل یازدهم، [۴۰۲، ۱۰)] با شروع ازتعریف‌تابع $\Gamma(a)$ ــ دستور اولر-گوس (۷) و، ضمناً، برای‌همهٔ مقدارهای حقیقی دلخواه آوند (به‌استثنای صفر و عددهای درست منفی) ــ بعضی ویژگی‌های سادهٔ این تابع را ثابت کردیم [۴۰۸ را هم ببینید]. دربارهٔ سایر ویژگی‌ها هم، به‌همان طریق می‌توان عمل‌کرد.

برای مطالعهٔ تابع $\Gamma(a)$، به‌ازای هر مقدار حقیقی a (با همان استثناها) می‌توان از رشتهٔ

$$D^{۲}\ln\Gamma(a)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{(a+n)^{۲}}$$

هم آغاز کرد، با این شرط اضافه که: $\Gamma(۱)=\Gamma(۲)=۱$.

۱۳) بالاخره، یادآوری می‌کنیم که تابع $\Gamma(a)$ را می‌توان، به‌عنوان یك تابع تحلیلی یك ارزشی، در تمامی صفحهٔ مختلط a* تعریف کرد. این ملاحظه را می‌توان از خود تعریف انتگرال (۶) آغاز کرد. اگر انتگرال $\int_{۰}^{\infty}$ را به‌دو انتگرال

$$\int_{۰}^{۱}+\int_{۱}^{\infty}=P(a)+Q(a)$$

تجزیه کنیم، آن‌وقت، تابع

$$P(a)=\int_{۰}^{۱}x^{a-۱}e^{-x}dx=\int_{۰}^{۱}x^{a-۱}\sum_{۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}x^{n}}{n!}dx=$$

$$=\sum_{۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{n!}\int_{۰}^{۱}x^{a+n-۱}dx=\sum_{۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{n!}\cdot\frac{۱}{a+n}$$

به‌طور طبیعی روی تمامی صفحهٔ متغیر مختلط گسترش می‌یابد، همچون تابعی مرومورفیك (meromorphic) با قطب‌های ساده در نقطه‌های ۰، ۱ —، ...، n —، ... که متناظر با مانده‌های ۱، ۱ —، $\frac{۱}{۲!}$، ...، $\frac{۱}{n!}(-۱)^{n}$، ... هستند. تابع

$$Q(a)=\int_{۱}^{\infty}x^{a-۱}e^{-x}dx$$

هم دارای معنا است و، به‌ازای مقدارهای مختلط a، به‌صورت یك تابع صحیح نمایش داده می‌شود.

ویژگی‌های تابع $\Gamma(a)$، که برای مقدارهای مثبت و حقیقی آوند ثابت کردیم،

---

*) ملاحظهٔ اخیر دربارهٔ گسترش تابع Γ را، تنها می‌توان با علامت‌ها، مفهوم‌های اساسی و اصطلاح‌های نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط فهمید.

خود به‌خود، و از روی قضیهٔ معلوم مربوط به‌تابع‌های تحلیلی [منظور ما ویژگی‌هایی است که به‌کمك برابری‌های بین تابع‌های تحلیلی، بیان می‌شوند]، برتمامی صفحه گسترش پیدا می‌کنند. به‌خصوص، از دستور کمکی (۱۵)، که می‌تواند این‌طور نوشته شود:

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)}=\frac{1}{\pi}\sin a\pi\cdot\Gamma(a)=\frac{1}{\pi}\sin a\pi[P(a)+Q(a)]^*$$

روشن می‌شود که $\frac{1}{\Gamma(a)}$، در تمامی صفحه، هولومورف (تحلیلی) است. بنابراین $\Gamma(a)$ دارای ریشه نیست.

در پایان یادآور می‌شویم که هم دستور اولر ـ گوس (۷) و هم دستور ویرشتراس (۳۰) را می‌توان به‌عنوان پایه‌ای برای تعریف $\Gamma(a)$ در تمامی صفحه، قرار داد.

۵۳۹. محاسبهٔ بعضی انتگرال‌های معین. به‌بررسی برخی از انتگرال‌هایی می‌پردازیم که، برای محاسبهٔ آن‌ها، می‌توان از تابع $\Gamma(a)$ و ویژگی‌های آن استفاده کرد.

۱) در **۵۳۱**، ۱°، با مشتق‌گیری نسبت به a، از دستور

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

دستور (۸) را به‌دست آوردیم:

$$\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$$

با فرض $a=1$، و با توجه به این‌که $\Gamma'(1)=-C$، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx=-C$$

که با تبدیل $x=-\ln u$، به‌انتگرال جالبی منجر می‌شود:

$$\int_0^1\ln(-\ln u)\,du=-C$$

با فرض $a=\frac{1}{2}$ و $x=t^2$، به‌دست می‌آید:

---

*) در نقطه‌هایی که، در آن‌ها، $P(a)$ دارای قطب است، $\sin a\pi$ برابر صفر می‌شود.

$$\int_0^\infty e^{-t^4}\ln t\,dt=\frac{1}{4}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{\pi}}{4}(C+2\ln 2)$$

که به‌سادگی، از بسط (۲۷)، با در نظرگرفتن رشتهٔ لگاریتمی، حاصل می‌شود.

با تکرار مشتق‌گیری، به‌دستور ($8'$) می‌رسیم:

$$\Gamma''(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx$$

از این دستور، به‌ازای $a=1$، حاصل می‌شود:

$$\int_0^\infty e^{-x}\ln^2 x\,dx=\Gamma''(1)=C^2+\frac{\pi^2}{6}$$

نتیجهٔ اخیر را از (۲۸) هم می‌توان به‌دست آورد، به‌شرطی که از رشتهٔ معلوم زیر استفاده کنیم:

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

بالاخره، در این‌جا، با فرض $a=\frac{1}{2}$ و به کمک تبدیل $x=t^2$، به‌این انتگرال می‌رسیم:

$$\int_0^\infty e^{-t^4}\ln^2 t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{8}\left[(C+2\ln 2)^2+\frac{\pi^2}{2}\right]$$

وغیره

۲) این انتگرال را محاسبه کنید:

$$J=\int_0^\infty\frac{\sin^p x}{x}dx$$

که در آن، p کسری است گویا با صورت و مخرج فرد.

راهنمائی. از دستور لباچوسکی [۴۹۷، ۱۴)] استفاده کنید. بنا بر آن، داریم [۵۳۲ ۴) (b) را ببینید]:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}x\,dx$$

پاسخ: $J=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{۲}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+۱}{۲}\right)}=۲^{p-۲}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{p}{۲}\right)\right]^{۲}}{\Gamma(p)}$.

۳) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید. ($b>۰$):

$$A=\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos bx}{x^{s}}dx,\quad B=\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin bx}{x^{s}}dx$$
$$(۰<s<۱)\qquad(۰<s<۲)$$

داریم [(۱۳) را ببینید]:

$$\frac{۱}{x^{s}}=\frac{۱}{\Gamma(s)}\int_{۰}^{\infty}z^{s-۱}e^{-zx}dz$$

به‌نحوی که

$$A=\frac{۱}{\Gamma(s)}\int_{۰}^{\infty}\cos bx\,dx\int_{۰}^{\infty}z^{s-۱}e^{-zx}dz$$

با جابه‌جا کردن انتگرال‌ها، نتیجه می‌شود:

$$A=\frac{۱}{\Gamma(s)}\int_{۰}^{\infty}z^{s-۱}dz\int_{۰}^{\infty}e^{-zx}\cos bx\,dx=\frac{۱}{\Gamma(s)}\int_{۰}^{\infty}\frac{z^{s}dz}{z^{۲}+b^{۲}}$$

و یا با فرض $b^{۲}t=z^{۲}$

$$A=\frac{b^{s-۱}}{۲\Gamma(s)}\int_{۰}^{\infty}\frac{t^{\frac{s-۱}{۲}}}{۱+t}dt=\frac{b^{s-۱}}{۲\Gamma(s)}\beta\left(\frac{s+۱}{۲},\frac{۱-s}{۲}\right)=$$

$$=\frac{b^{s-۱}}{۲\Gamma(s)}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{s+۱}{۲}\pi}=\frac{\pi b^{s-۱}}{۲\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{۲}}$$

[(۴) و (۵) را ببینید]. به‌همین ترتیب

$$B=\frac{\pi b^{s-۱}}{۲\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{۲}}$$

مستند کردن جابه‌جائی انتگرال‌ها، مثل محاسبهٔ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ در ۵۲۴، ۱۱) انجام می‌گیرد.

۴) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ln x\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ln^2 x\,dx$$

بنا بر ۳) داریم ($0<s<2$):

$$J=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}}$$

که اگر از آن، نسبت به‌پارامتر s (طبق قاعدهٔ لایب نیتس) مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}\ln x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\left[\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right]^2}\left\{\Gamma'(s)\cdot\sin\frac{s\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Gamma(s)\cdot\cos\frac{s\pi}{2}\right\}$$

استفاده از قاعدهٔ لایب نیتس، به‌خاطر تقارب یکنواخت انتگرال حاصل نسبت به s، چه برای $x=\infty$ (به‌ازای $0<s_0\leqslant s$؛ ۵۱۵، ۴° را ببینید) وچه‌برای $x=0$ (به‌ازای $s\leqslant s_1$؛ محدود کنندهٔ $x^{s_1-1}:|\ln x|$)، تایید می‌شود.

اگر یکبار دیگر، جمله به‌جمله، مشتق بگیریم (که مجاز بودن آن به‌طریق مشابهی تایید می‌شود)، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}\ln^2 x\,dx=\frac{\pi}{\left[\Gamma'(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right]^3}\left\{\Gamma'(s)\sin\frac{s\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\right\}^2-$$

$$-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\left[\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right]^2}\left\{\Gamma''(s)\sin\frac{s\pi}{2}+\pi\Gamma'(s)\cos\frac{s\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right\}$$

اگر در هر دو برابری فرض کنیم: $s=1$، آن‌وقت مقدار انتگرال‌های مطلوب، به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\Gamma'(1),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x\,dx = \pi[\Gamma'(1)]^2 = \frac{\pi}{2}\Gamma''(1) + \frac{\pi^3}{8}$$

با توجه به‌این‌که [با ۱) مقایسه کنید]

$$\Gamma'(1) = -C, \quad \Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x\,dx = -\frac{\pi}{2}\cdot C, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot C^2 + \frac{\pi^3}{24}$$

۵) قبلاً این رابطه را داشتیم [۵۳۴، ۴) (b)]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} \quad (a>0)$$

با مشتق‌گیری نسبت‌به a [با استفاده ازقاعدهٔ لایب‌نیتس؛ ۵۲۰]، به‌دست‌می‌آوریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\varphi \cdot \ln\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{d\ln\Gamma(a)}{da} - \frac{d\ln\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{da}\right]$$

که اگر از دستور گوس (۲۵) استفاده کنیم، مقدار داخل کروشه، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\int_0^1 \frac{t^{a-\frac{1}{2}} - t^{a-1}}{1-t}\,dt$$

اکنون اگر فرض کنیم: $2a-1 = 2n$، که در آن n عدد طبیعی دلخواه و یا صفر است،و

تبدیل $t=u^{۲}$ را انجام دهیم حاصل می‌شود:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^{۲n}\varphi\cdot \ln sin\varphi d\varphi = -\frac{\sqrt{\pi}}{۲}\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{۱}{۲}\right)}{\Gamma(n+۱)}\int_{۰}^{۱}\frac{u^{۲n}}{۱+n}du$$

به‌ازای $n=۰$، این دستور، به‌نتیجه‌ای می‌رسد که از قبل می‌شناسیم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \ln sin\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{۲}\ln ۲$$

به‌ازای $n\geqslant ۱$، به‌انتگرال تازه‌ای می‌رسیم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} sin^{۲n}\varphi\cdot \ln sin\varphi d\varphi = \frac{\pi}{۲}\cdot\frac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!}\left(۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\ldots-\frac{۱}{۲n}-\ln ۲\right)$$

۶) این انتگرال‌ها را محاسبه کنید ($a>۰$، $p>۰$):

$$u=\int_{۰}^{\infty} e^{-ax}x^{p-۱}cosbxdx,\quad v=\int_{۰}^{\infty} e^{-ax}x^{p-۱}sinbxdx$$

حل. شبیه ۸) شمارهٔ **۵۳۲** عمل می‌شود. برای تابع $w=u+vi$ از b، یك معادلهٔ دیفرانسیلی به‌دست می‌آید:

$$\frac{dw}{db}=-\frac{p}{a^{۲}+b^{۲}}(b-ai)w$$

که می‌توان آن‌را، به‌این‌صورت نوشت:

$$\frac{dw}{db}=pw\cdot\frac{۱}{a-bi}$$

به‌سادگی تحقیق می‌شود که، براساس این معادله

$$w\cdot(a-bi)^{p}=c=\text{const}^{*}.$$

با فرض $b=۰$ معلوم می‌شود که $c=\Gamma(p)$. به‌این ترتیب

---

*) در این‌جا از $(a\pm bi)^{p}$، شاخه‌ای از تابع توانی را در نظر می‌گیریم که، به‌ازای $a=۰$، به‌عدد حقیقی و مثبت a^{p} منجر شود.

$$w=\frac{\Gamma(p)}{(a-bi)^p}=\frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^p}(a+bi)^p=$$

$$=\frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}}\left\{\cos p\arctg\frac{b}{a}+i\sin p\arctg\frac{b}{a}\right\}$$

اگر بخش‌های حقیقی وموهومی را، به‌طور جداگانه، برابر قرار دهیم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$u=\frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}}\cos p\theta,\ v=\frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}}\sin p\theta$$

که در آن، برای سهولت‌کار، فرض شده است: $\theta=\arctg\frac{b}{a}$.

اگر به جای $\sqrt{a^2+b^2}$ قرار دهیم $\frac{b}{\sin\theta}$ یا $\frac{a}{\cos\theta}$، نتیجه را می‌توان این طور نوشت:

$$u=\frac{\Gamma(p)}{b^p}\sin^p\theta\cos p\theta=\frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\cos p\theta$$

$$v=\frac{\Gamma(p)}{b^p}\sin^p\theta\sin p\theta=\frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\sin p\theta$$

پیشنهاد می‌کنیم که انتگرال‌های A و B را که در ۳) داشتیم، از این‌جا و با فرض $p=1-s$ و با میل دادن a به‌سمت ۰، پیدا کنید (زاویهٔ $\theta=\arctg\frac{b}{a}$، به‌ازای $b>0$، به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل خواهد کرد).

با مشتق‌گیری نسبت به p از انتگرال‌های u و v، می‌توان به یك رشته انتگرال‌های تازه رسید، که ما، آن را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۷) با توجه به مقدارهای حاصل برای u و v، می‌توان انتگرال‌های جالب دیگری را هم به‌دست آورد. اگر دو طرف برابری

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\cdot\cos p\theta=\int_0^\infty e^{-ax}x^{p-1}\cos bx\,dx$$

را در

$$a^q.tg^{q-1}\theta.\frac{d\theta}{cos^2\theta}=b^{q-1}\,db$$

ضرب کنیم (با درنظرگرفتن $p>q>0$ و $q<1$) و در سمت‌چپ نسبت به θ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ ودرسمت راست نسبت به b از ۰ تا ∞ انتگرال بگیریم*، به‌دست می‌آید:

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{p-q-1}\theta.sin^{q-1}\theta.cos\,p\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}b^{q-1}\,db\int_0^{\infty}e^{-ax}x^{p-1}cos\,bx\,dx$$

اگر در سمت راست، انتگرال‌ها را جابه‌جا کنیم، مستقیماً به‌محاسبهٔ انتگرال J_1 منجر می‌شود:

$$J_1=\frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}e^{-ax}x^{p-1}\,dx\int_0^{\infty}\frac{cos\,bx}{b^{1-q}}\,db$$

از ۳) به‌سادگی معلوم می‌شود که مقدار انتگرال درونی برابر است با $\Gamma(q)cos\frac{q\pi}{2}x^{-q}$، به‌نحوی که

$$J_1=\frac{a^{p-q}\Gamma(q)\,cos\frac{q\pi}{2}}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}e^{-ax}x^{p-q-1}\,dx$$

وسرانجام

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{p-q-1}\theta.sin^{q-1}\theta.cos\,p\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(q)\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)}cos\frac{q\pi}{2}$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توان به‌دست آورد:

---

*) رابطهٔ بین متغیرهای b و θ با رابطهٔ $b=a\,tg\,\theta$ $(a=\text{const.})$ داده می‌شود.

$$J_۲=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} cos^{p-q-۱}\theta.sin^{q-۱}\theta.\sin p\theta\ d\theta=\frac{\Gamma(q)\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)}sin\frac{q\pi}{۲}$$

ولی هنوز باید مجاز بودن جابه‌جایی انتگرال‌ها را ثابت کرد. چون انتگرال

$$\int_۰^{\infty} x^{p-۱}e^{-ax}b^{q-۱}cosbx\,dx$$

برای $۰<b_۰\leqslant b\leqslant B<+\infty$، به طور یکنواخت متقارب می‌شود، پس

$$\int_{b_۰}^{B} b^{q-۱}\,db\int_۰^{\infty} x^{p-۱}e^{-ax}cos\ bx\,dx=\int_۰^{\infty} e^{-ax}x^{p-۱}\,dx\times$$

$$\times\int_{b_۰}^{B} b^{q-۱}cosbx\,dx=\int_۰^{\infty} e^{-ax}x^{p-q-۱}\,dx\int_{b_۰x}^{Bx} u^{q-۱}cosu\,du$$

با توجه به‌وجود انتگرال $\int_۰^{\infty} u^{q-۱}cosu\,du$، انتگرال درونی به‌ازای $b_۰\to ۰$ و $B\to\infty$، ضمن کران‌دار ماندن

$$\left|\int_{b_۰x}^{Bx} u^{q-۱}.\cos u\,du\right|\leqslant L$$

به‌سمت آن میل می‌کند، به‌نحوی که همهٔ عبارت زیر انتگرال، به‌وسیلهٔ تابع $L.e^{-۰x}.x^{p-q-۱}$ محدود می‌شود و عبور به‌سمت حد، به‌ازای $b_۰\to ۰$ و $B\to\infty$، در زیر علامت انتگرال مجاز است.

۸) فرض کنیم

$$\psi(t)=D\ln\Gamma(t)=\int_۰^{۱}\frac{۱-x^{t-۱}}{۱-x}\,dx-C$$

[(۲۵) را ببینید]. آن‌وقت

$$\int_۰^{۱}\frac{x^p-x^q}{۱-x}\,dx=\psi(q+۱)-\psi(p+۱)$$

(به‌ازای $p+۱>۰$ و $q+۱>۰$).

با توجه به‌این مطلب، انتگرال زیررا درنظر می گیریم:

$$J=\int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}{(1-x)\ln x}\,dx$$
$$(\alpha>-1,\ \beta>-1,\ \alpha+\beta>-1)$$

مشتق آن نسبت به α چنین می‌شود:

$$\frac{dJ}{d\alpha}=-\int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x^\beta)}{1-x}\,dx=\psi(\alpha+1)-\psi(\alpha+\beta+1)=$$

$$=\frac{d}{d\alpha}\ln\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

بنابراین

$$J=\ln\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}+C$$

چون به‌ازای $\alpha=0$ داریم: $J=0$، بنابراین $C=\ln\Gamma(\beta+1)$ و درنتیجه

$$J=\ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

به‌همین‌ترتیب، انتگرال‌های زیرهم پیدا می‌شود:

$$K=\int_0^1 \frac{x_\alpha(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x)\ln x}\,dx=$$
$$(\alpha>-1,\ \alpha+\beta>-1,\ \alpha+\gamma>-1,\ \alpha+\beta+\gamma>-1)$$

$$=\ln\frac{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)},$$

$$L=\int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x)\ln x}\,dx=$$
$$(\alpha>1,\ \ldots)$$

$$=\ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\beta+\gamma+1)}$$

وغیره.

اگر درانتگرال K فرض کنیم: $\gamma=\frac{1}{2}$، $\alpha=\frac{a}{2}-1$، $\beta=\frac{b-a}{2}$ و تبدیل $x=t^2$

را انجام دهیم، به‌انتگرال زیر می‌رسیم:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}-t^{b-1}}{(1+t)\ln t}\,dt = \ln \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}$$

$(a, b>0)$

که ازاین‌جا، به‌ازای $b=1-a$، انتگرال جالب زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_0^{1} \frac{t^{a-1}-t^{-a}}{(1+t)\ln t}\,dt = \ln\, tg\frac{a\pi}{2} \quad (0<a<1)$$

همین تعداد مثال کافی است تـا نیروی تابع Γ و امکان‌هایی را کـه برای نمایش انتگرال‌ها با دستورهای متناهی در اختیار ما می‌گذارد، نشان دهـد. حتی در موردهایی که دستورمتناهی، تنها با تابع‌های مقدماتی سروکار داشته باشد، بازهم استفاده ازتابع Γ می‌تواندکار را ساده‌ترکند.

۵۴۰. دستور ستیرلینگ. اکنون، به‌پیداکردن دستورتقریبی ساده‌ای‌برای $\ln\Gamma(a)$ ومسالهٔ مربوط به‌محاسبهٔ مقداراین لگاریتم (وخود تابع Γ) می‌پردازیم.

نقطهٔ آغاز، دستور (۲۴) برای مشتق لگاریتمی تابع Γ است:

$$D\ln\Gamma(a)=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right)dx$$

چـون عبارت زیرانتگرال تابعی است پیوسته نسبت به‌هردو آوند x و a، به‌ازای $0\leqslant x<\infty$ و $a>0$ (به‌ازای $x=0$، بـا بسط به‌صورت رشته، می‌توان به‌این نتیجه رسید) و، ضمناً، به‌ازای $x=\infty$ به طـور یکنواخت نسبت به a، بـرای $a\geqslant a_0>0$، متقارب می‌شود، زیرا این محدودکننده را دارد:

$$\frac{e^{-x}}{x}+\frac{e^{-a_0x}}{1-e^{-x}}$$

بنابراین، در زیرعلامت انتگرال، می‌توان نسبت به a از ۱ تا a انتگرال گرفت.

$$\ln\Gamma(a)=\int_0^{\infty}\left[(a-1)e^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x} \quad (a>0)$$

انتگرال گیری را، به‌بازهٔ $[0, -\infty]$ تغییرمی‌دهیم:

$$\ln\Gamma(a)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}-e^{x}}{e^{x}-1}-(a-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x} \qquad (۳۵)$$

این انتگرال، به‌ازای $x=-\infty$ و برای $0<a_0\leqslant a\leqslant A<+\infty$ متقارب است. دوباره در زیرعلامت انتگرال، نسبت‌به a، از a تا $a+1$، انتگرال می‌گیریم:

$$R(a)=\int_{a}^{a+1}\ln\Gamma(a)\,da=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}}{x}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{x}\right]\frac{dx}{x} \qquad (۳۶)$$

برای ساده‌ترشدن انتگرال (۳۵)، ازانتگرال (۳۶)، درست مثل انتگرال مقدماتی فرولانی [۴۹۵] استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\ln a=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}-e^{x}}{2}\cdot\frac{dx}{x} \qquad (۳۷)$$

اگر (۳۶) را از (۳۵) کم و (۳۷) را به‌آن اضافه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\ln\Gamma(a)-R(a)+\frac{1}{2}\ln a=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]\frac{e^{ax}\,dx}{x}$$

برای سهولت‌کار، فرض می‌کنیم:

$$\omega(a)=\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]\frac{e^{ax}\,dx}{x} \qquad (۳۸)$$

و به‌جای $R(a)$، انتگرال آشنای (۱۱آب را قرار می‌دهیم [(۱۹)]، به‌دست می‌آید:

$$\ln\Gamma(a)=\ln\sqrt{2\pi}+\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln a-a+\omega(a) \qquad (۳۹)$$

در فصل دوازدهم [۴۴۱، ۱۰]، کتانژانت هیپربولیک را به‌کسرهای ساده تجزیه کردیم:

$$cthx=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^{2}+k^{2}\pi^{2}}$$

که برای همهٔ مقدارهای $x\neq 0$ حقیقی است. اگر دراین‌جا، x را به $\frac{x}{2}$ تبدیل کنیم،

می‌توان آن را به‌این صورت نوشت [با ۴۴۹ مقایسه کنیم]:

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}+1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2+4k^2\pi^2}$$

ویا بالاخره

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+4k^2\pi^2}$$

$f(x)$، بخشی ازتابعی است که در زیرعلامت انتگرال (۳۸) وجود داشت.

عدد درست و غیرمنفی m را تثبیت می‌کنیم و هرجملهٔ رشته را، با مجموع متحد با آن، عوض می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^2+4k^2\pi^2}=\frac{1}{4k^2\pi^2}-\frac{x^2}{(4k^2\pi^2)^2}+\frac{x^4}{(4k^2\pi^2)^3}-\dots+$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(4k^2\pi^2)^m}+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(4k^2\pi^2)^{m+1}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{4k^2\pi^2}}$$

عامل‌های به‌صورت

$$(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(4k^2\pi^2)^n}\quad(1\leqslant n\leqslant m)$$

را، به‌طور جداگانه، به‌ازای ... ،۳ ،۲ ،$k=1$، جمع می‌کنیم، اگر فرض کنیم

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=s_{2n}$$

به‌این نتیجه می‌رسد:

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{(2\pi)^{2n}}\cdot s_{2n}\cdot x^{2n-2}$$

واگرعدد nام برنولی را واردکنیم [۴۴۹].

$$B_n=\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\cdot s_{2n}\qquad(40)$$

این نتیجه، به‌این صورت درمی‌آید:

$$(-1)^{n-1}.\frac{B_n}{2(2n)!}.x^{2n-2}$$

اما، مجموع جمله‌های آخر، که با عامل $\frac{1}{1+\frac{x^2}{4k^2\pi^2}}$ همراه است، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(-1)^m.\tilde{\theta}\frac{B_{m+1}}{2(2m+2)!}.x^{2m}$$

که در آن $\tilde{\theta}$ کسری مثبت و کوچکتر از واحد است.

بالاخره، این عبارت را، برای $f(x)$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{B_2}{2!}-\frac{B_2}{4!}x^2+\frac{B_3}{6!}x^4-\dots+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m)!}x^{2m-2}+$$

$$+(-1)^m.\tilde{\theta}.\frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}x^{2m}\quad(0<\tilde{\theta}<1)$$

این عبارت را در (۳۶) می‌گذاریم و جمله به‌جمله انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{0}e^{ax}x^{2n}\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-ax}x^{2n}\,dx=\frac{(2n)!}{a^{2n+1}}$$

و

$$\int_{-\infty}^{0}e^{ax}.\tilde{\theta}.x^{2n}\,dx=\theta.\int_{-\infty}^{0}e^{ax}x^{2m}\,dx=\theta.\frac{(2m)!}{a^{2m+1}}\quad(0<\theta<1)^*$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\omega(a)=\frac{B_1}{1\times2}.\frac{1}{a}-\frac{B_2}{3\times4}.\frac{1}{a^3}+\frac{B_3}{5\times6}.\frac{1}{a^5}-\dots+$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)2m}.\frac{1}{a^{2m-1}}+$$

$$+(-1)^m.\theta.\frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)}.\frac{1}{a^{2m+1}}\quad(0<\theta<1)$$

*) به‌این نکته توجه کنید که $\tilde{\theta}$ به x بستگی دارد، درحالی‌که θ به آن وابسته نیست.

بالاخره، اگر در (۳۹)، به‌جای $\omega(a)$، این عبارت را قراردهیم، به‌دستور زیر می‌رسیم:

$$\ln\Gamma(a)=\ln\sqrt{2\pi}+\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln a-a+\frac{B_1}{1\times 2}\cdot\frac{1}{a}-$$

$$-\frac{B_2}{3\times 4}\cdot\frac{1}{a^3}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{1}{a^{2m-1}}+$$

$$+(-1)^m\cdot\theta\cdot\frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)}\cdot\frac{1}{a^{2m+1}}\quad(0<\theta<1)\quad(41)$$

که بانام ستیرلینگ همراه است.

درحالت خاص $m=0$، این دستور، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\ln\Gamma(a)=\ln\sqrt{2\pi}+\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln a-a+\frac{\theta}{12a}\quad(0<\theta<1)$$

اگر جملهٔ متمم را کنار بگذاریم (جمله‌ای که شامل ضریب θ است)، وجمله‌های رشته را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، به‌رشتهٔ ستیرلینگ می‌رسیم:

$$\ln\Gamma(a)\sim\ln\sqrt{2\pi}+\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln a-a+\frac{B_1}{1\times 2}\cdot\frac{1}{a}-\frac{B_2}{3\times 4}\cdot\frac{1}{a^3}+$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)\cdot 2m}\cdot\frac{1}{a^{2m-1}}+\cdots$$

این رشته متباعد است. درواقع، باتوجه به (۴۰)، قدرمطلق جملهٔ عمومی رشتهٔستیرلینگ، به‌ازای $n\to\infty$

$$\frac{B_n}{(2n-1)\cdot 2n}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(2n-2)!}{(2\pi a)^{2n-1}}s_{2n}\to\infty$$

با وجود این، این رشته،که برای محاسبهٔ تقریبی تابع $\ln\Gamma(a)$ بسیار مفید است، نمایش مجانبی آن است ودر عین حال آن را دور می‌زند. قبلاً، چه به‌کمك یك‌رابطه وچه به کمك رشتهٔ ستیرلینگ، با $\ln(n!)$ سروکار داشته‌ایم [۴۶۹، (۲۶) و (۲۷) را ببینید]. بسطهایی که دراین‌جا به‌دست آوردیم، دارای خصلت‌های کلی‌تری هستند. اگر بخواهیم نتیجه‌های قبلی را از آن‌ها به‌دست آوریم، باید $a=n$ بگیریم و، ضمناً، $\ln n$ را اضافه کرد، زیرا $\Gamma(n)=(n-1)!$ و $\ln n!$. درحالت کلی هم، می‌توان با آنتی‌لگاریتم

گرفتن[۴۶۴، ۳°]، بسط مجانبی‌را برای خودتابع $\Gamma(a)$ به‌دست آورد [۴۶۹ را ببینید].

۵۴۱. محاسبهٔ ثابت اولر. به‌دستور (۳۹) برمی‌گردیم و ازآن نسبت به a مشتق می‌گیریم:

$$D\ln\Gamma(a)=\ln a-\frac{1}{2a}+\omega'(a)$$

که درآن

$$\omega'(a)=\int_{-\infty}^{0} xe^{ax}f(x)\,dx$$

با تکرار محاسبه‌هایی، شبیه قبل، به‌دست می‌آید:

$$\omega'(a)=-\frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{B_2}{4}\cdot\frac{1}{a^4}-\dots-(-1)^m\frac{B_m}{2m}\cdot\frac{1}{a^{2m}}+$$

$$+(-1)^{m+1}\cdot\theta'\cdot\frac{B_{m+1}}{2m+2}\cdot\frac{1}{a^{2m+2}}\quad(0<\theta'<1)\qquad(۴۲)$$

که از آن‌جا، به‌بسط مجانبی زیرمی‌رسیم:

$$D\ln\Gamma(a)\sim\ln a+\frac{1}{2a}-\frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{B_2}{4}\cdot\frac{1}{a^4}-\dots$$

$$\dots+(-1)^m\frac{B_n}{2n}\cdot\frac{1}{a^{2n}}+\dots$$

این رشته را می‌توان، به‌طور صوری، از مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ رشتهٔ ستیرلینگ هم به‌دست آورد.*

از دستور معلوم (۴۲)، می‌توان به‌روش راحت‌تری برای محاسبهٔ عدد ثابت اولر C رسید.

در دستور گوس (۲۵)، a را برابرعدد طبیعی k می‌گیریم، پیدا می‌شود:

$$C=\int_0^1\frac{1-t^{k-1}}{1-t}\,dt-D\ln\Gamma(k)$$

---

*) به‌این ترتیب، دراین حالت، مشتق‌گیری جمله به‌جمله ازبسط مجانبی، مجاز از آب درمی‌آید [با یادداشت شمارهٔ ۴۶۴ مقایسه کنید].

ولی

$$\frac{1-t^{k-1}}{1-t}=1+t+\cdots+t^{k-2}$$

به‌طوری که

$$\int_0^1 \frac{1-t^{k-1}}{1-t}dt=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}$$

که بالاخره، با استفاده از دستور (۴۲) به‌ازای $a=k$، نتیجه می‌گیریم:

$$C=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}-\ln k+\frac{1}{2k}+\frac{1}{12k^2}-\frac{1}{120k^4}+$$

$$+\frac{1}{252k^6}-\frac{1}{240k^8}+\cdots+(-1)^n\frac{B_n}{2n}\cdot\frac{1}{k^{2n}}+$$

$$+(-1)^{n+1}\cdot\theta'\cdot\frac{B_{n+1}}{2n+2}\cdot\frac{1}{k^{2n+2}}\quad(0<\theta'<1)$$

اولر از روی این دستور، با اختیار $k=10$ و محاسبهٔ همهٔ جمله‌ها تا جملهٔ شامل k^{12}، مقدار C را تا رقم پانزدهم بعداز ممیز محاسبه کرد:

$$C=0/577\,215\,664\,901\,532\cdots$$

۵۴۲. تشکیل جدول لگاریتم‌های دهدهی تابع Γ. روش تشکیل این گونه جدول‌ها را، به‌اختصار، شرح می‌دهیم.

دستور (۲۷) را در نظر می‌گیریم و آن را، با تبدیل a به $a+1$، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{d\ln\Gamma(1+a)}{da}=-C+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{a+k}\right)$$

با مشتق گیری پی‌درپی، به‌این دستور، برای مشتق nام می‌رسیم:

$$\frac{d^n\ln\Gamma(1+a)}{da^n}=(-1)^n(n-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(a+k)^n}$$

(تقارب یکنواخت رشته‌های حاصل، امکان مشتق‌گیری جمله به‌جمله را فراهم می‌کند).

به‌این ترتیب، ضریب‌های رشتهٔ تیلور را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \ln \Gamma(1+a)}{da^n}\right]_{a=0} = (-1)^n \cdot \frac{s_n}{n}$$

که در آن

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

آن‌وقت، برای $|a|<1$ خواهیم داشت:

$$\ln \Gamma(1+a) = -Ca + \frac{1}{2} s_2 a^2 - \frac{1}{3} s_3 a^3 + \frac{1}{4} s_4 a^4 - \cdots$$

چون عددهای s_k (به‌خصوص برای kهای بزرگ) به ۱ نزدیک‌اند، بهتراست بسط زیررا (که بازهم برای $|a|<1$ درست است) به‌آن اضافه کنیم:

$$\ln(1+a) = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4 + \cdots$$

که به‌ما می‌دهد

$$\ln \Gamma(1+a) =$$

$$= -\ln(1+a) + (1-C)a + \frac{1}{2}(s_2-1)a^2 - \frac{1}{3}(s_3-1)a^3 + \cdots$$

با ضرب در مدول M وفرض

$$M(1-C) = C_1,\ \frac{1}{2}M(s_2-1) = C_2,\ \frac{1}{3}M(s_3-1) = C_3,\ \cdots$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\ln \Gamma(1+a) = -\ln(1+a) + C_1 a + C_2 a^2 - C_3 a^3 + C_4 a^4 - \cdots \quad (۴۳)$$

وبا تبدیل a به $-a$ وکم کردن بسط حاصل

$$\ln \Gamma(1-a) = -\ln(1-a) - C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + C_4 a^4 + \cdots$$

ازبسط قبلی، چون بنابررابطهٔ متمم

$$\Gamma(1-a)\Gamma(1+a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi}$$

و

$$\ln\Gamma(1-a)=-\ln\Gamma(1+a)+\ln\frac{a\pi}{\sin a\pi}$$

بنا بر این، به‌دست می‌آید:

$$\ln\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\ln\frac{a\pi}{\sin a\pi}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+a}{1-a}+$$
$$+C_1a-C_3a^3-C_5a^5-\dots$$

(۴۴)

لژاندر، مقدار ضریب‌های C_n (برای $n\leqslant 15$) و لگاریتم‌های آن‌ها را محاسبه کرد و، به کمك دستورهای (۴۳) و (۴۴)، لگاریتم‌های دهدهی $\Gamma(a)$ را، برای a از ۱ تا ۲، یك‌هزارم به یك هزارم، ابتدا با ۷رقم و، سپس، با ۱۲ رقم دهدهی به‌دست آورد.

با به‌پایان رساندن بحث مربوط به‌تابع «گاما»، دیدیم که با آغاز ازنمایش آن به‌وسیلهٔ انتگرال شامل پارامتر a، نه‌تنها توانستیم با ویژگی‌های آن عمیقاً آشنا شویم، بلکه ضمناً روش محاسبهٔ آن را هم یادگرفتیم. این تابع جدید، همچون تابع‌های‌مقدماتی، نقشی اساسی درآنالیز ریاضی خواهد داشت.